MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI

VII. ÉVFOLYAM A. SOROZAT, 1—2. FÜZET

1962

★

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ VII., СЕРИЯ А, ВЫПУСК 1—2.

1962

★

PUBLICATIONS

OF THE

MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE

HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME VII. SERIES A. FASC. 1—2.

1962

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST

1962

INDEX — СОДЕРЖАНИЕ

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI

VII. ÉVFOLYAM A. SOROZAT, 1—2. FÜZET
1962

★

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ
ТОМ VII., СЕРИЯ А, ВЫПУСК 1—2.
1962

★

PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
VOLUME VII. SERIES A, FASC. 1—2.
1962

AKADÉMIAI KIADÓ
BUDAPEST
1962

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI: RÉNYI ALFRÉD

TECHNIKAI SZERKESZTŐK: BOGNÁR KATALIN, RÉVÉSZ PÁL

A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEI az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb matematikai, valamint a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden kötete két sorozatban jelenik meg (A. és B. sorozat). Az A. sorozat idegen nyelvű, a B. sorozat magyar nyelvű. Évente egy kötet jelenik meg kb. 30 nyomdaív terjedelemben, amely az A. sorozat 3 és a B. sorozat 1 füzetéből áll. A dolgozatokhoz azoktól különböző nyelvű kivonatok csatlakoznak. Közlésre szánt dolgozatokat kérjük két gépelt példányban kivonattal ellátva a szerkesztő címére küldeni (Budapest V., Reáltanoda u. 13—15.).

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEInek előfizetési ára kötetenként belföldi címre 50,— Ft, külföldi címre 70,— Ft. (Kötetenként 5 \$.) *Belföldön* előfizethető a Posta Központi Hírlapirodánál (Budapest V., József nádor tér 1.) vagy bármely Postahivatalnál. Egyéni előfizetők a 61257. számú, közületek a 61066. számú csekkbefizetési lap felhasználásával, vagy az MNB 8. számú egyszámlára való átutalással rendelhetik meg a folyóiratot. *Külföldi* megrendelések a Kultúra (Budapest, 62, POB 149) útján eszközölhetők. A folyóirat egyes füzetei 15,— Ft-os árban az Akadémiai Könyvesboltban kaphatók (Budapest V., Váci u. 22.). Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük az Intézet Könyvtárához fordulni (Budapest V., Reáltanoda u. 13—15.).

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

РЕДАКТОР: ALFRÉD RÉNYI

ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕДАКТОРЫ: KATALIN BOGNÁR, PÁL RÉVÉSZ

АДРЕС: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15., ВЕНГРИЯ

В ТРУДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи, содержащие результаты научно-исследовательской работы Института, и другие математические р боты, а также статьи, связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала состоит из двух серий: серия А и В. Серия А выходит на иностранных языках, Серия В — на венгерском языке. В каждом году выходит один том, который содержит приблизительно 30 печатных листов, и состоит из 3 выпусков серии А и одного выпуска серии В. К каждой работе примыкает резюме на языке, отличном от языка статьи. Работы, предназначенные для опудликования в журнале, вместе с их резюме следует направлять по адресу редакции (Budapest, V., Reáltanoda u. 13—15.) в двух напечатанных на машинке экземплярах.

Цена подписки на ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА в Венгрии 50 форинтов, на заграничный адрес 70 форинтов (\$ 5 — за каждый том). Заграничные заказы принимает Культура, (Budapest, 62, POB 149). По поводу отношения обмена просим обращаться к Библиотеке Института (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15., Венгрия).

PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

EDITOR: ALFRÉD RÉNYI

TECHNICAL EDITORS: KATALIN BOGNÁR, PÁL RÉVÉSZ

ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15, HUNGARY

The PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of scientific work of the Institute and other mathematical papers on the practical applications of mathematics. Each volume of the journal is published in two series (series A and B). Series A is published in foreign languages series B in Hungarian. In every year one volume appears, consisting of about 30 printed lists and containing 3 fasciculi of series A and one fasciculus of series B. The papers are provided with abstracts in languages different from that of the corresponding paper. Papers intended for publication in the journal should be sent to the editor in 2 typewritten copies, with an abstract.

The price of a volume of the PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE is 50,— Ft to an adress in Hungary and 70,— Ft (\$ 5.— the volume) to abroad. Subscriptions can be made at the Kultúra from abroad (Budapest, 62, POB 149). For establishing exchange relations please write to the Library of the Mathematical Institute (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15. Hungary).

GRAPHEN MIT TRIANGULIERBAREN UNGERADEN VIELECKEN

von

T. GALLAI

Georg Hajós zum 50. Geburtstag

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit kommen nur solche endliche, nicht gerichtete Graphen vor, die keine Kantenschlingen enthalten und in denen je zwei Punkte (wir sagen statt »Knotenpunkte« kurz nur »Punkte«) höchstens durch eine Kante verbunden sind (s. § 1 der vorliegenden Arbeit, sowie [7]). Wir nennen die verschiedenen Punkte des Graphen Γ *unabhängig*, wenn je zwei von ihnen durch keine Kante von Γ verbunden sind. Die maximale Anzahl der unabhängigen Punkte in Γ bezeichnen wir mit φ_Γ. Bezeichnet M die Menge der Punkte des Graphen Γ und ist $\{E_1, \ldots, E_m\}$ eine derartige Zerlegung[1] von M, daß jedes E_i $(i = 1, \ldots, m)$ in Γ einen vollständigen Graphen spannt, d. h. je zwei Punkte von E_i $(i = 1, \ldots m)$ durch eine Kante von Γ verbunden sind, so nennen wir $\{E_1, \ldots, E_m\}$ eine *τ-Zerlegung* von Γ. Offensichtlich besitzt jeder Graph τ-Zerlegungen. Es bezeichne τ_Γ die minimale Anzahl von Mengen, aus denen eine τ-Zerlegung von Γ bestehen kann. Es ist klar, daß keine τ-Zerlegung von Γ aus weniger als φ_Γ Mengen bestehen kann, d. h. es besteht immer $\varphi_\Gamma \leqq \tau_\Gamma$. Im allgemeinen ist τ_Γ größer als φ_Γ. (Tutte [1], [2] hat gezeigt, daß Graphen mit $\varphi_\Gamma = 2$ und beliebig großem τ_Γ existieren.) Bei speziellen Graphen kann jedoch $\varphi_\Gamma = \tau_\Gamma$ eintreten. Diesbezüglich haben Hajnal und Surányi folgenden Satz bewiesen ([6], Satz III.):

(Hajnal—Surányi) *Gibt es zu einem jeden n-Eck ($n \geqq 4$) v des nichtleeren Graphen Γ eine Kante von Γ, die Diagonale von v ist, so gilt* $\varphi_\Gamma = \tau_\Gamma$. [2]

Ferner ist ein Satz von König ([5], S. 134, (2)) mit der folgenden Behauptung gleichwertig:

(König) *Ist Γ ein nichtleerer paarer Graph*[3], so gilt $\varphi_\Gamma = \tau_\Gamma$.

Die folgende naheliegende Verallgemeinerung der beiden erwähnten Sätze ist *nicht* richtig: Gibt es zu einem jeden $(2j + 1)$-Eck $(j > 1)$ v von $\Gamma \neq \varnothing$ eine in Γ liegende Diagonale von v, so gilt $\varphi_\Gamma = \tau_\Gamma$. Das zeigt z. B. der Graph, der aus einem Siebeneck und dessen sieben »kürzesten« Diagonalen besteht.

---

[1] D. h. es ist $\bigcup_{i=1}^{m} E_i = M$ und $E_i \cap E_j = \varnothing$ $(i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, m)$.

[2] In der vorliegenden Arbeit werden wir, abweichend von [6] und [7], statt Kreis immer Vieleck oder n-Eck sagen und nur jenen Graphen leer nennen, der keinen Punkt enthält. Eine Diagonale eines Vielecks v ist eine solche Kante, die zwei auf v nicht benachbart liegende Punkte von v verbindet.

[3] S. (1.16) der vorliegenden Arbeit.

Die Bedingung des Satzes von HAJNAL und SURÁNYI ist jedoch mit der folgenden Behauptung gleichwertig: Jedes n-Eck v von Γ ist in Γ triangulierbar, d. h. Γ enthält $n-3$ solche Diagonalen von v, die sich paarweise nicht »kreuzen« [s. (8.1.)]. Diese Formulierung gibt anlaß zur folgenden richtigen Verallgemeinerung:

Ist jedes ungerade[4] *Vieleck des nichtleeren Graphen Γ in Γ triangulierbar, so gilt $\varphi_\Gamma = \tau_\Gamma$.*

Dieser Satz bildet das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit (Satz (14.5)).

Wir werden jene Graphen, in denen jedes ungerade Vieleck triangulierbar ist, ungerad-triangulierbar oder kurz u-triangulierbar nennen. Um den erwähnten Satz über u-triangulierbare Graphen zu bekommen, müssen wir von mehreren Eigenschaften der relativ-minimalen trennenden Punktmengen dieser Graphen Gebrauch machen. Es seien P und Q zwei Punkte des Graphen Γ und L eine Menge von Punkten von Γ. Gilt $P, Q \notin L$ und enthält jeder Weg, der P mit Q verbindet, einen Punkt von L, so sagen wir, daß *L P von Q trennt.* Trennt L P von Q, besitzt jedoch keine echte Teilmenge von L dieselbe Eigenschaft, so nennen wir (s. [4]) L eine *bezüglich P und Q minimale* oder eine *relativ-minimale trennende Punktmenge* von Γ. DIRAC bewies bezüglich dieser Punktmengen einen interessanten Satz ([4], Theorem 1.), den man auch folgendermaßen formulieren kann:

(DIRAC) *In einem zusammenhängenden Graphen Γ ist dann und nur dann jedes Vieleck trinagulierbar, wenn jede relativ-minimale trennende Punktmenge von Γ in Γ einen vollständigen Graphen spannt.*

In den Sätzen (9.10) und (11.8) geben wir ähnliche Charakterisierungen der relativ-minimalen trennenden Punktmengen der u-triangulierbaren Graphen an[5].

Unsere Beweise stützen sich auf zahlreiche Hilfssätze. Unter diesen spielen diejenige eine wichtige Rolle, die die grundlegenden Eigenschaften der Glieder (s. [7], S. 224—231) eines Graphen beschreiben. Wir haben deshalb in der vorliegenden Arbeit einen lückenlosen Aufbau der Theorie der Glieder für notwendig gehalten. Der Kürze halber mußten wir jedoch bei mehreren leicht ersichtlichen Sätzen die Beweise dem Leser überlassen. Unser Gedankengang ist von denjenigen in [7] und [9] verschieden, ist jedoch in vieler Hinsicht jenen Verfahren ähnlich, die von AYRES, WHYBURN, KURATOWSKI und anderen bei gewißen topologischen Untersuchungen angewendet wurden (s. [10] S. 64—87 und [8] Vol. II. S. 231—251.).

Die vorliegende Arbeit ist in vier Abschnitte geteilt. Im ersten (§ 1—5) erklären wir die nötigen Grundbegriffe und geben den erwähnten Aufbau der Theorie der Glieder. Im zweiten (§ 6—7) beschäftigen wir uns mit solchen Klasseneinteilungen der Punkte, die die Parität der verbindenden Wege berücksichtigen. Der dritte (§ 8—11) enthält die Untersuchungen über die trennenden Punktmengen von u-triangulierbaren Graphen. Im vierten (§ 12—14) beschäftigen wir uns mit gewißen Zerlegungen von Graphen und geben den Beweis des Hauptsatzes.

---

[4] Ein n-Eck heißt ungerade, falls n ungerade ist.

[5] In (9.1) führen wir den Begriff der normalen trennenden Punktmenge ein. Es zeigt sich, daß die normalen trennenden Punktmengen mit den relativ-minimalen trennenden Punktmengen zusammenfallen.

I. Theorie der Blöcke und Glieder

§ 1. Grundbegriffe

(1.1) Es sei M eine beliebige endliche Menge und es bezeichne $M^{(2)}$ die Menge sämtlicher ungeordneten Paare, die man aus verschiedenen Elementen von M bilden kann. Die Elemente von M nennen wir *Punkte*, diejenigen von $M^{(2)}$ *Kanten*. Die durch die Punkte[6] P und Q bestimmte Kante wollen wir mit PQ (oder QP) bezeichnen und sagen, daß P und Q die *Randpunkte* von PQ sind, PQ zu P und Q *inzident* ist oder PQ die Punkte P und Q *verbindet*. Ist N eine beliebige Teilmenge von $M^{(2)}$ ($N \subseteq M^{(2)}$) so nennen wir das geordnete Mengenpaar $\Gamma = (M, N)$ einen *Graphen*. $P \in \Gamma$ bzw. $PQ \in \Gamma$ soll bedeuten: $P \in M$ bzw. $P, Q \in M$, $P \neq Q$ und $PQ \in N$. Ist $P \in \Gamma$ und $PQ \in \Gamma$, so sagen wir: P und PQ *gehören zu* Γ, P und PQ *liegen in* (oder auf) Γ, P und Q sind *in* Γ *verbunden*. Ist $M = \varnothing$, so heißt Γ *leer* und wir schreiben $\Gamma = \varnothing$. Ist $P \in \Gamma$ und gibt es kein $Q \in \Gamma$-mit $PQ \in \Gamma$, so heißt P ein *isolierter* Punkt von Γ.

Ist Γ ein Graph, so soll $\Phi(\Gamma)$ die Menge der Punkte von Γ bedeuten. (Ist also $\Gamma = (M, N)$, so ist $M = \Phi(\Gamma)$.)

Die Anzahl der Elemente einer beliebigen Menge E werden wir mit $\nu(E)$ bezeichnen, die Anzahl der Punkte des Graphen Γ mit $\pi(\Gamma)$.

(1.2) Es seien $\Gamma_1 = (M_1, N_1)$ und $\Gamma_2 = (M_2, N_2)$ Graphen. Wir definieren die *Vereinigung* und den *Durchschnitt* von Γ_1 und Γ_2 folgendermaßen:

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = (M_1 \cup M_2, N_1 \cup N_2), \qquad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = (M_1 \cap M_2, N_1 \cap N_2).$$

Ist $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$, so heißen Γ_1 und Γ_2 (zueinander) *fremd*. Enthält $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ nur einen einzigen Punkt P, so sagen wir, daß Γ_1 und Γ_2 einander *in P berühren*.

Ist $M_1 \subseteq M_2$ und $N_1 \subseteq N_2$, so heißt Γ_1 ein *Teilgraph von* Γ_2, und wir schreiben $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$. ($\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ bedeutet: $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ und $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$.) Ist $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, so sagen wir auch, daß Γ_1 *in* Γ_2 *liegt*.

Im Falle $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ sei

$$\Gamma_2 - \Gamma_1 = \bigl(M_2 - (M_1 - M_1'),\ N_2 - N_1\bigr).$$

Dabei bedeutet M_1' die Menge derjenigen Punkte von M_1, zu denen Kanten von $N_2 - N_1$ inzident sind. ($\Gamma_2 - \Gamma_1$ besteht also aus sämtlichen nicht in Γ_1 liegenden Punkten und Kanten von Γ_2, sowie aus sämtlichen solchen Punkten von Γ_1, die Randpunkte der erwähnten Kanten sind.)

Ist $M_1 = M_2$ und $N_1 \cap N_2 = \varnothing$ sowie $N_1 \cup N_2 = M_1^{(2)}$ ($M_1^{(2)}$ ist die Menge sämtlicher ungeordneten Paare, die man aus verschiedenen Elementen von M_1 bilden kann), so heißen Γ_1 und Γ_2 zueinander *komplementär*.

(1.3) Es sei Γ ein Graph, $M = \Phi(\Gamma)$ und $E \subseteq M$, $F \subseteq M$. Wir nennen die Punkte von E kurz *E-Punkte*, jene Kanten, bei denen der eine Randpunkt ein E-Punkt, der andere ein F-Punkt ist, eine *EF-Kante*. Ist $E = \{P\}$, so bezeichnen wir die EF-Kanten auch als *PF-Kanten*.

$[E]_\Gamma$ soll den *durch E in Γ gespannten* Graphen bezeichnen. Darunter verstehen wir denjenigen *Teilgraphen* von Γ, der aus den E-Punkten und sämtlichen EE-Kanten von Γ besteht. (Kommt ein Ausdruck von der Form $[H]_\Gamma$ vor, so ist dabei immer $H \subseteq M$ vorausgesetzt.)

[6] Die Buchstaben P, Q und R, eventuell auch mit Indizes oder anderen Zeichen versehen, bezeichnen immer Punkte.

Wir führen noch die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\Gamma - E = [M - E]_\Gamma \quad \text{und} \quad \Gamma - P = [M - \{P\}]_\Gamma \qquad (P \in M).$$

Wir machen folgende Vereinbarungen: Der Buchstabe Γ, auch mit verschiedenen Indizes und anderen Zeichen versehen, soll immer einen Graphen bezeichnen. Wir lassen von den Zeichen bzw. Begriffen, die sich auf Γ (ohne Indizes und andere Zeichen) beziehen, den Index Γ bzw. die Ausdrücke »von Γ«, »in Γ«, usw. im allgemeinen weg. Diese beziehen sich also immer auf den mit Γ bezeichneten Graphen. (Z. B. $[E]$ bedeutet immer $[E]_\Gamma$.)

(1.4) Offensichtlich gelten die folgenden Behauptungen:
Sind $E, F \subseteq \Phi(\Gamma)$, so ist

(1) $$[E \cup F] \supseteq [E] \cup [F], \quad [E \cap F] = [E] \cap [F].$$

(2) Ist $\Gamma' \subseteq \Gamma$ und $E \subseteq \Phi(\Gamma')$, so ist $[E]_{\Gamma'} \subseteq [E]_\Gamma$.

(3) Ist $[E]_\Gamma \subseteq \Gamma' \subseteq \Gamma$, so ist $[E]_{\Gamma'} = [E]_\Gamma$.

(4) Ist $E \subseteq F \subseteq \Phi(\Gamma)$ und $\Gamma' = [F]_\Gamma$, so ist $[E]_{\Gamma'} = [E]_\Gamma$.

(1.5) Es sei $E \subseteq \Phi(\Gamma)$, $F \subseteq \Phi(\Gamma)$, $P \in \Phi(\Gamma)$, $E \cap F = \varnothing$ und $P \notin F$. Gibt es in Γ EF-Kanten bzw. PF-Kanten, so sagen wir, daß E *mit* F bzw. P *mit* F (oder mit $[F]$) (in Γ) *verbunden ist*. Ferner soll

$$F(E) \quad \text{bzw.} \quad F(P)$$

die Menge jener F-Punkte bezeichnen, die mit E bzw. P (in Γ) verbunden sind. Es gilt offensichtlich $F(E) = \bigcup_{Q \in E} F(Q)$.

(1.6) Wir nennen den Graphen $w = (M, N)$ einen *Weg*, wenn M aus einem einzigen Punkt P_1 besteht oder wenn man die Punkte von M derart in eine Folge $P_1, \ldots, P_n$ ($n \geqq 2$) ordnen kann, daß $N = \{P_i P_{i+1};\, i = 1, \ldots, n-1\}$ besteht. Die über w gemachten Behauptungen wollen wir kurz durch die Gleichung

$$w = (P_1 \ldots P_n) \qquad (n \geqq 1)$$

ausdrücken[7]. Demnach bedeutet (P_1) bzw. $(P_1 P_2)$ denjenigen Graphen, der aus dem Punkte P_1 bzw. aus den Punkten P_1 und P_2 und der Kante $P_1 P_2$ besteht. Ist $n > 1$, so heißt $(P_1 \ldots P_n)$ ein *echter* Weg.

Es gilt $(P_1 \ldots P_n) = (P_n \ldots P_1)$. Ist $w = (P_1 \ldots P_n)$, so heißen P_1 und P_n die *Randpunkte*, im Falle $n > 2$ $P_2, \ldots, P_{n-1}$ die *inneren* Punkte von w. Wir sagen ferner: w ist ein $P_1 P_n$-*Weg*, w *verbindet* P_1 mit P_n, P_i und P_{i+1} ($i = 1, \ldots, n-1$) liegen auf w *benachbart*; weiterhin sagen wir: P_i *liegt auf* w *näher zu* P_1 *als* P_j, falls $1 \leqq i < j \leqq n$ gilt.

Der Weg $(P_i \ldots P_j)$ $(1 \leqq i \leqq j \leqq n)$ heißt eine *Strecke* (im Falle $i < j$ eine *echte* Strecke) von $w = (P_1 \ldots P_n)$. Sind $P, P' \in w$, so bezeichnet

$$(P w P')$$

diejenige Strecke von w, deren Randpunkte P und P' sind.

---

[7] Die Bezeichnung $a_m, \ldots, a_n$ bedeutet im Falle $m = n$ das einzige Element a_m.

Unter der *Länge* eines Weges verstehen wir die Anzahl seiner Kanten. Ein Weg w heißt *gerade* oder *ungerade*, je nachdem ob die Länge von w gerade oder ungerade ist.

Ist w ein PQ-Weg und $w \subseteq \Gamma$, so sagen wir, daß w ein *Weg von* (oder in) Γ ist, der P mit Q *in* Γ *verbindet*.

Ist $E \subseteq \Phi(\Gamma)$, $F \subseteq \Phi(\Gamma)$ und w ein PQ-Weg, mit $P \in E$ und $Q \in F$, so nennen wir w auch einen PF-, EQ- und EF-*Weg*.

Die folgenden Behauptungen sind leicht beweisbar:

(1.7) *Ist* w_1 *ein* P_1P_2-*Weg*, w_2 *ein* P_2P_3-*Weg und gilt* $w_1 \cap w_2 = (P_2)$, *so ist* $w_1 \cup w_2$ *ein* P_1P_3-*Weg*.

(1.8) *Ist* w_1 *ein* P_1P_2-*Weg*, w_2 *ein* P_2P_3-*Weg, dann gibt es einen* P_1P_3-*Weg* w *mit* $w \subseteq w_1 \cup w_2$ (s. [7] S. 7.).

(1.9) Wir nennen den Graphen $v = (M, N)$ ein *Vieleck* oder n-*Eck* ($n \geqq 3$) (s. Fussnote[2]), falls man die Punkte von M derart in eine Folge $P_1, \ldots, P_n$ ordnen kann, daß $N = \{P_iP_{i+1};\ i = 1, \ldots, n;\ P_{n+1} = P_1\}$ besteht. Die über v gemachten Behauptungen wollen wir kurz durch die Gleichung

$$v = (P_1 \ldots P_n P_1)$$

ausdrücken. Wir sagen: P_i und P_{i+1} $(i = 1, \ldots, n)$ liegen *auf* v *benachbart*. Die Punkte P_i und P_j $(1 \leqq i < j \leqq n)$ zerlegen v in die Wege $(P_i \ldots P_j)$ und $(P_j \ldots P_{n+1}) \cup (P_1 \ldots P_i)$. Diese nennen wir die *durch* P_i *und* P_j *bestimmten Bogen von* v.

Ist v ein n-Eck, so heißt n die *Größe* von v. Das n-Eck heißt *gerade* oder *ungerade*, je nachdem ob n gerade oder ungerade ist.

Ist v ein Vieleck und gilt $v \subseteq \Gamma$, so sagen wir, daß v ein Vieleck von (oder in) Γ ist.

(1.10) Γ heißt *zusammenhängend*, wenn zu je zwei Punkten P und Q von Γ ein in Γ liegender PQ-Weg existiert. (Im Falle $\pi(\Gamma) \leqq 1$ ist Γ zusammenhängend.) Die maximalen zusammenhängenden Teilgraphen von Γ sind die *Komponenten* von Γ.

Die folgenden Behauptungen sind leicht ersichtlich:

(1.11) *Ist* Γ_1 *eine Komponente von* Γ *und* $P, Q \in \Gamma_1$ *so liegt jeder* PQ-*Weg von* Γ *in* Γ_1. (s. [7], S. 14.)

(1.12) *Ist* Γ *zusammenhängend*, $\Phi(\Gamma) = M$, $\varnothing \neq E \subset M$ *und* $F = M - E$, *so ist* E *mit* F *in* Γ *verbunden*.

(1.13) *Sind* Γ_i $(i = 0, 1, \ldots, n;\ n \geqq 1)$ *zusammenhängende Graphen und gilt* $\Gamma_0 \cap \Gamma_i \neq \varnothing$ $(i = 1, \ldots, n)$, *so ist auch* $\bigcup_{i=0}^{n} \Gamma_i$ *zusammenhängend*.

(1.14) *Sind* Γ_i $(i = 1, \ldots, n;\ n \geqq 2)$ *nichtleere Graphen, und ist* $\bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i$ *zusammenhängend, so gibt es zu ein jedes* $i\,(1 \leqq i \leqq n)$ *ein* $j \neq i$ $(1 \leqq j \leqq n)$ *mit* $\Gamma_i \cap \Gamma_j \neq \varnothing$.

Der Punkt P heißt ein *trennender* Punkt des zusammenhängenden Graphen Γ, falls $P \in \Gamma$ und $\Gamma - P$ nicht zusammenhängend ist.

(1.15) Γ heißt *vollständig*, wenn je zwei Punkte von Γ durch eine Kante von Γ verbunden sind. (Im Falle $\pi(\Gamma) \leqq 1$ ist Γ vollständig.)

Sind E, $F \subseteq \Phi(\Gamma)$ mit $E \cap F = \varnothing$ und ist jeder E-Punkt mit jedem F-Punkt in Γ (durch eine Kante) verbunden, oder ist eine der Mengen E und F leer. so sagen wir, daß E und F (in Γ) *vollständing verbunden* sind (oder daß

E mit F (in Γ) vollständig verbunden ist). Ist $P \notin F$ mit jedem F-Punkt in Γ verbunden, so sagen wir, daß P mit F in Γ *vollständig verbunden* ist.

(1.16) Es sei E eine beliebige Menge. Besteht die Menge $z = \{E_1, \ldots, E_n\}$ ($n \geqq 1$) aus paarweise fremden Teilmengen von E und gilt $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E$, so nennen wir z eine *Zerlegung von* E.

Ist $\Phi(\Gamma) = M$ und gibt es eine solche Zerlegung $z = \{M_1, M_2\}$ von M, daß Γ keine M_iM_i-Kanten ($i = 1,2$) enthält, so heißt Γ ein *paarer* Graph, z eine *zu* Γ *gehörige Zerlegung*. M_1 und M_2 heißen die *Punktklassen* dieser Zerlegung.

Es gelten die folgenden leicht beweisbaren Behauptungen:

(1.17) *Ist* Γ *ein paarer Graph und* $\{M_1, M_2\}$ *eine zu* Γ *gehörige Zerlegung, so ist jeder* M_1M_2-*Weg von* Γ *ungerade, jeder* M_iM_i-*Weg* ($i = 1,2$) *von* Γ *gerade.*

(1.18) *Ist* Γ *ein zusammenhängender paarer Graph, so gibt es nur eine einzige zu* Γ *gehörige Zerlegung.*

Wegen (1.18) werden wir bei zusammenhängenden paaren Graphen die Punktklassen der zu Γ gehörigen Zerlegung einfach als *die Punktklassen von* Γ bezeichnen. (Ist $\Gamma = \emptyset$, so sind beide, ist $\pi(\Gamma) = 1$, so ist die eine Punktklasse von Γ leer.)

(1.19) Γ *ist dann und nur dann ein paarer Graph, falls jedes Vieleck von* Γ *gerade ist.* (S. [7], S. 151.)

(1.20) Es sei $\Phi(\Gamma) = M$. Existiert eine solche Zerlegung $\{M_1, \ldots, M_n\}$ von M, daß jeder M_i-Punkt mit jedem M_j-Punkt ($i \neq j$; $i, j = 1, \ldots, n$) durch eine Kante von Γ verbunden ist, Γ jedoch keine M_iM_i-Kanten ($i = 1, \ldots, n$) enthält, so nennen wir Γ einen *vollständig-chromatischen* Graphen. (Ist $\pi(\Gamma) \leqq 2$, so ist Γ vollständig-chromatisch.) Ist Γ vollständig-chromatisch und nicht leer, so gibt es nur eine solche Zerlegung $\{M_1, \ldots, M_n\}$ von M, die den erwähnten Bedingungen genügt und dabei $M_1, \ldots, M_n$ sämtlich nicht leer sind. Diese $M_1, \ldots, M_n$ heißen die *Punktklassen von* Γ (oder M).

Wir wollen die Beweise der folgenden einfachen Behauptungen dem Leser überlassen:

(1.21) *Ist* Γ *vollständig-chromatisch und* $E \subseteq \Phi(\Gamma)$, *so ist* $[E]$ *ebenfalls vollständig-chromatisch.*

(1.22) Γ *ist dann und nur dann vollständig-chromatisch, wenn jede Komponente des zu* Γ *komplementären Graphen vollständig ist.*

(1.23) Γ *ist dann und nur dann vollständig-chromatisch, wenn für je drei Punkte* P_1, P_2, P_3 *von* Γ *aus* $P_1P_2 \notin \Gamma$ *und* $P_2P_3 \notin \Gamma$ *die Behauptung* $P_1P_3 \notin \Gamma$ *folgt.*

§ 2. Teilgraphen, die durch Vereinigung gewißer Wege entstehen

(2.1) **Definitionen.** Es seinen E, $F \subseteq \Phi(\Gamma)$. Denjenigen Teilgraphen von Γ, der durch die Vereinigung sämtlicher EF-Wege von Γ entsteht, werden wir mit

$$[E \sim F]_\Gamma,$$

die Menge der Punkte dieses Teilgraphen mit

$$\{E \sim F\}_\Gamma$$

bezeichnen. (Entsprechend der unter (1.3) gemachten Verabredung, werden wir den Index Γ im allgemeinen weglassen.) Ist $E = \{P\}$, so sei $[P \sim F] = [E \sim F]$. $[P \sim Q]$ bedeutet also denjenigen Teilgraphen von Γ, der durch die Vereinigung sämtlicher PQ-Wege von Γ entsteht. (Es gilt $[P \sim P] = (P)$.)

(2.2) Die folgenden Behauptungen sind einfache Folgen der Definitionen:

(1) Ist $\Gamma' \subseteq \Gamma$ und sind $E, F \subseteq \Phi(\Gamma')$, so gilt $[E \sim F]_{\Gamma'} \subseteq [E \sim F]_\Gamma$.

Sind $E, F, E_1, E_2 \subseteq \Phi(\Gamma)$ und ist $E \subseteq F$, so gelten

(2) $$[(E_1 \cup E_2) \sim F] = [E_1 \sim F] \cup [E_2 \sim F],$$

(3) $$[(E_1 \cap E_2) \sim F] \subseteq [E_1 \sim F] \cap [E_2 \sim F],$$

(4) $$[E] \subseteq [E \sim E],$$

(5) $$[E \sim E_1] \subseteq [F \sim E_1] \quad \text{und} \quad [E \sim E] \subseteq [F \sim F].$$

Für die Mengen der Punkte der in (1) – (5) vorkommenden Graphen bestehen entsprechende Behauptungen.

(2.3) *Es sei* $E \subseteq \Phi(\Gamma)$ *und* $F = \{E \sim E\}$. *Dann ist* $\{F \sim F\} = F$.

Beweis. Wir müssen zeigen: Sind $P_1, P_2 \in F$, so gehören sämtliche Punkte eines beliebigen P_1P_2-Weges von Γ zu F.

1) Wir zeigen erst, daß wenn $P \in F$ und $E' = E \cup \{P\}$ ist, so $\{E' \sim E'\} = F$ besteht. Es sei $P \notin E$, $Q \in E$, w ein PQ-Weg von Γ und $R \in w$. Wir beweisen, daß ein EE-Weg $\tilde{w}$ von Γ mit $R \in \tilde{w}$ existiert. Es gibt einen Q_1Q_2-Weg w' mit $Q_1, Q_2 \in E$ und $P \in w'$. Es ist $Q_1 \neq Q_2$. Ist $R \in w'$, so kann man $\tilde{w} = w'$ setzen. Es sei $R \notin w'$ und P' derjenige Punkt von $w' \cap (RwP)$, der auf (RwP) R am nächsten liegt. Dann gilt $w' \cap (RwP') = (P')$. Ist nun $w' \cap (RwQ) = \varnothing$, so kann man $\tilde{w} = (Q_1w'P') \cup (P'wQ)$ setzen. Ist $w' \cap (RwQ) \neq \varnothing$, so sei P'' derjenige Punkt von $w' \cap (RwQ)$, der auf (RwQ) R am nächsten liegt. Es gilt jetzt $P' \neq P''$, $R \in (P'wP'')$ und w' enthält von $(P'wP'')$ nur die Punkte P' und P''. Wir dürfen annehmen, daß $P' \in (Q_1w'P'')$ ist. Dann ist $\tilde{w} = (Q_1w'P') \cup (P'wP'') \cup (P''w'Q_2)$ ein gesuchter Weg.

2) Es seien nun $P_1, P_2 \in \Gamma$, $E \cup \{P_1\} = E_1$ und $E_1 \cup \{P_2\} = E_2$. Nach 1) gilt $\{E_1 \sim E_1\} = F$. Daraus folgt, bei nochmaliger Anwendung von 1), $\{E_2 \sim E_2\} = F$. Dies ist jedoch mit der zu beweisenden Behauptung gleichwertig.

(2.4) *Es sei* $E \subseteq \Phi(\Gamma)$ *und* $F = \{E \sim E\}$. *Dann ist* $[F \sim F] = [E \sim E] = [F]$.

Beweis. Nach (2.3) genügt es zu zeigen, daß eine jede Kante von $[F]$ auf einem EE-Weg von Γ liegt. Es sei $PQ \in [F]$. Wir »zerlegen« die Kante PQ durch einen neuen Punkt R^* in zwei Teile. Genauer gesagt, wir konstruieren aus Γ einen Graphen Γ^* in folgender Weise: Wir lassen von Γ die Kante PQ weg und nehmen den neuen Punkt R^*, sowie die neuen Kanten PR^* und R^*Q hinzu. Ein Weg von Γ, der PQ nicht enthält, ist ein solcher Weg von Γ^*, der R^* nicht enthält, und umgekehrt. Läßt man von einem Weg von Γ, der PQ enthält, PQ weg und nimmt man R^* sowie PR^* und R^*Q hinzu, so erhält man einen solchen Weg von Γ^*, in dem R^* ein innerer Punkt ist, und umgekehrt. In dieser Weise entsteht zwischen sämtlichen Wegen von Γ und denjenigen von Γ^*, die R^* nicht als Randpunkt enthalten, eine eineindeutige Beziehung. Daraus folgt

$$F = \{E \sim E\}_\Gamma \subseteq \{E \sim E\}_{\Gamma^*} = F^*.$$

Es gilt also $P,Q \in F^*$, und daher ist (PR^*Q) ein F^*F^*-Weg von Γ^*. Dann ist nach (2.3) $R^* \in F^*$. Es gibt also einen EE-Weg w^* von Γ^* mit $R^* \in w^*$. R^* ist ein innerer Punkt von w^*, und demzufolge ist der zu w^* gehörige Weg in Γ ein EE-Weg, der PQ enthält.

(2.5) *Es sei Γ zusammenhängend und es seien E_1 und E_2 nichtleere Teilmengen von $\Phi(\Gamma)$. Dann gilt für $E = E_1 \cup E_2$*

$$[E \sim E] = [E_1 \sim E_2].$$

Beweis. Wir müssen zeigen: Die Punkte und Kanten der E_iE_i-Wege ($i = 1,2$) von Γ liegen auf E_1E_2-Wegen. Es sei z. B. w ein PQ-Weg mit $P,Q \in E_1$ und es sei $R \in E_2$. Es gibt in Γ einen RP-Weg w_0. Es sei R_1 derjenige Punkt von $w \cap w_0$, der auf w_0 R am nächsten liegt. Dann ist $w \cap (Rw_0R_1) = (R_1)$. Die Wege $w_1 = (PwR_1) \cup (R_1w_0R)$ und $w_2 = (QwR_1) \cup (R_1w_0R)$ sind E_1E_2-Wege und es gilt $w \subseteq w_1 \cup w_2$.

Aus (2.4) und (2.5) bekommen wir die Behauptungen:

(2.6) *Ist Γ zusammenhängend und E_1 und E_2 nichtleere Teilmengen von $\Phi(\Gamma)$, so ist $[E_1 \sim E_2]$ ein solcher Teilgraph von Γ, der durch eine Teilmenge von $\Phi(\Gamma)$ gespannt wird.*

(2.7) *Ist Γ zusammenhängend und $E_1, E_2 \subseteq \Phi(\Gamma)$, so ist auch $[E_1 \sim E_2]$ zusammenhängend.*

(2.8) *Es sei Γ zusammenhängend $E_1 \subseteq \Phi(\Gamma)$, $E_2 \subseteq \Phi(\Gamma)$ und $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$. Dann gilt für $E = E_1 \cup E_2$*

$$[E \sim E] = [E_1 \sim E_1] \cup [E_2 \sim E_2].$$

Beweis. Wir müssen zeigen: Die Punkte und Kanten der E_1E_2-Wege von Γ liegen auf E_1E_1-oder auf E_2E_2-Wegen. Es sei w ein P_1P_2-Weg mit $P_1 \in E_1$ und $P_2 \in E_2$. Ferner sei $R \in E_1 \cap E_2$ und w' ein RP_1-Weg. Es sei R' derjenige Punkt von $w \cap w'$ der auf w' R am nächsten liegt. Dann ist $w \cap (Rw'R') = (R')$, $w_i = (Rw'R') \cup (R'wP_i)$ ein E_iE_i-Weg ($i = 1,2$) und $w \subseteq w_1 \cup w_2$.

§ 3. Blöcke

(3.1) **Definition.** Wir nennen den Teilgraphen Γ' des zusammenhängenden Graphen Γ einen *Block* von Γ, wenn Γ' folgende Eigenschaften besitzt:

1) $\pi(\Gamma') > 1$.

2) Sind $P,Q \in \Gamma'$, so liegt jeder PQ-Weg von Γ in Γ'.

Ist $\pi(\Gamma) \leqq 1$, so nennen wir Γ selbst einen Block von Γ. Ist Γ nicht zusammenhängend, dann verstehen wir unter den Blöcken von Γ die Blöcke der Komponenten von Γ.

Nach unserer Definition sind die Komponenten von Γ Blöcke von Γ und falls ein Block nur aus einem einzigen Punkt besteht, so ist dieser Punkt ein isolierter Punkt von Γ.

Ist $\Phi(\Gamma') = B$, so ist die Bedingung 2) mit

$$\Gamma' = [B] = [B \sim B]$$

gleichwertig. Ferner gilt:

(3.2) *Ist* $[B]$ *ein Block von* Γ *und sind* $E, F \subseteq B$, *so ist* $[E \sim F] \subseteq [B]$.
Nach (2.7) ist jeder Block ein zusammenhängender Graph.
Aus (2.5) und (2.4) bekommt man:

(3.3) *Ist* Γ *zusammenhängend und sind* E_1 *und* E_2 *nichtleere Teilmengen von* $\Phi(\Gamma)$ *mit* $\nu(E_1 \cap E_2) > 1$, *so ist* $[E_1 \sim E_2]$ *ein Block von* Γ.

(3.4) *Sind* P *und* Q *verschiedene Punkte der selben Komponente von* Γ, *so ist* $[P \sim Q]$ *ein Block von* Γ.

Die folgenden Behauptungen sind leicht ersichtlich:

(3.5) *Ist* Γ'' *ein Block von* Γ', Γ' *ein Block von* Γ, *so ist auch* Γ'' *ein Block von* Γ.

(3.6) *Ist* $[B]$ *ein Block von* Γ *und* $[B] \subseteq \Gamma' \subseteq \Gamma$, *so ist* $[B]$ *auch ein Block von* Γ'.

(3.7) *Es seien* Γ_1 *und* Γ_2 *zusammenhängende Graphen mit* $\pi(\Gamma_1) > 1$, $\pi(\Gamma_2) > 1$ *und* $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = (R)$. *Dann sind* Γ_1 *und* Γ_2 *Blöcke von* $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$.

Beweis. Nach (1.13) ist Γ zusammenhängend. Es genügt zu zeigen: Sind $P_1, P_2 \in \Gamma_1$ und ist w ein P_1P_2-Weg von Γ, so ist $w \subseteq \Gamma_1$. Nehmen wir das Gegenteil an und es sei $Q \in w$ und $Q \notin \Gamma_1$. Es sei Q_i $(i = 1,2)$ derjenige Punkt von $\Gamma_1 \cap (QwP_i)$, der auf (QwP_i) Q am nächsten liegt und Q_i' $(i = 1,2)$ derjenige Punkt, für den $Q_iQ_i' \in (QwQ_i)$ besteht. Es gilt dann $Q_1 \neq Q_2$ und $Q_i' \notin \Gamma_1$ $(i = 1,2)$. Daher ist $Q_iQ_i' \notin \Gamma_1$, und so muß $Q_iQ_i' \in \Gamma_2$ bestehen. Daraus bekommen wir den Widerspruch $Q_i = R$ $(i = 1,2)$.

Aus (1.13), (3.5) und (3.7) folgt durch Induktion

(3.8) *Es sei* Γ_i *zusammenhängend*, $\pi(\Gamma_i) > 1$ $(i = 0,1,\ldots, n;\ n \geqq 1)$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_i = (R_i)$ $(i = 1,\ldots, n)$ *und* $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing$ $(i \neq j;\ i,j = 1,\ldots, n)$. *Dann sind* $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ *Blöcke von* $\bigcup\limits_{i=0}^{n} \Gamma_i$.

(3.9) *Es seien* $[B_1]$ *und* $[B_2]$ *Blöcke von* Γ *und es sei* $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$. *Dann ist auch* $[B_1] \cup [B_2]$ *ein Block von* Γ *und es gilt* $[B_1 \cup B_2] = [B_1] \cup [B_2]$.

Beweis. Ist $\nu(B_i) = 1$ ($i = 1$ oder 2), so ist die Behauptung trivial. Es sei $\nu(B_1) > 1$, $\nu(B_2) > 1$, und $B = B_1 \cup B_2$. $[B_1]$ und $[B_2]$ sind Blöcke von derselben Komponente von Γ. Daher gilt nach (2.2) (4), (2.8) und (1.4) (1)

$$[B] \subseteq [B \sim B] = [B_1 \sim B_1] \cup [B_2 \sim B_2] = [B_1] \cup [B_2] \subseteq [B]\ .$$

Daraus folgt unsere Behauptung.

Aus (1.14) und (3.9) folgt durch Induktion

(3.10) *Sind* $[B_1], \ldots, [B_n]$ $(n \geqq 1)$ *Blöcke von* Γ *und ist* $\Gamma' = \bigcup\limits_{i=1}^{n} [B_i]$ *zusammenhängend, so ist auch* Γ' *ein Block von* Γ *und es gilt mit* $B = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$ *die Behauptung* $\Gamma' = [B]$.

(3.11) *Es seien* $[B_1]$ *und* $[B_2]$ *Blöcke von* Γ *und es sei* $\nu(B_1 \cap B_2) \geqq 2$. *Dann ist auch* $[B_1] \cap [B_2]$ *ein Block von* Γ.

Beweis. Es sei $B = B_1 \cap B_2$. $[B_1]$ und $[B_2]$ sind Blöcke von derselben Komponente von Γ. Es gilt nach (2.2) (3), (4) und (1.4) (1)

$$[B] \subseteq [B \sim B] \subseteq [B_1 \sim B_1] \cap [B_2 \sim B_2] = [B_1] \cap [B_2] = [B].$$

Unter Beachtung von $\nu(B_1 \cap B_2) \geq 2$ folgt daraus die Behauptung.

(3.12) *Es sei $[B]$ ein Block und w ein Weg von Γ und es gelte $w \cap [B] \neq \emptyset$. Dann ist $w \cap [B]$ eine Strecke von w.*

Beweis. Es sei w ein PQ-Weg und P' bzw. Q' derjenige Punkt von $w \cap [B]$' der auf w P bzw. Q am nächsten liegt. Es ist dann $w' = (P'wQ')$ ein BB-Weg und es gilt $w \cap [B] \subseteq w' \subseteq w \cap [B \sim B] = w \cap [B]$.

(3.13) **Definition.** Ist $[B]$ ein Block und w ein Weg von Γ und enthält w mindestens zwei B-Punkte, so sagen wir, daß w durch $[B]$ *geht*. Geht w durch $[B]$, so ist $w \cap [B]$ eine *echte* Strecke von w.

(3.14) *Es seien $[B_1]$ und $[B_2]$ Blöcke von Γ und es sei $B_1 \cap B_2 = \{R\}$. Dann enthält jeder B_1B_2-Weg von Γ den Punkt R. Ist ferner Γ zusammenhängend mit $\pi(\Gamma) > 1$, so ist R ein trennender Punkt von Γ.*

Beweis. Es sei w ein B_1B_2-Weg von Γ. Nach (3.9) ist $w \subseteq [B_1] \cup [B_2]$. Da $w_i = w \cap [B_i] \neq \emptyset$ gilt, ist w_i eine Strecke von w ($i = 1,2$) und es gilt $w = w_1 \cup w_2$, $w_1 \cap w_2 = (R)$.

Ist Γ zusammenhängend und $\pi(\Gamma) > 1$, so ist $\nu(B_i) > 1$ ($i = 1,2$). $\Gamma - R$ enthält daher B_i-Punkte ($i = 1,2$), kann jedoch keinen B_1B_2-Weg enthalten. $\Gamma - R$ ist also nicht zusammenhängend.

§ 4. Glieder

(4.1) **Definition.** Die minimalen Blöcke von Γ heißen die *Glieder* von Γ. (Ein Glied von Γ ist also ein solcher Block von Γ, der keinen Block von Γ als echten Teilgraph enthält.)

Laut (3.5) und (3.6) besteht:

(4.2) *Ist Γ'' ein Glied von Γ', und Γ' ein Block von Γ, so ist Γ'' ein Glied von Γ.*

(4.3) *Ist $[A]$ ein Glied von Γ und gilt $[A] \subseteq \Gamma' \subseteq \Gamma$, so ist $[A]$ auch ein Glied von Γ'.*

Aus (4.2) und (4.3) folgt:

(4.4) *Die Behauptungen: »Das Glied $[A]$ von Γ liegt im Block $[B]$ von Γ« und »$[A]$ ist ein Glied des Blockes $[B]$ von Γ« sind gleichwertig.*

Laut (3.11) gilt:

(4.5) *Ist $[A]$ ein Glied, $[B]$ ein Block von Γ, so besteht einer der folgenden Behauptungen :*

$$[A] \cap [B] = \emptyset, \quad [A] \cap [B] = (P), \quad [A] \cap [B] = [A].$$

Nach (4.5) gilt

(4.6) *Zwei Glieder eines Graphen können höchstens einen Punkt gemeinsam haben.*

Aus (3.2), (3.4) und (4.6) folgt

(4.7) *Sind P und Q verschiedene Punkte des Gliedes $[A]$ von Γ, so gilt*

$$[P \sim Q] = [A].$$

(4.8) *Jede Kante von Γ ist genau in einem Glied von Γ enthalten.*

Beweis. Es sei $PQ \in \Gamma$. Nach (3.4) ist $[P \sim Q]$ ein Block von Γ. Es sei $[A]$ ein Glied von $[P \sim Q]$. Wir zeigen, daß $PQ \in [A]$ ist. $[A]$ enthält Kanten. Es sei $P'Q' \in [A]$. Im Falle $P'Q' = PQ$ ist nichts zu beweisen. Es sei $P'Q' \neq PQ$. Es gibt einen solchen PQ-Weg w in Γ, der $P'Q'$ enthält. $v = w \cup (PQ)$ ist ein Vieleck, und daher ist $v - (P'Q')$ ein solcher $P'Q'$-Weg, der PQ enthält. Daraus folgt nach (4.7) $PQ \in [P' \sim Q'] = [A]$.

Aus (4.6) folgt, daß PQ nicht in zwei Gliedern liegen kann.

(4.8) ergibt unter Beachtung von (4.4)

(4.9) *Jeder Graph ist die Vereinigung seiner Glieder. Ein Block $[B]$ des Graphen Γ ist die Vereinigung der in $[B]$ liegenden Glieder von Γ.*

Aus (3.14) bekommen wir

(4.10) *Liegt P in mindestens zwei Gliedern des zusammenhängenden Graphen Γ, so ist P ein trennender Punkt von Γ.*

(4.11) *Liegt P in nur einem Glied des zusammenhängenden Graphen Γ, so ist P kein trennender Punkt von Γ.*

Beweis. Nehmen wir an, daß $\Gamma' = \Gamma - P$ nicht zusammenhängend ist. Es seien $[K]$ und $[K']$ zwei Komponenten von Γ' und es sei $Q \in K$, $Q' \in K'$ und w ein QQ'-Weg von Γ. Es besteht $P \in w$. Bezeichnen PR und PR' die zu P inzidenten Kanten von w. Man kann $R \in K$ und $R' \in K'$ annehmen. Ist $[A]$ das einzige Glied von Γ, das P enthält, so enthält $[A]$ auch PR und PR'. Nach (4.7) gibt es einen solchen PR-Weg w' in $[A]$, der R' enthält, und dies ergibt $(Rw'R') \subseteq \Gamma'$. Das widerspricht jedoch unseren Annahmen.

Nach (4.10) und (4.11) gilt:

(4.12) *Jeder Punkt des zusammenhängenden Graphen Γ ist entweder ein trennender Punkt oder liegt er in genau einem Glied von Γ.*

(4.13) *Enthält der zusammenhängende Graph Γ mindestens zwei Glieder, so enthält jedes Glied von Γ trennende Punkte von Γ.*

Beweis. Es sei $[A]$ ein Glied von Γ und $E = \Phi(\Gamma) - A$. Nach (1.12) existieren AE-Kanten in Γ. Ist PQ eine AE-Kante mit $P \in A$, so liegt PQ in einem von $[A]$ verschiedenen Glied von Γ. Nach (4.10) ist dann P ein trennender Punkt von Γ.

(4.14) *Je zwei Kanten eines Gliedes $[A]$ von Γ liegen in einem Vieleck von $[A]$.*

Beweis. Es seien PQ und $P'Q'$ verschiedene Kanten von $[A]$. Nach (4.7) gibt es einen PQ-Weg w von $[A]$, der $P'Q'$ enthält. Dann ist $w \cup (PQ)$ ein gesuchtes Vieleck.

(4.15) *Jedes Vieleck von Γ liegt in einem Glied von Γ.*

Beweis. Es sei v ein Vieleck von Γ, $PQ \in v$ und $[A]$ jenes Glied von Γ, das PQ enthält. $w = v - (PQ)$ ist ein PQ-Weg. Nach (4.7) ist $w \subseteq [A]$, und daraus folgt $v \subseteq [A]$.

(4.16) **Definition.** Γ heißt zweifach zusammenhängend, falls $\pi(\Gamma) > 1$ ist und je zwei Punkte von Γ in einem Vieleck von Γ liegen.

Aus (4.14) bzw. (4.13) und (3.14) sieht man:

(4.17) *Jedes Glied, das mehr als zwei Punkte enthält, ist ein zweifach zusammenhängender Graph. Ist Γ zweifach zusammenhängend, so ist Γ selbst ein Glied von Γ.*

Die nachstehenden beiden Sätze über Blöcke haben im folgenden wichtige Anwendungen.

(4.18) *Es sei Γ zusammenhängend, $\emptyset \neq B \subset \Phi(\Gamma)$ und im Falle $\nu(B) > 1$ $[B]$ ein Block von Γ. Dann sind die Komponenten von $\Gamma - [B]$ Blöcke von Γ, die $[B]$ in verschiedenen Punkten berühren.*

Beweis. Im Falle $\nu(B) = 1$ ist die Behauptung trivial. Es sei $\nu(B) > 1$ und es seien $[K_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$ die Komponenten von $\Gamma' = \Gamma - [B]$ und $P \in K_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$. Es existiert eine zu P inzidente Kante PQ von Γ'. Dies folgt im Falle $P \in B$ schon aus der Definition von Γ' (s. (1.2)), im Falle $P \notin B$ muß man noch in Betracht nehmen, daß Γ zusammenhängend ist. Es sei $[A]$ jenes Glied von Γ, das PQ enthält. Dann ist nach (4.5) $[A] \subseteq \Gamma'$, und demzufolge gilt auch $[A] \subseteq [K_i]$. $[K_i]$ ist daher die Vereinigung derjenigen Glieder von Γ, die Kanten von $[K_i]$ enthalten. Nach (3.10) ist also $[K_i]$ ein Block von Γ. Laut (3.11) gilt weiter $K_i \cap B = \{R_i\}$. Die Punkte $R_1, \ldots, R_n$ sind offensichtlich verschieden.

(4.19) *Es sei Γ zusammenhängend, $\Phi(\Gamma) = M$, $\emptyset \neq L \subset M$, $M' = M - L$ und es seien $[K_i]$ $(i = 1, \ldots, n;\ n \geqq 1)$ die Komponenten von $\Gamma' = [M']$. Ferner sei $B_i \subseteq K_i$ und im Falle $\nu(B_i) > 1$ $[B_i]$ ein Block von $[K_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$. Endlich soll jede LK_i-Kante von Γ eine LB_i-Kante sein $(i = 1, \ldots, n)$, und es sei $B' = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, $B_0 = L \cup B'$ gesetzt. Dann ist $[B_0]$ ein Block von Γ.*

Beweis. Ist $B' = M'$, so ist die Behauptung trivial. Ist $B' \subset M'$, so befriedigen nach (4.18) die nichtleeren Komponenten von $[K_i] - [B_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$ zusammen mit $[B_0]$ die Bedingungen von (3.8). Daraus folgt unsere Behauptung.

§ 5. Der Gliedgraph

In diesem Paragraphen sei Γ ein zusammenhängender Graph, $[A_1], \ldots, [A_m]$ $(m \geqq 1)$ seien die Glieder, und im Falle $m > 1$ seien $R_1, \ldots, R_n$ $(n \geqq 1)$ die trennenden Punkte von Γ.

(5.1) **Definitionen.** Ordnen wir, falls $\Gamma \neq \emptyset$ ist, einem jeden Glied $[A_i]$ einen nicht in Γ liegenden Punkt S_i zu $(i = 1, \ldots, m)$. Dann verstehen wir unter dem *Gliedgraphen von Γ* den folgenden Graphen $\Gamma^* = (M^*, N^*)$:

Im Falle $m > 1$ ist $M^* = M_s \cup M_r$ mit $M_s = \{S_1, \ldots, S_m\}$ und $M_r = \{R_1, \ldots, R_n\}$. Ferner enthält N^* nur $M_s M_r$-Kanten, und zwar gilt $S_i R_j \in N^*$ $(1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n)$ dann und nur dann, wenn $R_j \in A_i$ ist.

Im Falle $m = 1$, $\Gamma \neq \emptyset$ ist $M^* = \{S_1\}$, $N^* = \emptyset$. Endlich, falls $\Gamma = \emptyset$ ist, ist $\Gamma^* = \emptyset$.

Wir wollen einem jeden Punkt $P \in \Gamma$ einen Punkt P^* von Γ^* folgendermaßen zuordnen: Ist P kein trennender Punkt und liegt er in $[A_i]$ $(1 \leqq i \leqq m)$, so sei $P^* = S_i$. Ist $P = R_j$ $(1 \leqq j \leqq n)$, so sei $P^* = R_j$.

(5.2) *Man kann einem jeden Weg w von Γ einen Weg w^* von Γ^* mit den folgenden Eigenschaften zuordnen :*

1) *Ist w ein PQ-Weg, so ist w^* ein P^*Q^*-Weg.*

2) *Sämtliche M_r-Punkte von w^* liegen auch in w, und zwar in der selben Reihenfolge wie in w^*.*

3) *Ist $\pi(w) > 1$, so enthält w^* M_s-Punkte, und zwar entsprechen diese — auch in ihrer Reihenfolge — genau denjenigen Gliedern von Γ, durch die der Weg w geht* (s. (3.13)).

Beweis. Ist $w = (P)$, so kann man $w^* = (P^*)$ setzen.

Es sei $\pi(w) > 1$, w ein PQ-Weg und es seien $[A_{j_i}]$ $(i = 1, \ldots, l)$ diejenigen Glieder, durch die w geht, und zwar soll man diese Glieder, auf w von P nach Q laufend, in der angegebenen Reihenfolge treffen. Nach (3.12) ist w in die echten Strecken $w_i = w \cap [A_{j_i}]$ zerlegt. Ist $w_i \cap w_{i+1} = (R_{h_i})$ $(i = 1, \ldots, l-1)$, so ist

$$\widetilde{w} = (S_{j_1} R_{h_1} S_{j_2} \ldots S_{j_{l-1}} R_{h_{l-1}} S_{j_l})$$

ein Weg von Γ^*.

Wir definieren weiterhin die Wege $\widetilde{w}_P$ und $\widetilde{w}_Q$ in Γ^*. Ist P kein trennender Punkt von Γ, so ist $P^* = S_{j_1}$ und dann sei $\widetilde{w}_P = (P^*)$. Ist P ein trennender Punkt von Γ, so sei $\widetilde{w}_P = (P^* S_{j_1})$. Ähnlicherweise lautet die Definition von $\widetilde{w}_Q$. Es folgt nun aus den vorangehenden, daß

$$w^* = \widetilde{w}_P \cup \widetilde{w} \cup \widetilde{w}_Q$$

ein gesuchter Weg von Γ^* ist.

Aus (1.8), (4.13), (5.2) folgt die Behauptung:

(5.3) *Γ^* ist zusammenhängend.*

(5.4) *Γ^* enthält kein Vieleck.*

Beweis. Nehmen wir an, daß $v^* = (R_{j_1} S_{h_1} R_{j_2} \ldots R_{j_l} S_{h_l} R_{j_1})$ $(l \geq 2)$ ein Vieleck von Γ^* ist, und zwar soll v^* von minimaler Größe sein. Ferner sei w_i ein $R_{j_i} R_{j_{i+1}}$-Weg von Γ $(i = 1, \ldots, l; j_{l+1} = j_1)$. w_i liegt, zusammen mit R_{j_i} und $R_{j_{i+1}}$, in $[A_{h_i}]$ $(i = 1, \ldots, l)$. Aus der Definition von v^* folgt, daß in der Folge $[A_{h_1}], \ldots, [A_{h_l}], [A_{h_1}]$ nur die benachbarten Glieder gemeinsame Punkte enthalten. Daher ist $v = \bigcup_{i=1}^{l} w_i$ ein Vieleck von Γ. Dies widerspricht jedoch (4.15).

Nach (5.3) und (5.4) folgt (s. [7], S. 47.)die Behauptung:

(5.5) *Γ^* ist ein Baum.*

(5.6) *Sind $P, Q \in \Gamma$ $(P \neq Q)$, so geht jeder PQ-Weg von Γ durch jedes Glied des Blockes $[P \sim Q]$, und zwar in der gleichen Reihenfolge. Trifft man von P nach Q gehend die Glieder $[A_{j_1}], \ldots, [A_{j_l}]$ $(l \geq 1)$ und zwar in dieser Reihenfolge, so ist $\bigcup_{i=1}^{l} [A_{j_i}] = [P \sim Q]$ und es berühren sich die benachbarten Glieder dieser Folge, die nicht benachbarten sind jedoch zueinander fremd.*

Beweis. Es sei w ein PQ-Weg von Γ und w^* ein nach (5.2) existierender, zu w gehöriger P^*Q^*-Weg. Da Γ^* ein Baum ist, gibt es in Γ^* genau einen P^*Q^*-Weg (s. [7], S. 48.). Die Punkte P und Q bestimmen also eindeutig w^*. Daraus folgt nach (5.2) daß sämtliche PQ-Wege von Γ genau durch diejenigen

Glieder von Γ gehen, die den M_s-Punkten von w^* entsprechen, und zwar in der gleichen Reihenfolge, wie diese Punkte auf w^* liegen. Daher liegt $[P \sim Q]$ in der Vereinigung dieser Glieder. Anderseits enthält jedes $[A_{j_i}]$ $(i = 1, \ldots, l)$ eine Kante von $[P \sim Q]$, und so gilt nach (4.5) $\bigcup_{i=1}^{l} [A_{j_i}] \subseteq [P \sim Q]$. Endlich folgt aus (5.2) bzw. (5.4), daß $[A_{j_i}]$ und $[A_{j_{i+1}}]$ $(i = 1, \ldots, l-1)$ sich berühren bzw. $[A_{j_i}] \cap [A_{j_g}] = \emptyset$ $(|i-g| > 1;\ i, g = 1, \ldots, l)$ gilt.

II. Klasseneinteilung von Punkten auf Grund der Parität der verbindenden Wege

§ 6. Gerade und ungerade Blöcke

In diesem Paragraphen bezeichne Γ einen zusammenhängenden Graphen.

(6.1) *Es seien $P_1, P_2, P_3 \in \Gamma$. Gibt es in Γ einen geraden (ungeraden) P_1P_3-Weg, so gibt es in Γ einen P_1P_2-Weg und einen P_2P_3-Weg von gleicher (verschiedener) Parität.*

Beweis. Es sei w ein gerader (ungerader) P_1P_3-Weg. Es gibt einen P_2P_1-Weg w'. Es sei P derjenige Punkt von $w \cap w'$, der auf w' P_2 am nächsten liegt. Für $w_2 = (P_2 w' P)$ gilt $w_2 \cap w = (P)$. Die Wege $w_1 = (PwP_1)$ und $w_3 = (PwP_3)$ haben dieselbe (verschiedene) Parität. Dann trifft das gleiche auch für $w_1' = w_1 \cup w_2$ und $w_3' = w_3 \cup w_2$ zu. w_i' ist ein P_iP_2-Weg $(i = 1,3)$.

Aus (6.1) kann man leicht einsehen, daß die folgenden beiden, auf den Punkten des *nichtleeren zusammenhängenden* Graphen Γ definierten, Relationen Äquivalenz-Relationen sind:

$P\gamma Q$ bzw. $P\delta Q$ bestehe dann und nur dann, falls in Γ jeder PQ-Weg gerade ist bzw. die gleiche Parität besitzt.

Jeder dieser Relationen entspricht eine Klasseneinteilung der Punkte von Γ. Wir wollen die Klassen dieser Einteilungen als die γ-bzw. *δ-Klassen von Γ* (oder $\Phi(\Gamma)$) bezeichnen. Nach der Definition dieser Klassen gilt:

(6.2) *Gehören P und Q zur selben γ-Klasse (δ-Klasse) von Γ, so ist jeder PQ-Weg von Γ gerade (von gleicher Parität), gehören sie zu verschiedenen, so existieren ungerade (gerade und ungerade) PQ-Wege in Γ.*

Es ist klar, daß jede γ-Klasse in einer δ-Klasse enthalten ist. Aus (6.1) folgt ferner, daß jede δ-Klasse höchstens zwei γ-Klassen enthalten kann. Weiter können wir behaupten: Ist C eine γ-Klasse von Γ, so enthält $[C]$ keine Kante. Ist D eine δ-Klasse von Γ, so ist $[D]$ ein paarer Graph.

Weitere wichtige Eigenschaften der γ- und δ-Klassen werden wir durch die folgenden Untersuchungen über die Blöcke und Glieder von Γ erhalten. (Diese Untersuchungen werden den Satz (6.1) und die auf (6.1) ruhende Einführung der γ- und δ-Klassen eigentlich überflüssig machen. Wir haben die Mitteilung dieser Einführung ihrer Einfachheit halber trotzdem für nützlich gehalten.)

(6.3) *Ist Γ zweifach zusammenhängend und kein paarer Graph, so kann man je zwei Punkte von Γ sowohl durch gerade wie auch durch ungerade Wege von Γ verbinden.*

Beweis. Es seien $P, Q \in \Gamma$ $(P \neq Q)$. Nach (1.19) enthält Γ ein ungerades Vieleck v. Nach (4.7) und (4.17) gibt es einen solchen PQ-Weg w, der eine Kante von v enthält. Es sei P' bzw. Q' derjenige Punkt von $v \cap w$, der auf w P bzw. Q am nächsten liegt. Es ist $P' \neq Q'$. P' und Q' zerlegen v in die Wege w_1 und w_2 von verschiedener Parität. Es gibt dann $w_i' = (PwP') \cup w_i \cup (Q'wQ)$ für $i = 1$ und 2 zwei PQ-Wege von verschiedenen Paritäten.

(6.4) **Definitionen.** Wir nennen ein Glied $[A]$ von Γ *gerade* oder *ungerade*, ja nachdem ob $[A]$ ein paarer Graph ist oder nicht.

Ein Block $[B]$ von Γ heißt *gerade (ungerade)*, wenn sämtliche Glieder von $[B]$ gerade (ungerade) sind.

Ein gerader Block $[B]$ ist ein zusammenhängender paarer Graph. Demzufolge können wir von den beiden Punktklassen von $[B]$ sprechen (s. (1.18)).

Nach (3.10) sind die Komponenten der Vereinigung sämtlicher geraden (ungeraden) Glieder von Γ gerade (ungerade) Blöcke von Γ. Diese wollen wir die *maximalen geraden (ungeraden) Blöcke von* Γ nennen.

(6.5) *Jeder gerade (ungerade) Block von Γ liegt in einem maximalen geraden (ungeraden) Block von Γ.*

Unter Beachtung von (3.11) besteht:

(6.6) *Zwei maximale Blöcke von gleicher Parität sind stets fremd, diejenigen von verschiedener Parität haben höchstens einen Punkt gemeinsam.*

Nach (1.17) und (3.1) gilt:

(6.7) *Liegen P und Q in derselben Punktklasse des geraden Blocks $[B]$ von Γ, so ist jeder PQ-Weg von Γ gerade, liegen sie in verschiedenen Punktklassen von $[B]$ so ist jeder PQ-Weg von Γ ungerade.*

(6.8) *Es seien $P, Q \in \Gamma$ $(P \neq Q)$. Gibt es keinen geraden Block von Γ, der die beiden Punkte P und Q enthält, so existieren in Γ sowohl gerade wie auch ungerade PQ-Wege.*

Beweis. Es seien $[A_1], \ldots, [A_n]$ $(n \geqq 1)$ die Glieder des Blockes $[P \sim Q]$ in jener Reihenfolge, in welcher die PQ-Wege sie — in Richtung von P nach Q — treffen (s. (5.6), $P \in A_1$, $Q \in A_n$). Ist $n = 1$, so muß $[A_1]$ ungerade sein, und so folgt die Behauptung aus (4.17) und (6.3). Ist $n > 1$, so sei $A_i \cap A_{i+1} = \{R_i\}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, $R_0 = P$ und $R_n = Q$. Da $[P \sim Q]$ kein gerader Block ist, gibt es ein j $(1 \leqq j \leqq n)$ mit ungeradem $[A_j]$. Nun sei w ein PQ-Weg und $w_j = w \cap [A_j]$. w_j ist ein $R_{j-1}R_j$-Weg. Nach (4.17) und (6.3) gibt es in $[A_j]$ einen $R_{j-1}R_j$-Weg w_j', dessen Parität von derjenigen von w_j verschieden ist. Ersetzt man in w die Strecke w_j durch w_j', so bekommt man nach (5.6) einen PQ-Weg w'. w und w' haben verschiedene Paritäten.

Nun kann man nach (6.5), (6.7) und (6.8) behaupten:

(6.9) *Ist $\pi(\Gamma) > 1$, so fallen die mehrpunktigen δ-Klassen mit den Mengen der Punkte der maximalen geraden Blöcke zusammen; die einpunktigen mit jenen Mengen, die aus je einem solchen Punkt bestehen, der in keinem geraden Block von Γ enthalten ist. Ferner fallen die γ-Klassen mit den Punktklassen der maximalen geraden Blöcke sowie mit den einpunktigen δ-Klassen zusammen.*

Aus (3.1) und (6.9) folgt:

(6.10) *Ist D eine δ-Klasse von Γ, so ist* $[D \sim D] = [D]$.

Wir sehen, daß jede mehrpunktige δ-Klasse genau zwei γ-Klassen enthält. Es ist oft vorteilhaft, auch bei einpunktigen δ-Klassen D zu sagen: D enthält die γ-Klassen C_1 und C_2. Dies bedeutet natürlich $C_1 = C_2 = D$.

Wir werden von der folgenden Eigenschaft der geraden Blöcke Gebrauch machen:

(6.11) *Keine Kante eines geraden Blockes von Γ kann in einem Dreieck von Γ liegen.*

Beweis. Es sei $[B]$ ein gerader Block von Γ und $PQ \in [B]$. Gibt es ein $R \in \Gamma$ mit $(PQRP) \subseteq \Gamma$, so ist $(QRP) \subseteq [B]$, und daher auch $(PQRP) \subseteq [B]$. Das widerspricht jedoch der Behauptung (1.19).

§ 7. Klasseneinteilung von Punkten, die mit einem Teilgraphen verbunden sind

In diesem Paragraphen sollen K und L solche feste Teilmengen von $\Phi(\Gamma)$ bedeuten, die folgende Eigenschaften besitzen: Es ist $K \neq \emptyset$, $L \neq \emptyset$, $K \cap L = \emptyset$, $[K]$ zusammenhängend und jeder L-Punkt mit K verbunden, d. h. für jedes $P \in L$ ist $K(P) \neq \emptyset$ (s. (1.5)).

(7.1) **Definitionen.** Sind $P, Q \in L$ und ist w ein solcher PQ-Weg, der K-Punkte enthält, liegt ferner jeder innere Punkt von w in $[K]$, so sagen wir, daß *w in $[K]$ läuft* sowie daß *w P und Q durch $[K]$ verbindet.*

Wir können behaupten:

(7.2) *Je zwei L-Punkte kann man durch $[K]$ verbinden.*

Ist w ein in $[K]$ laufender LL-Weg, so ist $\tilde{w} = w \cap [K]$ eine Strecke von w und $\tilde{w}$ und w haben die gleiche Parität.

Man kann in gleicher Weise wie (6.1) bewiesen wurde, auch die folgende Behauptung beweisen:

(7.3) *Es seien P_1, P_2, P_3 verschiedene L-Punkte. Gibt es einen geraden (ungeraden) in $[K]$ laufenden P_1P_3-Weg, so gibt es einen in $[K]$ laufenden P_1P_2-Weg und einen in $[K]$ laufenden P_2P_3-Weg von gleicher (verschiedener) Parität.*

Aus (7.3) kann man leicht einsehen, daß die folgenden zwei, auf die L-Punkte definierten Relationen Äquivalenz-Relationen sind:

$P \gamma_K Q$ bzw. $P \delta_K Q$ bestehe dann und nur dann, wenn entweder $P = Q$ ist oder jeder in $[K]$ laufende PQ-Weg gerade ist bzw. die gleiche Parität besitzt.

Wir wollen die zu diesen Relationen gehörigen Klassen der L-Punkte als die *γ_K*-bzw. *δ_K-Klassen von L bezeichnen.* Es gilt dann

(7.4) *Gehören P und Q zur selben γ_K-Klasse (δ_K-Klasse), so ist jeder in $[K]$ laufende PQ-Weg gerade (von gleicher Parität), gehören sie zu verschiedenen γ_K-Klassen (δ_K-Klassen), so existieren ungerade (gerade und ungerade) in $[K]$ laufende PQ-Wege.*

Jede γ_K-Klasse ist in einer δ_K-Klasse enthalten. Ferner folgt aus (7.3), daß jede δ_K-Klasse höchstens zwei γ_K-Klassen enthalten kann.

Um weitere Eigenschaften der γ_K- und δ_K-Klassen bestimmen zu können, wollen wir auch auf einem anderen Weg zu diesen Klassen gelangen.

(7.5) **Definitionen.** Es sei $\tilde{C}$ eine γ-Klasse von $[K]$. Die Menge derjenigen L-Punkte P, für die $K(P) \subseteq \tilde{C}$ gilt, (s. (1.5)), nennen wir die *zu $\tilde{C}$ gehörige γ_K-Menge* (von L), und bezeichnen diese mit $f(\tilde{C})$.

Offensichtlich gilt $K(f(\widetilde{C})) \subseteq \widetilde{C}$.

Es sei ferner $\widetilde{D}$ eine δ-Klasse von $[K]$ und es seien die von $\widetilde{D}$ enthaltenen γ-Klassen von $[K]$ $\widetilde{C}_1$ und $\widetilde{C}_2$. Dann nennen wir die Menge $f(\widetilde{D}) = f(\widetilde{C}_1) \cup f(\widetilde{C}_2)$ die *zu $\widetilde{D}$ gehörige δ_K-Menge* (von L). (Ist $\nu(\widetilde{D}) = 1$, so ist $\widetilde{C}_1 = \widetilde{C}_2$ und $f(\widetilde{D}) = f(\widetilde{C}_1)$. Ist $\nu(\widetilde{D}) > 1$, so enthält $f(\widetilde{D})$ zwei γ_K-Mengen, die auch leer sein dürfen.)

Offensichtlich gilt $K(f(\widetilde{D})) \subseteq \widetilde{D}$ und es besteht

(7.6) *Sind $\widetilde{C}_1$ und $\widetilde{C}_2$ bzw. $\widetilde{D}_1$ und $\widetilde{D}_2$ verschiedene γ-bzw. δ-Klassen von $[K]$ und ist $f(\widetilde{C}_i) = C_i, f(\widetilde{D}_i) = D_i$ $(i = 1,2)$, so sind die Mengen $C_1 \cap C_2$, $D_1 \cap D_2$, $K(C_1) \cap K(C_2)$ und $K(D_1) \cap K(D_2)$ leer.*

(7.7) **Definitionen.** *Wir bezeichnen das System bzw. die Vereinigung sämtlicher mehrpunktigen δ_K-Mengen von L mit Λ bzw. L_a, die Vereinigung sämtlicher δ_K-Mengen von L mit L_1. Ferner setzen wir $L_b = L - L_a$ und $L_2 = L - L_1$.*
Wir beweisen den folgenden Satz:

(7.8) *Die nichtleeren γ_K-Mengen (δ_K-Mengen) von L, zusammen mit denjenigen Mengen, die aus je einem L_2-Punkt bestehen, fallen mit den γ_K-Klassen (δ_K-Klassen) von L zusammen.*

Beweis. Mit Hilfe von (6.2) zeigen wir, daß die erwähnten Mengen die in (7.4) angeführten Eigenschaften der γ_K-bzw. δ_K-Klassen besitzen.

Es sei $P_1 \in L$, $P_2 \in L$, $P_1 \neq P_2$, w ein in $[K]$ laufender P_1P_2-Weg und $\widetilde{w} = w \cap [K] = (Q_1wQ_2)$. (Es gilt $P_iQ_i \in w$, $i = 1,2$ und $\widetilde{w}$ und w haben die gleiche Parität.) Es liege ferner Q_i in der γ-Klasse $\widetilde{C}_i$ und in der δ-Klasse $\widetilde{D}_i$ von $[K]$ und es sei $f(\widetilde{C}_i) = C_i, f(\widetilde{D}_i) = D_i$ $(i = 1,2)$. Dann gelten $\widetilde{C}_i \subseteq \widetilde{D}_i$ und $C_i \subseteq D_i$ $(i = 1,2)$.

1) Betrachten wir erst den Fall $P_1, P_2 \in L_1$. Dann gilt $P_1 \in C_1$ und $P_2 \in C_2$. Ist $C_1 = C_2$, so gilt $\widetilde{C}_1 = \widetilde{C}_2$. Dann ist $\widetilde{w}$ und daher auch w gerade.

Ist $C_1 \neq C_2$, jedoch $D_1 = D_2$, so ist $\widetilde{C}_1 \neq \widetilde{C}_2$ und $\widetilde{D}_1 = \widetilde{D}_2$. Dann ist $\widetilde{w}$ und daher auch w ungerade.

Ist $D_1 \neq D_2$, so ist $\widetilde{D}_1 \neq \widetilde{D}_2$. Dann gibt es in $[K]$ einen Q_1Q_2-Weg $\widetilde{w}'$, dessen Parität von derjenigen von $\widetilde{w}$ verschieden ist. Dann ist $w' = (P_1Q_1) \cup \widetilde{w}' \cup (Q_2P_2)$ ein in $[K]$ laufender P_1P_2-Weg und w' und w haben verschiedene Paritäten.

2) Es sei nun $P_2 \in L_2$. Dann existiert ein solcher Punkt $Q_3 \in K(P_2)$, der in einer von $\widetilde{C}_2$ verschiedenen γ-Klasse $\widetilde{C}_3$ von $[K]$ liegt. Es sei ferner $\widetilde{C}_3$ in der δ-Klasse $\widetilde{D}_3$ von $[K]$ enthalten.

Ist $\widetilde{D}_1 \neq \widetilde{D}_2$, so gibt es in $[K]$ einen Q_1Q_2-Weg $\widetilde{w}'$, dessen Parität von derjenigen von $\widetilde{w}$ verschieden ist. Es ist dann $w' = (P_1Q_1) \cup \widetilde{w}' \cup (Q_2P_2)$ ein in $[K]$ laufender P_1P_2-Weg und w und w' haben verschiedene Paritäten.

Ist $\widetilde{D}_1 = \widetilde{D}_2$ und $\widetilde{C}_1 \neq \widetilde{C}_2$, so ist $\widetilde{w}$ und daher auch w ungerade. Ist ferner $\widetilde{D}_3 = \widetilde{D}_1$, so ist $\widetilde{C}_3 = \widetilde{C}_1$. In diesem Falle sowie auch im Falle $\widetilde{D}_3 \neq \widetilde{D}_1$ gibt es in $[K]$ einen geraden Q_1Q_3-Weg $\widetilde{w}'$. Jetzt ist $w' = (P_1Q_1) \cup \widetilde{w}' \cup (Q_3P_2)$ ein in $[K]$ laufender gerader P_1P_2-Weg.

Ist $\widetilde{C}_1 = \widetilde{C}_2$, so ist $\widetilde{w}$ und daher auch w gerade. Da jetzt $\widetilde{C}_3 \neq \widetilde{C}_1$ ist, gibt es in $[K]$ einen ungeraden Q_1Q_3-Weg $\widetilde{w}'$. $w' = (P_1Q_1) \cup \widetilde{w}' \cup (Q_3P_2)$ ist dann ein in $[K]$ laufender ungerader P_1P_2-Weg.

Damit haben wir den Beweis von (7.8) beendet.

(7.9) **Definition.** Ist $E \subseteq L$, so bezeichnen wir die Menge der K-Punkte sämtlicher in $[K]$ laufenden EE-Wege mit

$$K(E \sim E).$$

(7.10) *Es sei $D \in \Lambda$. Dann gilt mit der Bezeichnung $[K] = \Gamma'$*

$$K(D \sim D) = \{K(D) \sim K(D)\}_{\Gamma'}. \qquad (s. (2.1))$$

Beweis. Es sei $K(D \sim D) = B$ und $\{K(D) \sim K(D)\}_{\Gamma'} = B'$. Offensichtlich gilt $B \subseteq B'$. Um $B' \subseteq B$ zu beweisen, sei $P_1 \in D$. Dann gilt $D' = D - \{P_1\} \neq \emptyset$ und $K(D) = K(D') \cup K(P_1)$. $K(P_1)$ und $K(D')$ sind nicht leer. Nach (2.5) besteht

$$[K(D) \sim K(D)]_{\Gamma'} = [K(P_1) \sim K(D')]_{\Gamma'}.$$

Ist also $Q \in B'$, so gibt es in Γ' einen Q_1Q_2-Weg w mit $Q \in w$, $Q_1 \in K(P_1)$ und $Q_2 \in K(D')$. Es sei P_2 ein mit Q_2 verbundener Punkt von D'. Dann ist $(P_1Q_1) \cup w \cup (Q_2P_2)$ ein in $[K]$ laufender DD-Weg, der Q enthält. Es gilt also $Q \in B$.

(7.11) *Es sei $f(\widetilde{D}) = D \in \Lambda$ ($\widetilde{D}$ ist eine* δ-Klasse von $[K]$) *und $B = K(D \sim D)$. Dann gilt $K(D) \subseteq B \subseteq \widetilde{D}$ und im Falle $\nu(K(D)) > 1$ ist $[B]$ ein gerader Block von $[K]$.*

Beweis. Nach (7.10), (2.4), (2.2) (5), (6.10) und (1.4) (4) ist mit der Bezeichnung $[K] = \Gamma'$

$$(1) \qquad [K(D)] \subseteq [B] = [K(D) \sim K(D)]_{\Gamma'} \subseteq [\widetilde{D} \sim \widetilde{D}]_{\Gamma'} = [\widetilde{D}].$$

Ist $\nu(K(D)) > 1$, so ist laut (6.9) $[\widetilde{D}]$ ein maximaler gerader Block von $[K]$. Unter Beachtung von (1) und (3.3) folgt daraus, daß $[B]$ ein gerader Block von $[K]$ ist.

(7.12) *Bezeichne Γ'' denjenigen Graphen, der aus $[K \cup L]$ durch die Weglassung sämtlicher LL-Kanten entsteht, und es sei $f(\widetilde{D}) = D \in \Lambda$ und $B = K(D \sim D)$. Dann ist $[D \cup B]_{\Gamma''}$ ein zusammenhängender paarer Graph und jede in D enthaltene γ_K-Menge liegt in einer Punktklasse von $[D \cup B]_{\Gamma''}$. Enthält ferner D zwei nichtleere γ_K-Mengen, so liegen diese in verschiedenen Punktklassen von $[D \cup B]_{\Gamma''}$.*

Beweis. Nach (7.11) ist $K(D) \subseteq B \subseteq \widetilde{D}$. Im Falle $\nu(K(D)) = 1$ ist die Behauptung trivial. Ist $\nu(K(D)) > 1$ so ist laut (6.9) $[\widetilde{D}]$ ein maximaler gerader Block von $[K]$. Es seien $\widetilde{C}_1$ und $\widetilde{C}_2$ die in $\widetilde{D}$ erhaltenen γ-Klassen von $[K]$, ferner sei $f(\widetilde{C}_i) = C_i$ $(i = 1,2)$. Es gilt $D = C_1 \cup C_2$ und $K(C_i) \subseteq \widetilde{C}_i$ $(i = 1,2)$. Daraus folgt, daß $[D \cup \widetilde{D}]_{\Gamma''}$ ein zusammenhängender paarer Graph ist, dessen Punktklassen $C_1 \cup \widetilde{C}_2$ und $C_2 \cup \widetilde{C}_1$ sind. Da $[D \cup B]_{\Gamma''} \subseteq [D \cup \widetilde{D}]_{\Gamma''}$ besteht, ist auch $[D \cup B]_{\Gamma''}$ ein paarer Graph. Dieser ist offensichtlich zusammenhängend. $B_i = B \cap \widetilde{C}_i$ $(i = 1,2)$ sind die Punktklassen von $[B]$, $C_1 \cup B_2$ und $C_2 \cup B_1$ diejenigen von $[D \cup B]_{\Gamma''}$.

Aus (7.12) ergibt sich unmittelbar die folgende Eigenschaft der L_a-Punkte:

(7.13) *Ist $P \in L_a$, so enthält Γ kein Dreieck $(PQRP)$ mit $Q, R \in K$.*

III. Trennende Punktmengen der ungerad-triangulierbaren Graphen

§ 8. Triangulierbarkeit von Vielecken

(8.1) **Definitionen.** Es sei v ein Vieleck. Die Kante PQ heißt eine *Diagonale* von v, falls $P,Q \in v$ und $PQ \notin v$ bestehen. Wir wollen die Kanten von v auch als die *Seiten* von v bezeichnen. Die Diagonale PQ von v heißt eine *kürzeste* Diagonale von v, falls der eine der Bogen, die P und Q auf v bestimmen, die Länge 2 hat. Sind PQ und $P'Q'$ Diagonalen von v, P,P',Q,Q' verschiedene Punkte und kann man v von P beginnend so durchlaufen, daß man die Randpunkte dieser Diagonalen in der Reihenfolge P,P',Q,Q' trifft, so sagen wir, daß sich diese Diagonalen (von v) *kreuzen.*

Die $n-3$ Diagonlen P_1P_i $(i=3,\ldots, n-1)$ des n-Ecks $v=(P_1P_2\ldots P_nP_1)$ haben die Eigenschaft, daß sie sich paarweise nicht kreuzen.

Durch Induktion kann man die folgenden zwei Behauptungen leicht beweisen:

(8.2) *Unter $n-2$ Diagonalen eines n-Ecks v gibt es immer zwei solche, die sich kreuzen.*

(8.3) *$n-3$ sich paarweise nicht kreuzende Diagonalen und die Seiten eines n-Ecks v bilden $n-2$ Dreiecke, und zwar ist jede Seite von v in genau einem, jede der $n-3$ Diagonalen in genau zwei dieser Dreiecke enthalten.*

(8.4) **Definitionen.** Unter einer *Triangulation* t eines n-Ecks v verstehen wir einen solchen Graphen, der aus den Punkten und Kanten von v sowie aus $n-3$ solchen Diagonalen von v besteht, die sich paarweise nicht kreuzen. Ist $t \subseteq \Gamma$, so sagen wir: t ist in Γ. Das Vieleck v heißt *in Γ triangulierbar*, wenn es in Γ eine Triangulation t von v gibt.

Ist jedes ungerade Vieleck von Γ in Γ triangulierbar, so nennen wir Γ *ungerad-triangulierbar* oder kurz: *u-triangulierbar.*

Wir sagen: das Vieleck v von Γ ist *in Γ gekreuzt*, wenn es zu einer jeden nicht in Γ liegenden Diagonale PQ von v eine in Γ liegende solche Diagonale von v gibt, die PQ kreuzt. Endlich soll das Vieleck v von Γ *in Γ schwach gekreuzt* heißen, wenn es zu einer jeden nicht in Γ liegenden kürzesten Diagonale PQ von v eine in Γ liegende solche Diagonale von v gibt, die PQ kreuzt.

Offensichtlich gilt

(8.5) *Ist ein Vieleck in Γ gekreuzt, so ist es in Γ auch schwach gekreuzt.*

Aus (8.2) und (8.3) bekommt man einfach die Behauptung:

(8.6) *Es sei t eine Triangulation von $v=(P_1P_2\ldots P_nP_1)$ $(n \geqq 3)$ und es seien $P_1P_{j_i}$ $(i=1,\ldots,l;\ l\geqq 2;\ 2=j_1<j_2<\ldots<j_l=n)$ die zu P_1 inzidenten Kanten von t. Dann gilt: $P_{j_i}P_{j_{i+1}} \in t$ $(i=1,\ldots,l-1)$.*

(8.7) *Es sei $v=(P_1P_2\ldots, P_nP_1)$ $(n\geqq 4)$ in Γ triangulierbar, und es sollen die Diagonalen P_1P_i von v* für sämtliche *i mit $2<g\leqq i\leqq h<n$ nicht in Γ liegen. Dann gibt es in Γ eine solche Diagonale von v, die sämtlichen Diagonalen $P_1P_g,\ldots, P_1P_h$ kreuzt.*

Beweis. Es sei t eine in Γ liegende Triangulation von v, und es seien $P_1P_{j_1},\ldots, P_1P_{j_l}$ $(2=j_1<\ldots<j_l=n;\ 2\leqq l\leqq n-1)$ die zu P_1 inzidenten Kanten von t. Dann fällt keine der Zahlen $j_1,\ldots, j_l$ in das Intervall $g\leqq x\leqq h$, und daher gibt es ein $i(1\leqq i\leqq l)$ mit $j_i<g\leqq h<j_{i+1}$. Nach (8.6) ist dann $P_{j_i}P_{j_{i+1}}$ eine gewünschte Diagonale.

Aus (8.7) folgt unmittelbar:

(8.8) *Ist ein Vieleck in Γ triangulierbar, so ist es in Γ gekreuzt.*

(8.9) *Ist jedes ungerade Vieleck von Γ in Γ schwach gekreuzt, so ist Γ u-triangulierbar.*

Beweis. Es seien die ungeraden Vielecke von Γ in Γ schwach gekreuzt. Die Dreiecke von Γ sind in Γ triangulierbar. Nehmen wir an, daß jedes $(2i+1)$-Eck von Γ mit $i < m$ $(m \geqq 2)$ in Γ triangulierbar ist und es sei $v = (P_1P_2 \ldots P_{2m+1}P_1) \subseteq \Gamma$. v besitzt in Γ liegende Diagonalen.

1) Nehmen wir erst an, daß es in Γ eine nicht kürzeste Diagonale von v gibt. Es sei z. B. P_1P_{2j+1} $(1 < j < m)$ eine solche Diagonale. Laut der Induktionsannahme gibt es in Γ eine Triangulation t_1 von $v_1 = (P_1P_2 \ldots P_{2j+1}P_1)$. t_1 enthält ein Dreieck $(P_1P_{2j+1}P_gP_1)$ $(1 < g < 2j+1)$. Daher ist $v_2 = (P_1P_gP_{2j+1}P_{2j+2} \ldots P_{2m+1}P_1)$ ein $(2(m-j+1)+1)$-Eck von Γ. Da $m - j + 1 < m$ ist, gibt es in Γ eine Triangulation t_2 von v_2. Dann ergeben die zu t_1 und t_2 gehörigen Diagonalen von v_1 bzw. v_2 $2m-2$ solche in Γ liegende Diagonalen von v, die sich paarweise nicht kreuzen.

2) Es sei nun jede in Γ liegende Diagonale von v eine kürzeste Diagonale von v. Unter diesen gibt es zwei solche, die sich nicht kreuzen. (Unter drei kürzesten Diagonalen gibt es nämlich immer zwei sich nicht kreuzende, und Γ kann nicht bloß zwei sich kreuzende kürzeste Diagonalen von v enthalten.) Es seien z. B. P_1P_3 und P_jP_{j+2} $(3 \leqq j \leqq 2m;\ P_{2m+2} = P_1)$ zwei solche Diagonalen. Nach der Induktionsannahme gibt es in Γ eine Triangulation t' von $v' = (P_1P_3 \ldots P_jP_{j+2} \ldots P_{2m+2})$. Dann ist $t' \cup v$ eine in Γ liegende Triangulation von v.

Die folgenden beiden Behauptungen sind leicht ersichtlich:

(8.10) *Ist Γ u-triangulierbar, so ist jeder durch eine Punktmenge gespannte Teilgraph von Γ ebenfalls u-triangulierbar.*

(8.11) *Jeder paare Graph ist u-triangulierbar.*

(8.12) *Jeder vollständig-chromatische Graph ist u-triangulierbar.*

Beweis. Es sei Γ ein nichtleerer vollständig-chromatischer Graph und $M_1, \ldots, M_m$ $(m \geqq 1)$ seien die Punktklassen von Γ. Ist $m = 1$, so ist die Behauptung trivial. Im Falle $m = 2$ folgt sie aus (8.11). Es sei nun $m \geqq 3$. Jedes ungerade Vieleck von Γ enthält Punkte aus mindestens drei Punktklassen von Γ. Wir zeigen, daß jedes solche n-Eck von Γ, das aus mindestens drei Punktklassen von Γ Punkte enthält, in Γ triangulierbar ist. Die Behauptung ist richtig für $n = 3$. Nehmen wir an, daß sie für jedes $n' < n$ $(n > 3)$ richtig ist, und es sei $v = (P_1P_2 \ldots P_nP_1)$ ein solches n-Eck von Γ, das aus mindestens drei Punktklassen von Γ Punkte enthält. Da zwei auf v benachbart liegende Punkte nicht zur selben Klasse gehören können, gibt es einen solchen Punkt von v, dessen Nachbarpunkte auf v zu verschiedenen Klassen gehören. Es sei z. B. $P_i \in M_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Dann ist $v' = (P_1P_3 \ldots P_nP_1) \subseteq \Gamma$. Enthält v' aus mindestens drei Klassen Punkte, so ist laut der Induktionsannahme v', und daher auch v in Γ triangulierbar. Gilt $\Phi(v') \subseteq M_1 \cup M_3$, so ist $P_2P_i \in \Gamma$ $(i = 1, 3, \ldots, n)$. v ist auch in diesem Falle in Γ triangulierbar.

(8.13) *Es sei Γ u-triangulierbar, $F \subset \Phi(\Gamma)$, $\nu(F) > 1$, $[F]$ ein zusammenhängender paarer Graph und $P \in \Phi(\Gamma) - F$. Enthält dann $F(P)$ (s. (1.5)) von den beiden Punktklassen von $[F]$ Punkte, so ist $[F(P)]$ ein gerader Block von $[F]$.*

Beweis. 1) Es sei w ein ungerader Q_1Q_2-Weg von $[F]$ mit $Q_1,Q_2 \in F(P)$. Wir zeigen, daß $w \subseteq [F(P)]$ ist. $v = (PQ_1) \cup w \cup (Q_2P)$ ist ein ungerades Vieleck von Γ. Es sei t eine in Γ liegende Triangulation von v. Da $[F]$ paarer ist, enthält jedes Dreieck von t den Punkt P. P ist also mit jedem Punkt von w verbunden.

2) Es seien F_1 und F_2 die Punktklassen von $[F]$ und es sei $F(P) = E$, $E \cap F_i = E_i$ $(i = 1,2)$. Es genügt zu zeigen, daß mit der Bezeichnung $[F] = \Gamma'$

$$(1) \qquad [E \sim E]_{\Gamma'} = [E]$$

gilt. Es sei $Q \in [E \sim E]_{\Gamma'}$. Da E_1 und E_2 nicht leer sind, gilt nach (2.5) $[E_1 \sim E_2]_{\Gamma'} = [E \sim E]_{\Gamma'}$. Daher gibt es in Γ' einen E_1E_2-Weg w mit $Q \in w$. w ist ungerade, und so ist nach 1) $w \subseteq [E]$. Es besteht also $Q \in E$, und daraus folgt nach (2.4) die Gleichung (1).

Wir teilen noch ohne Beweis einen Satz mit, der die Möglichkeit der Konstruktion u-triangulierbarer Graphen angibt:

(8.14) **Satz.** *Es sei Γ ein beliebiger Graph, $\emptyset \neq F \subset \Phi(\Gamma)$ und $[F]$ zusammenhängend. Ferner sei für jedes $P \in \Phi(\Gamma) - F$ $[F(P)]$ ein Block von $[F]$ und für $P,P' \in \Phi(\Gamma) - F$ $(P \neq P')$ soll $PP' \in \Gamma$ dann und nur dann bestehen, wenn $F(P) \cap F(P') \neq \emptyset$ ist. Dann ist jedes nicht in $[F]$ liegende Vieleck von Γ in Γ triangulierbar.*

Folgerungen. Gelten die in (8.14) angeführten Bedingungen und ist $[F]$ u-triangulierbar, (z. B. ist $[F]$ ein paarer Graph) so ist auch Γ u-triangulierbar. Sind sämtliche (nicht nur die ungeraden) Vielecke von $[F]$ in $[F]$ triangulierbar (z. B. ist F ein Baum), so sind auch sämtliche Vielecke von Γ in Γ triangulierbar.

§ 9. Trennende Punktmengen

In diesem Paragraphen bezeichne Γ einen zusammenhängenden Graphen mit $\pi(\Gamma) > 1$.

(9.1) **Definitionen.** Es sei $\emptyset \neq L \subset \Phi(\Gamma)$. L heißt eine *trennende Punktmenge* von Γ, wenn $\Gamma - L$ nicht zusammenhängend ist. (Besteht L aus einem trennenden Punkt von Γ, so ist L eine trennende Punktmenge von Γ.) Ist L eine trennende Punktmenge von Γ und ist $[K]$ eine solche Komponente von $\Gamma - L$, daß jeder L-Punkt mit mindestens einem K-Punkt in Γ verbunden ist, so nennen wir $[K]$ eine *bezüglich L normale Komponente* von $\Gamma - L$. Ist L eine trennende Punktmenge von Γ und gibt es mindestens zwei bezüglich L normale Komponenten von $\Gamma - L$, so sagen wir, daß L eine *normale trennende Punktmenge* von Γ ist. Die trennende Punktmenge L von Γ heißt *minimal*, wenn keine echte Teilmenge von L eine trennende Punktmenge von Γ ist. Die Erklärungen der Ausdrücke: »L trennt P von Q«, »L ist eine bezüglich P und Q minimale oder eine relativ-minimale trennende Punktmenge« haben wir in der Einleitung angegeben.

Die folgenden Behauptungen sind einfache Folgen unserer Definitionen.

(9.2) *Ist Γ kein vollständiger Graph, so existieren in Γ trennende Punktmengen.* (Ist $P \neq Q$, $PQ \notin \Gamma$, so trennt $\Phi(\Gamma) - \{P,Q\}$ P von Q.)

(9.3) *Ist $[K]$ eine bezüglich der trennenden Punktmenge L normale Komponente von $\Gamma - L$, so kann man je zwei L-Punkte durch $[K]$ verbinden.*

(9.4) (DIRAC, [3], Hilfssatz 2.) *Ist L eine minimale trennende Punktmenge von Γ, so ist L normal, und zwar sind sämtliche Komponenten von $\Gamma - L$ bezüglich L normal.*

(9.5) *Ist L bezüglich P und Q eine minimale trennende Punktmenge, so ist L normal, und zwar sind diejenigen Komponenten von $\Gamma - L$, die P und Q enthalten, bezüglich L normal.*

(9.6) *Ist L eine normale trennende Punktmenge von Γ und sind $[K]$ und $[K']$ zwei bezüglich L normale Komponenten von $\Gamma - L$, ist ferner $Q \in K$ und $Q' \in K'$, so ist L eine bezüglich Q und Q' minimale trennende Punktmenge.*

(9.5) und (9.6) zeigen, daß die normalen und die relativ-minimalen trennenden Punktmengen identisch sind.

Im folgenden untersuchen wir einige einfache Eigenschaften der trennenden Punktmengen der u-triangulierbaren Graphen.

(9.7) *Es sei Γ u-triangulierbar und L eine trennende Punktmenge von Γ. $[K]$ und $[K']$ seien zwei Komponenten von $\Gamma - L$ und es seien $P_1, P_2 \in L$ ($P_1 \neq P_2$). Existieren in Γ zwei solche P_1P_2-Wege w und w', daß w ein in $[K]$, w' ein in $[K']$ laufender Weg ist und w und w' verschiedene Paritäten haben, so gilt $P_1P_2 \in \Gamma$.*

Beweis. Es sollen w und w' die angeführten Eigenschaften besitzen. Dann ist $v = w \cup w'$ ein ungerades Vieleck und P_1P_2 eine Diagonale von v. Da Γ keine KK'-Kante enthält, gehören sämtliche solche Diagonalen von v, die P_1P_2 kreuzen, nicht zu Γ. Dann ist nach (8.7) $P_1P_2 \in \Gamma$.

(9.8) *Es sei Γ u-triangulierbar, L eine trennende Punktmenge von Γ, $[K]$ und $[K']$ zwei Komponenten von $\Gamma - L$ und $P_1, P_2 \in L$ ($P_1 \neq P_2$). Sind dann sämtliche in $[K]$ laufende P_1P_2-Wege ungerade, so sind auch sämtliche in $[K']$ laufende P_1P_2-Wege ungerade.*

Beweis. Es seien sämtliche in $[K]$ laufende P_1P_2-Wege ungerade und es sei w ein solcher Weg. Nehmen wir an, daß ein in $[K']$ laufender gerader P_1P_2-Weg w' existiert. w enthält eine Kante von $[K]$. Es sei Q_1Q_2 eine solche Kante und es soll Q_1 auf der Strecke (P_1wQ_2) liegen. $v = w \cup w'$ ist ein ungerades Vieleck von Γ. Es sei t eine in Γ liegende Triangulation von v und $v' = (Q_1Q_2RQ_1)$ jenes Dreieck von t, das Q_1Q_2 enthält. Da $R \notin K'$ ist, muß $R \in w$ bestehen. Liege nun R auf der Strecke (Q_2wP_2). Dann haben die in $[K]$ laufenden P_1P_2-Wege

$$(P_1wQ_1) \cup (Q_1R) \cup (RwP_2) \quad \text{und} \quad (P_1wQ_1) \cup (Q_1Q_2R) \cup (RwP_2)$$

verschiedene Paritäten. Das widerspricht jedoch unserer Annahme.

(9.9) *Es sei Γ u-triangulierbar, L eine normale trennende Punktmenge von Γ, $[K]$ eine bezüglich L normale Komponente von $\Gamma - L$ und P_1, P_2 und P_3 verschiedene L-Punkte. Es gebe ferner einen in $[K]$ laufenden P_1P_2-Weg w und einen in $[K]$ laufenden P_2P_3-Weg w_1 von gleicher Parität. Dann folgt aus $P_1P_2 \notin \Gamma$ und $P_2P_3 \notin \Gamma$ die Behauptung $P_1P_3 \notin \Gamma$.*

Beweis. Es sei $P_1P_2 \notin \Gamma$, $P_2P_3 \notin \Gamma$ und $[K']$ eine von $[K]$ verschiedene bezüglich L normale Komponente von $\Gamma - L$. Nach (9.3) existiert ein in $[K']$ laufender P_2P_3-Weg w'. Laut (9.7) haben w_1 und w' die gleiche Parität. Das gleiche trifft dann auch für w und w' zu. Nehmen wir nun an, daß $P_1P_3 \in \Gamma$ gilt. Dann ist $v = w \cup w' \cup (P_1P_3)$ ein ungerades Vieleck von Γ und P_2P_1 und P_2P_3 sind Diagonalen von v. Sämtliche Diagonalen von v, die die beiden

Diagonalen P_2P_1 und P_2P_3 kreuzen, sind KK'-Kanten. Γ enthält jedoch keine KK'-Kante. Dies widerspricht der Behauptung (8.7).

(9.10) **Satz.** *Der zusammenhängende Graph Γ ist dann und nur dann ungerad-triangulierbar, wenn jede normale trennende Punktmenge L von Γ die folgende Eigenschft besitzt : Sind P_1 und P_2 zwei beliebige in Γ nicht verbundene L-Punkte, so haben sämtliche solche P_1P_2-Wege, die in bezüglich L normalen Komponenten von $\Gamma - L$ laufen, die gleiche Parität.*

Beweis. 1) Nehmen wir an, daß Γ u-triangulierbar ist und L sei eine normale trennende Punktmenge von Γ, $P_1P_2 \in L$ $(P_1 \neq P_2)$, $P_1P_2 \notin \Gamma$, und endlich w bzw. w' ein P_1P_2-Weg, der in der Komponente $[K]$ bzw. $[K']$ von $\Gamma - L$ läuft. Ist $K \neq K'$, so sind nach (9.7) w und w' von gleicher Parität. Ist $K = K'$, so gibt es eine von $[K]$ verschiedene, bezüglich L normale Komponente $[K_1]$ von $\Gamma - L$. Laut (9.3) existiert ein in $[K_1]$ laufender P_1P_2-Weg w_1. Nach (9.7) ist die Parität von w_1 gleich denen von w und w'. w und w' haben also gleiche Parität. (Unser Beweis zeigt, daß die Gleichheit der Parität auch für solche P_1P_2-Wege besteht, die in bezüglich L nicht normalen Komponenten von $\Gamma - L$ laufen.)

2) Nehmen wir an, daß jede normale trennende Punktmenge von Γ die angegebene Eigenschaft besitzt und Γ nicht u-triangulierbar ist. Dann gibt es nach (8.5) und (8.9) ein ungerades Vieleck v in Γ, das in Γ nicht gekreuzt ist. Es sei P_1P_2 eine solche nicht in Γ liegende Diagonale von v, die von keiner in Γ liegenden Diagonale von v gekreuzt ist. w und w' seien die durch P_1 und P_2 bestimmten Bogen von v und es bezeichne E bzw. E' die Menge der inneren Punkte von w bzw. w'. $[E]$ und $[E']$ sind fremde, nichtleere zusammenhängende Graphen, und Γ enthält keine EE'-Kante. Es sei $Q \in E$ und $Q' \in E'$. Dann trennt $L_1 = \Phi(\Gamma) - (E \cup E')$ Q von Q' in Γ. Es sei L eine solche Teilmenge von L_1, die bezüglich Q und Q' eine minimale trennende Punktmenge ist, und $[K]$ bzw. $[K']$ diejenige Komponente von $\Gamma - L$, die Q bzw. Q' enthält. Nach (9.5) sind L sowie (bezüglich L) $[K]$ und $[K']$ normal. Ferner besteht $P_1, P_2 \in L$, $E \subseteq K$ und $E' \subseteq K'$. Es ist also w bzw. w' ein in $[K]$ bzw. $[K']$ laufender P_1P_2-Weg. w und w' haben verschiedene Paritäten, was mit unserer Annahme in Widerspruch steht.

§ 10. Die Struktur der von normalen trennenden Punktmengen gespannten Graphen

In diesem Paragraphen bezeichne Γ einen zusammenhängenden, u-triangulierbaren Graphen, L eine normale trennende Punktmenge von Γ und $[K]$ eine bezüglich L normale Komponente von $\Gamma - L$. Wir wollen im ganzen Paragraphen L und K als feste Mengen betrachten und auf diese die in § 7 erhaltenen Ergebnisse anwenden.

Betrachten wir die γ_K- und δ_K-Mengen von L, die Mengen L_a und L_b und das Mengensystem Λ (s. (7.5) und (7.7)). Nach (7.4), (7.8) und (9.10) können wir dann behaupten:

(10.1) *Ist $[L]$ kein vollständiger Graph, so ist $\nu(L_a) > 1$, und $[L_b]$ ist ein vollständiger Graph. Ist ferner $D \in \Lambda$, so ist D mit $L - D$ vollständig verbunden.*

(10.2) *Es sei $P \in L_a$, $P' \in L_a$ $(P \neq P')$, w ein in $[K]$ laufender, w' ein in $[L_a]$ liegender PP'-Weg, und w und w' seien von verschiedener Parität. Dann kann w keine solche Kante enthalten, die in einem geraden Block von $[K]$ liegt.*

Beweis. Nehmen wir an, daß QQ' eine Kante des geraden Blockes $[B]$ von $[K]$ ist und $QQ' \in w$ gilt. $v = w \cup w'$ ist ein ungerades Vieleck von Γ. Es sei t eine in Γ liegende Triangulation von v und $(QQ'RQ)$ jenes Dreieck von t, der QQ' enthält. Nach (6.11) ist $R \notin K$, nach (7.13) gilt $R \notin L_a$. Dies ist jedoch ein Widerspruch.

(10.3) *Es sei $P \in D \in \Lambda$, $P' \in L - D$, w ein gerader in $[K]$ laufender PP'-Weg und $PQ \in w$. Dann gilt $P'Q \in \Gamma$.*

Beweis. Nach (10.1) ist $PP' \in \Gamma$. $v = w \cup (PP')$ ist ein ungerades Vieleck von Γ. Betrachten wir eine in Γ liegende Triangulation t von v, und es sei $(PQRP)$ jenes Dreieck von t, das PQ enthält. Nach (7.13) ist $R \notin K$ und so muß $R = P'$ bestehen.

(10.4) *Λ ist entweder leer, oder enthält eine einzige δ_K-Menge.*

Beweis. Nehmen wir an, daß D und D' verschiedene Elemente von Λ sind. Es seien $P \in D$ und $P' \in D'$. Dann gibt es nach (7.4) und (7.8) einen in $[K]$ laufenden geraden PP'-Weg w. Es sei $PQ \in w$. So besteht laut (10.3) $P'Q \in \Gamma$. Es ist also $Q \in K(D) \cap K(D')$. Das widerspricht jedoch dem Satz (7.6).

Wir wollen dem Inhalt von (10.4) noch eine andere Fassung geben:

(10.5) *Ist $L_a \neq \emptyset$, so ist L_a die einzige mehrpunktige δ_K-Menge von L, d. h. für zwei beliebige L_a-Punkte P und P' sind sämtliche in $[K]$ laufende PP'-Wege von gleicher Parität.* (Liegen P und P' nicht beide in L_a, so existieren sowohl gerade als auch ungerade, in $[K]$ laufende PP'-Wege.)

(10.6) *Es sei $\nu(K(L_a)) > 1$ und $B_a = K(L_a \sim L_a)$. Dann ist $[B_a]$ ein gerader Block von $[K]$ und $[L_a \cup B_a]$ ein zusammenhängender paarer Graph.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus (7.11). Um die zweite zu beweisen, genügt es nach (7.12) zu zeigen, daß Γ keine C_iC_i-Kanten ($i = 1,2$) enthält. Dabei bezeichnen C_1 und C_2 die in L_a enthaltenen γ_K-Mengen.

Es seien z. B. $P, P' \in C_1$, $P \neq P'$. Wir beweisen, daß $PP' \notin \Gamma$ gilt.

1) Es sei erst $C_2 \neq \emptyset$ und es sei $P'' \in C_2$. Ist $PP'' \notin \Gamma$ und $P'P'' \notin \Gamma$, so gilt nach (7.4), (7.8) und (9.9) $PP' \notin \Gamma$. Nehmen wir nun an, daß z. B. $P'P'' \in \Gamma$ ist. Es sei w ein in $[K]$ laufender PP''-Weg. w ist ungerade und enthält Kanten von $[B_a]$. Wäre $PP' \in \Gamma$, so wäre $w' = (PP'P'') \subseteq [L_a]$ und w' gerade. Dies wäre jedoch ein Widerspruch zu (10.2).

2) Es sei $C_2 = \emptyset$ und nehmen wir an, daß ein $Q \in K(P)$ und ein $Q' \in K(P')$ mit $Q \neq Q'$ existieren. $\widetilde{w}$ sei ein in $[K]$ liegender QQ'-Weg. Dann ist $w = (PQ) \cup \widetilde{w} \cup (Q'P')$ ein in $[K]$ laufender gerader PP'-Weg, der Kanten von $[B_a]$ enthält. Wäre $PP' \in \Gamma$, so wäre (PP') ein in $[L_a]$ liegender ungerader Weg. Das wäre aber wieder ein Widerspruch zu (10.2).

3) Endlich sei $C_2 = \emptyset$ und $K(P) = K(P') = \{Q\}$. Wegen $\nu(K(D)) > 1$ gibt es ein $P'' \in C_1$ und ein $Q'' \in K(P'')$ mit $Q'' \neq Q$. P'' ist von P und P' verschieden. Dann ist nach 2) $PP'' \notin \Gamma$ und $P'P'' \notin \Gamma$, und so folgt aus (9.9) $PP' \notin \Gamma$.

(10.7) *Ist $\nu(K(L_a)) = 1$ so ist $[L_a]$ ein vollständig-chromatischer Graph.*

Beweis. Es sei $K(L_a) = \{Q\}$. Dann ist Q mit L_a vollständig verbunden, und die Länge jedes in $[K]$ laufenden L_aL_a-Weges ist gleich 2. Sind P_1, P_2 und P_3 verschiedene Punkte von L_a, so folgt nach (9.9) aus $P_1P_2 \notin \Gamma$ und $P_2P_3 \notin \Gamma$ die Behauptung $P_1P_3 \notin \Gamma$. Dies bedeutet aber nach (1.23), daß $[L_a]$ vollständig-chromatisch ist.

(10.8) *L_b und $B_a = K(L_a \sim L_a)$ sind vollständig verbunden.*

Beweis. Es sei $P \in L_a$ und $P' \in L_b$.

1) Nach (10.1) ist $PP' \in \Gamma$, nach (10.5) gibt es einen in $[K]$ laufenden geraden PP'-Weg w. Es sei $PQ \in w$. Dann gilt nach (10.3) $P'Q \in \Gamma$.

2) Ist $\nu(K(L_a)) = 1$, so folgt die Behauptung von (10.8) unmittelbar aus 1). Es sei nun $\nu(K(L_a)) > 1$. Dann ist nach (10.6) $[B_a]$ ein gerader Block von $[K]$ und mit der Abkürzung $F = L_a \cup B_a$ ist $[F]$ ein zusammenhängender paarer Graph. Nach 1) enthält $F(P')$ Punkte aus beiden Punktklassen von $[F]$, und daher ist $[F(P')]$ nach (8.13) ein gerader Block von $[F]$. Da laut (10.1) $L_a \subseteq F(P')$ besteht, enthält dieser Block sämtliche in $[F]$ liegenden L_aL_a-Wege, also auch sämtliche in $[K]$ laufenden L_aL_a-Wege, und so auch sämtliche Punkte von B_a. Es gilt daher $F(P') = F$.

§ 11. Vollständige Charakterisierung der normalen trennenden Punktmengen

In diesem Paragraphen soll Γ einen zusammenhängenden Graphen, L eine normale trennende Punktmenge von Γ und $[K]$ eine bezüglich L normale Komponente von $\Gamma - L$ bezeichnen.

(11.1) **Definitionen.** Die Menge derjenigen Punkte P von L, die mit $L - \{P\}$ vollständig verbunden sind, bezeichnen wir mit L_β. Ferner sei $L_\alpha = L - L_\beta$. Wir wollen hervorheben, daß die Mengen L_α und L_β nur von Γ und L, jedoch nicht von K abhängen.

Ist $[L]$ ein vollstädiger Graph, so ist $L_\alpha = \emptyset$. Ist $[L]$ nicht vollständig, so gilt $\nu(L_\alpha) > 1$.

Für jeden beliebigen Buchstaben j wollen wir, falls $L_j \subseteq L$ besteht, die Abkürzung

$$B_j = K(L_j \sim L_j)$$

anwenden.

Ist $\{L_x, L_y\}$ eine Zerlegung von L, so werden wir das geordnete Paar (L_x, L_y) als eine *geordnete Zerlegung* von L bezeichnen.

Wir wollen die geordnete Zerlegung (L_x, L_y) von L eine *bezüglich K paare Zerlegung* nennen, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

Es ist $\nu(L_x) > 1$, $[L_x]$ ist kein vollständiger Graph; $[L_x \cup B_x]$ ist ein zusammenhängender paarer Graph; $[B_x]$ ist, falls $\nu(B_x) > 1$ gilt, ein gerader Block von $[K]$; $[L_y]$ ist vollständig und L_y ist mit $L_x \cup B_x$ vollständig verbunden.

Ferner wollen wir, falls (L_x, L_y) eine bezüglich K paare Zerlegung von L ist, die durch die Punktklassen von $[L_x \cup B_x]$ bestimmte Zerlegung von L_x mit $\{L_{x1}, L_{x2}\}$ bezeichnen.

Wir nennen die geordnete Zerlegung (L_x, L_y) von L eine *bezüglich K vollständig-chromatische Zerlegung*, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

$[L_x]$ ist ein solcher vollständig-chromatischer Graph, der mindestens zwei Punktklassen enthält und sämtliche Punktklassen von $[L_x]$ sind mehrpunktig; es gibt ein $Q \in K$ mit $B_x = K(L_x) = \{Q\}$; $[L_y]$ ist vollständig und L_y ist mit $L_x \cup B_x$ vollständig verbunden.

Die bezüglich K paaren und vollständig-chromatischen Zerlegungen von L wollen wir als die *bezüglich K regulären Zerlegungen* von L bezeichnen.

Aus unseren Definitionen folgt unmittelbar:

(11.2) *Ist (L_x, L_y) eine bezüglich K reguläre Zerlegung von L, so ist $L_y \subseteq L_\beta$ und $L_\alpha \subseteq L_x$. Sind ferner $P_1, P_2 \in L_x$ $(P_1 \neq P_2)$, so haben sämtliche in $[K]$*

laufenden P_1P_2-Wege die gleiche Parität ; und zwar sind sie im vollständig-chromatischen Falle gerade, im paaren Falle, falls $P_1, P_2 \in L_{xi}$ ($i = 1$ oder 2) *besteht, ebenfalls gerade, falls $P_i \in L_{xi}$ $(i = 1,2)$ gilt, ungerade.*

Wir zeigen:

(11.3) *Es existiert höchstens eine bezüglich K reguläre Zerlegung (L_x, L_y) von L. Ist diese eine paare Zerlegung, so ist entweder $L_x = L_\alpha$ und $L_y = L_\beta$, oder $L_x = L_\alpha \cup \{P\}$ und $L_y = L_\beta - \{P\}$ mit einem geeigneten P von L_β, und im zweiten Falle kann man $L_{x1} = \{P\}$ und $L_{x2} = L_\alpha$ setzen. Ist sie eine vollständig-chromatische Zerlegung, so ist $L_x = L_\alpha$ und $L_y = L_\beta$.*

Beweis. 1) Es sei (L_x, L_y) eine bezüglich K paare Zerlegung von L. Dann sind zwei Fälle möglich:

a) Es gibt zu einem jeden $P \in L_x$ ein $P' \in L_x$ mit $P' \neq P$ und $PP' \notin \Gamma$. In diesem Falle ist offensichtlich $L_x = L_\alpha$ und $L_y = L_\beta$.

b) Es gibt ein $P \in L_x$, das mit $L_x - \{P\}$ vollständig verbunden ist. Da $[L_x]$ ein paarer Graph ist, besteht in diesem Falle $L_{x1} = \{P\}$, $L_{x2} = = L_x - \{P\}$, $P \in L_\beta$, $\nu(L_\alpha) > 1$, $L_y = L_\beta - \{P\}$ und $L_x = L_\alpha \cup \{P\}$.

2) Es seien (L_x, L_y) und $(L_{x'}, L_{y'})$ zwei bezüglich K paare Zerlegungen von L.

c) Nehmen wir erst an, daß (L_x, L_y) zum Falle b) gehört. Es gibt also ein $P \in L_\beta$ mit $L_x = L_\alpha \cup \{P\}$, $L_y = L_\beta - \{P\}$. Dann gehört $(L_{x'}, L_{y'},)$ ebenfalls zum Falle b). Denn wären $L_{x'} = L_\alpha$ und $L_{y'} = L_\beta$, so wäre für ein jedes $Q \in K(L_\alpha)$ $PQ \in \Gamma$. Das ist jedoch ein Widerspruch, da $K(L_\alpha) \subseteq B_x$ gilt und $[L_x \cup B_x]$ ein paarer Graph ist. Es existiert also ein $P' \in L_\beta$ mit $L_{x'} = L_\alpha \cup \{P'\}$ und $L_{y'} = L_\beta - \{P'\}$. Ist $P' \neq P$, so ist $P' \in L_y$ und es gilt für jedes $Q \in K(L_\alpha)$ $P'Q \in \Gamma$. Das bedeutet jedoch, da $K(L_\alpha) \subseteq B_{x'}$ und $[L_{x'} \cup B_{x'}]$ ein paarer Graph ist, wieder einen Widerspruch. Es besteht also $L_{x'} = L_x$ und $L_{y'} = L_y$.

d) Gehört (L_x, L_y) zum Falle a), so kann nach c) $(L_{x'}, L_{y'})$ ebenfalls nur zu a) gehören, und daher gilt $L_{x'} = L_x$ und $L_{y'} = L_y$.

3) Es sei (L_x, L_y) eine bezüglich K vollständig-chromatische Zerlegung von L. Dann gilt offensichtlich $L_x = L_\alpha$, $L_y = L_\beta$, und daher sind L_x und L_y eindeutig bestimmt. Es kann jetzt keine bezüglich K paare Zerlegung von L existieren. Denn wäre $(L_{x'}, L_{y'})$ eine solche Zerlegung, so wäre (da $L_\alpha \subseteq L_{x'}$ besteht) $B_\alpha \subseteq B_{x'}$. $[L_\alpha \cup B_\alpha]$ ist jedoch kein paarer Graph, und so könnte auch $[L_{x'} \cup B_{x'}]$ kein paarer Graph sein.

(11.4) **Definition.** Wir nennen *L bezüglich K* (oder $[K]$) *von paarem* oder *von vollständig-chromatischem Typ* je nachdem ob eine bezüglich K paare oder vollständig-chromatische Zerlegung von L existiert.

(11.5) *Es sei Γ u-triangulierbar und $[L]$ kein vollständiger Graph. Dann existiert eine bezüglich K reguläre Zerlegung von L, d. h. es ist L bezüglich K entweder von paarem oder von vollständig-chromatischem Typ.*

Beweis. Betrachten wir die unter (7.7) definierte geordnete Zerlegung (L_a, L_b) von L. Nach (10.1) ist $\nu(L_a) > 1$ und $[L_a]$ ist kein vollständiger Graph.

1) Ist $\nu\big(K(L_a)\big) > 1$, so ist nach (10.1), (10.6) und (10.8) (L_a, L_b) eine bezüglich K paare Zerlegung von L.

2) Ist $K(L_a) = B_a = \{Q\}$, so ist laut (10.8) Q mit L vollständig verbunden und laut (10.7) $[L_a]$ ein vollständig-chromatischer Graph. Es bezeichne $L_{a\beta}$ die Menge derjenigen L_a-Punkte P, die mit $L_a - \{P\}$ vollständig verbunden sind. Dann ist nach (10.1) $L_\beta = L_b \cup L_{a\beta}$ und $L_\alpha = L_a - L_{a\beta}$. $[L_\alpha]$ ist

ein nichtleerer vollständig-chromatischer Graph, der nur mehrpunktige Punktklassen enthält. Enthält nun $[L_\alpha]$ nur eine Punktklasse, so ist (L_α, L_β) eine bezüglich K paare Zerlegung von L. Enthält $[L_\alpha]$ mehr als eine Punktklasse, so ist (L_α, L_β) eine bezüglich K vollständig-chromatische Zerlegung von L.

(11.6) **Definitionen.** Ist Γ u-triangulierbar und $[L]$ kein vollständiger Graph, so wollen wir die nach (11.5) existierende und nach (11.3) eindeutig bestimmte, bezüglich K reguläre Zerlegung (L_x, L_y) von L die *durch* K (oder $[K]$) *bestimmte (geordnete) Zerlegung von* L[8] nennen. Ferner wir bezeichnen in »paarem Falle« die Zerlegung $\{L_{x1}, L_{x2}\}$ von L_x als die *durch* K (oder $[K]$) *bestimmte Zerlegung von* L_x.

Es bezeichne nun $[K']$ eine von $[K]$ verschiedene, bezüglich L normale Komponente von $\Gamma - L$, (L'_x, L'_y) die durch K' bestimmte geordnete Zerlegung von L und endlich, falls L bezüglich K' von paarem Typ ist, $\{L'_{x1}, L'_{x2}\}$ die durch K' bestimmte Zerlegung von L'_x.

(11.7) *Es sei Γ u-triangulierbar und $[L]$ kein vollständiger Graph. Dann ist L bezüglich K und K' von gleichem Typ. Ferner bestimmen K und K' dieselbe geordnete Zerlegung von L sowie in paarem Falle dieselbe Zerlegung der ersten Menge dieser geordneten Zerlegung.*

Beweis. 1) Zunächst nehmen wir an, daß L bezüglich K von vollständig-chromatischem Typ ist. Dann ist $L_x = L_\alpha$, $L_y = L_\beta$ und $[L_\alpha]$ enthält Kante L kann bezüglich K' nicht von paarem Typ sein. Denn nehmen wir das Gegenteil an. Dann ist nach (11.3) entweder $L'_x = L_\alpha$ oder $L'_x = L_\alpha \cup \{P\}$ mit $P \in L_\beta$. Ist nun $P_1P_2 \in [L_\alpha]$, so sind laut (11.2) sämtliche in $[K']$ laufenden P_1P_2-Wege ungerade, diejenigen die in $[K]$ laufen, jedoch gerade. Dies widerspricht der Behauptung (9.8). Aus der bewiesenen Behauptung folgt $L'_x = L_x$ und $L'_y = L_y$.

2) Es sei L bezüglicg K von paarem Typ. Dann ist L nach 1) auch bezüglich K' von paarem Typ.

a) Nehmen wir erst an, daß $L_x = L_\alpha \cup \{P\}$ $(P \in L_\beta)$ gilt. Nach (11.3) besteht dann $L_{x1} = \{P\}$ und $L_{x2} = L_\alpha$. Es ist jetzt jeder in $[K]$ laufende PL_α-Weg ungerade und jeder in $[K]$ laufende $L_\alpha L_\alpha$-Weg gerade. Nach (9.8) und (9.10) besteht dann dasselbe für die entsprechenden in $[K']$ laufenden Wege. Es kann daher P mit einem Punkt von $K'(L_\alpha)$ nicht verbunden sein, und wegen $K'(L_\alpha) \subseteq K'(L'_x \sim L'_x) = B'_x$ folgt daraus $P \notin L'_y$. Es gilt also $P \in L'_x$, d.h. es ist $L'_x = L_\alpha \cup \{P\}$. Dies ergibt $L'_{x1} = \{P\}$, $L'_{x2} = L_\alpha$.

b) Es sei nun $L_x = L_\alpha$. Dann ist nach a) nur $L'_x = L_\alpha$ möglich. Aus (11.2), (9.8) und (9.10) folgt jetzt, daß für je zwei L_α-Punkte P und P' sämtliche in $[K]$ und in $[K']$ laufende PP'-Wege die gleiche Parität haben. Daher kann man $L'_{x1}, = L_{x1}$ und $L'_{x2} = L_{x2}$ setzen.

Der folgende Satz ergibt die angekündigte Charakterisierung der normalen trennenden Punktmengen von u-triangulierbaren Graphen.

(11.8) **Satz.** *Der zusammenhängende Graph Γ ist dann und nur dann ungerad-triangulierbar, wenn jede normale trennende Punktmenge L von Γ die folgenden Eigenschaften besitzt: Entweder ist $[L]$ ein vollständiger Graph, oder ist L bezüglich sämtlicher solcher Komponenten von $\Gamma - L$, die bezüglich L normal sind, von gleichem Typ, und alle diese Komponenten bestimmen dieselbe geordnete Zerlegung (L_x, L_y) von L, ferner bestimmen sie im paaren Falle dieselbe Zerlegung von L_x.*

---

[8] (L_x, L_y) soll im folgenden immer diese Zerlegung von L bezeichnen.

Beweis. Die Notwendigkeit unserer Bedingungen folgt aus (11.7). Aus (9.10) und (11.2) sehen wir, daß sie auch hinreichend sind.

Aus (9.4), (11.7) und (4.19) bekommen wir den folgenden Satz.

(11.9) **Satz.** *Ist Γ ein zusammenhängender, ungerad-triangulierbarer Graph, L eine minimale trennende Punktmenge von Γ und sind $[K_1], \ldots, [K_n]$ $(n \geqq 2)$ die Komponenten von $\Gamma - L$, so ist $[L]$ entweder ein vollständiger Graph, oder ist L bezüglich sämtlicher K_i $(i = 1, \ldots, n)$ von gleichem Typ, und alle K_i $(i = 1, \ldots, n)$ bestimmen dieselbe geordnete Zerlegung (L_x, L_y) von L. Ferner besitzen die Mengen L_y, $B^i = K_i(L_x \sim L_x)$ $(i = 1, \ldots, n)$* und $H_L = L_x \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} B^i\right)$ *die folgenden Eigenschaften: $\Gamma - L_y$ ist zusammenhängend, $[H_L]$ ist im paaren Falle ein paarer, im vollständig-chromatischen Falle ein vollständig-chromatischer Graph, er ist aber in keinem Falle ein vollständiger Graph. Ferner ist in beiden Fällen $[H_L]$ ein Block von $\Gamma - L_y$ und L_y ist mit H_L vollständig verbunden.*

IV. Zerlegung von Graphen

§ 12. Die φ-Zerlegung

In diesem Paragraphen wollen wir mit Γ einen beliebigen Graphen, mit M die Menge der Punkte von Γ bezeichnen.

(12.1) **Definitionen.** Ist $F \subseteq M$ und sind je zwei Punkte von F (in Γ) nicht verbunden, so nennen wir die Punkte von F (in Γ) *unabhängig*. Ist $E \subseteq M$, so bezeichnen wir die maximale Anzahl der (in Γ) unabhängigen E-Punkte mit $\varphi_\Gamma(E)$. Mit anderen Worten: Es existieren $\varphi_\Gamma(E)$ unabhängige E-Punkte, $\varphi_\Gamma(E) + 1$ jedoch nicht. (Es ist $\varphi_\Gamma(\emptyset) = 0$.) $\varphi_\Gamma = \varphi_\Gamma(M)$ bedeutet die maximale Anzahl der (in Γ) unabhängigen Punkte von Γ.

Es sei $E \subseteq M$. Ist dann $F \subseteq E$ und sind die Punkte von F (in Γ) unabhängig und gilt $\nu(F) = \varphi_\Gamma(E)$, so nennen wir F ein *φ-System von E* (bezüglich Γ). Ein φ-System von M (bezüglich Γ) bezeichnen wir auch als ein *φ-System von Γ*.

(12.2) Die folgenden Behauptungen sind einfache Folgen unserer Definitionen:

Sind die Punkte von F in Γ unabhängig und ist $F' \subseteq F$, so gilt dasselbe für F'.

Ist $E' \subseteq E \subseteq M$, so ist $\varphi_\Gamma(E') \leqq \varphi_\Gamma(E)$.

Es sei $E \subseteq M$. Ist dann $\varphi_\Gamma(E) = 0$, so ist $E = \emptyset$, ist $\varphi_\Gamma(E) = 1$, so ist $[E]$ ein nichtleerer vollständiger Graph, ist $\varphi_\Gamma(E) = \nu(E)$, so sind die Punkte von E in Γ unabhängig. Ferner gelten auch die Umkehrungen dieser Behauptungen.

Ist $P_i \in \Gamma' \subseteq \Gamma$ $(i = 1, \ldots, n)$ und sind $P_1, \ldots, P_n$ in Γ unabhängig, so sind sie auch in Γ' unabhängig. Ist ferner $E \subseteq \Phi(\Gamma')$, so gilt $\varphi_{\Gamma'}(E) \geqq \varphi_\Gamma(E)$.

Ist $P_i \in \Gamma' \subseteq \Gamma$ $(i=1, \ldots, n)$ und $\Gamma' = [M']$ $(M' \subseteq M)$ und sind $P_1, \ldots, P_n$ in Γ' unabhängig, so sind sie auch in Γ unabhängig. Ist ferner $E \subseteq M'$, so gilt $\varphi_{\Gamma'}(E) = \varphi_\Gamma(E)$.

Entsprechend unserer früheren Vereinbarung werden wir im folgenden meistens statt $\varphi_\Gamma(E)$ kurz $\varphi(E)$ schreiben, und die Ausdrücke »in Γ«, »bezüglich Γ« weglassen.

(12.3) *Es sei $E \subseteq M$ und $\{E_1, \ldots, E_n\}$ eine Zerlegung von E. Dann gilt*

(1) $$\varphi(E) \leqq \sum_{i=1}^{n} \varphi(E_i) .$$

Beweis. Sind die Punkte von $F \subseteq E$ unabhängig, so gilt für $F_i = F \cap E_i$ $\nu(F_i) \leqq \varphi(E_i)$ $(i=1, \ldots, n)$ und $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$. Daher ist $\nu(F) \leqq \sum_{i=1}^{n} \varphi(E_i)$. Dies ergibt jedoch, falls F ein φ-System von E ist, die Ungleichung (1).

(12.4) *Es sei $E \subset M$, $E' \subset M$, $E \cap E' = \emptyset$ und $[E']$ ein vollständiger Graph. Dann gilt $\varphi(E \cap E') \leqq \varphi(E) + 1$. Besteht ferner für jeden Punkt P von E' $\varphi(E \cup \{P\}) = \varphi(E)$, so gilt $\varphi(E \cup E') = \varphi(E)$.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus (12.3). Um die zweite zu beweisen, sei F ein φ-System von $E \cup E'$. Es gilt $\nu(F) = \varphi(E \cup E') \geqq \varphi(E)$ und $F \cap E'$ kann höchstens einen Punkt enthalten. Ist $F \cap E' = \emptyset$, so ist $\nu(F) \leqq \varphi(E)$. Ist $F \cap E' = \{P\}$, so ist $\nu(F) \leqq \varphi(E \cup \{P\}) = \varphi(E)$.

(12.5) **Definitionen.** Wir nennen die Teilmenge E von M (bezüglich Γ) *φ-zerlegbar*, wenn eine solche *echte* Zerlegung $\{E_1, \ldots, E_n\}$ von E existiert, daß

(1) $$\varphi(E) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(E_i) .$$

Eine Zerlegung $\{E_1, \ldots, E_n\}$ nennen wir dann eine echte Zerlegung, falls mindestens zwei der E_i nichtleer sind. Wir bezeichnen eine der Gleichung (1) genügende echte Zerlegung von E als eine *φ-Zerlegung von E* (bezüglich Γ). Den Graphen Γ wollen wir *φ-zerlegbar* nennen, wenn M (bezüglich Γ) φ-zerlegbar ist. Die φ-Zerlegungen von M (bezüglich Γ) werden wir auch als die *φ-Zerlegungen von Γ* bezeichnen.

Die folgenden Behauptungen sind einfache Folgen unserer Definitionen:

(12.6) *Ist $\{E_1, \ldots, E_n\}$ $(n \geqq 3)$ eine φ-Zerlegung von $E \subseteq M$ und ist $\bigcup_{i=3}^{n} E_i \neq \emptyset$, so ist auch $\{E_1 \cup E_2, E_3, \ldots, E_n\}$ eine φ-Zerlegung von E.*

(12.7) *Die vollständigen Graphen sind nicht φ-zerlegbar.*

(12.8) *Ist $\{E_1, \ldots, E_n\}$ eine solche echte Zerlegung von $E \subseteq M$, daß Γ keine E_iE_j-Kanten $(i \neq j;\ i,j = 1, \ldots, n)$ enthält, so ist $\{E_1, \ldots, E_n\}$ eine φ-Zerlegung von E.*

(12.9) *Es sei $E \subseteq M' \subseteq M$ und $\Gamma' = [M']$. Dann ist E bezüglich Γ und Γ' gleichzeitig φ-zerlegbar oder nicht φ-zerlegbar.*

§ 13. Zerlegbarkeitssätze

Laut (12.8) gilt:

(13.1) *Ist Γ nicht zusammenhängend und sind $[K_i]$ $(i = 1, \ldots, n;\ n \geqq 2)$ die Komponenten von Γ, so ist $\{K_1, \ldots, K_n\}$ eine φ-Zerlegung von Γ.*

(13.2) *Es sei $\emptyset \neq J \subset M = \Phi(\Gamma)$, $M' = M - J$, $[J]$ ein vollständiger Graph und $\{E_1, \ldots, E_n\}$ eine solche φ-Zerlegung von M', bei der $E_i \neq \emptyset$ $(i = 1, \ldots, n)$ gilt. Es sei ferner mit den Bezeichnungen von (1.5) $H_i = E_i(M' - E_i)$ $(i =$*

$= 1, \ldots, n$) *und* $H = \bigcup_{i=1}^{n} H_i$. *Endlich nehmen wir an, daß* J *mit* H *vollständig verbunden ist. Dann ist* Γ φ*-zerlegbar und es gibt eine* φ*-Zerlegung* $\{E'_1, \ldots, E'_n\}$ *von* M *mit* $E_i \subseteq E'_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Beweis. 1) Nehmen wir erst an, daß es ein $P \in J$ gibt mit

$$\varphi(E_i \cup \{P\}) = \varphi(E_i) + 1 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Es sei F_i ein φ-System von $E_i \cup \{P\}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Dann ist $\nu(F_i) = \varphi(E_i) + 1$ und $P \in F_i$, und demzufolge gilt $F_i \cap H \neq \emptyset$ $(i = 1, \ldots, n)$. Daraus folgt, daß die Punkte von $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ unabhängig sind. Nach (12.4) ist

$$\varphi(M') + 1 \geqq \varphi(M) \geqq \nu(F) = 1 + \sum_{i=1}^{n} (\nu(F_i) - 1) = \varphi(J) + \sum_{i=1}^{n} \varphi(E_i) =$$
$$= 1 + \varphi(M').$$

Es ist also $\{J, E_1, \ldots, E_n\}$, und nach (12.6) auch $\{J \cup E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ eine φ-Zerlegung von M.

2) Nehmen wir jetzt an, daß es für einen jeden J-Punkt P einen $i\,(1 \leqq i \leqq n)$ gibt mit $\varphi(E_i \cup \{P\}) = \varphi(E_i)$. Es sei J_1 die Mengen derjenigen J-Punkte P, für die $\varphi(E_1 \cup \{P\}) = \varphi(E_1)$ gilt und J_j $(j = 2, \ldots, n)$ die Menge derjenigen J-Punkte P, für die $\varphi(E_i \cup \{P\}) = \varphi(E_i) + 1$ $(i = 1, \ldots, j-1)$ und $\varphi(E_j \cup \{P\}) = \varphi(E_j)$ besteht. $\{J_1, \ldots, J_n\}$ ist dann eine Zerlegung von J. Da jedes $[J_j]$ $(j = 1, \ldots, n)$ ein vollständiger Graph ist, gilt nach (12.4) für $E'_j = E_j \cup J_j$ die Gleichung $\varphi(E'_j) = \varphi(E_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$. $z = \{E'_1, \ldots, E'_n\}$ ist eine echte Zerlegung von M und es gilt

$$\varphi(M) \leqq \sum_{i=1}^{n} \varphi(E'_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(E_i) = \varphi(M') \leqq \varphi(M)$$

z ist also eine gesuchte φ-Zerlegung von M.

(13.3) *Es sei* Γ *zusammenhängend,* L *eine trennende Punktmenge von* Γ, *und* $[L]$ *ein vollständiger Graph. Dann ist* Γ φ*-zerlegbar.*

Beweis. Es sei $M' = \Phi(\Gamma) - L$ und $[K_1], \ldots, [K_n]$ seien die Komponenten von M'. Nach (13.1) ist $\{K_1, \ldots, K_n\}$ eine φ-Zerlegung von M'. Dann bekommen wir aus (13.2) (mit $H = \emptyset$) unsere Behauptung.

(13.4) *Es seinen* $[B_1]$ *und* $[B_2]$ *zwei solche Blöcke von* Γ, *für die* $B_1 \cap B_2 = \{R\}$ *und* $[B_1] \cup [B_2] = \Gamma$ *bestehen. Dann ist eine der Zerlegungen*

$$\{B_1, B_2 - \{R\}\} \quad \text{und} \quad \{B_1 - \{R\}, B_2\}$$

eine φ*-Zerlegung von* Γ.

Beweis. Es sei $E_i = B_i - \{R\}$ $(i = 1,2)$. Dann ist nach (12.8) $\{E_1 E_2\}$ eine φ-Zerlegung von $M' = E_1 \cup E_2$. Setzt man nun $J = \{R\}$, so ist mit den Bezeichnungen von (13.2) $H = \emptyset$ und so gibt (13.2) die Richtigkeit unserer Behauptung.

(13.5) **Satz.** *Es sei* Γ *ein zusammenhängender Graph,* $\varphi(\Gamma) = M$, $J \subset M$, $[J]$ *ein vollständiger Graph,* $M' = M - J$, $[M']$ *zusammenhängend,* $[H]$ *ein*

Block von $[M']$, J mit H vollständig verbunden und endlich H φ-zerlegbar. Dann ist Γ φ-zerlegbar.

Beweis. 1) Ist $H = M$, so ist die Behauptung trivial. Ist $H \subset M$ und $J = \emptyset$, so besitzt Γ trennende Punkte (s. (4.18) und (3.14)), und deshalb ist Γ nach (13.3) φ-zerlegbar. Wir nehmen im folgenden an, daß $J \neq \emptyset$ ist. Dann gilt $\varphi(J) = 1$. Es besteht ferner $\varphi(M') \leqq \varphi(M) \leqq \varphi(M') + \varphi(J)$. Ist $\varphi(J) + \varphi(M') = \varphi(M)$, so ist $\{J, M'\}$ eine φ-Zerlegung von M. Wir dürfen daher m folgenden nur den Fall

(1) $$\varphi(M') = \varphi(M)$$

betrachten.

2) Nehmen wir erst an, daß ein solches φ-System F von M' existiert, das keinen H-Punkt enthält. Dann ist $H \subset M'$. Es seien $[K_1], \ldots, [K_n]$ $(n \geqq 1)$ die Komponenten von $[M'] - [H]$. Nach (4.18) sind diese Komponenten solche Blöcke von $[M']$, die in den verschiedenen Punkten $R_1, \ldots, R_n$ den Graphen $[H]$ berühren. Es ist jetzt $H = \{R_1, \ldots, R_n\}$. Denn wäre P ein von den Punkten $R_1, \ldots, R_n$ verschiedener H-Punkt, so könnte P nach (3.14) von den K_i-Punkten nur mit R_i verbunden sein $(i = 1, \ldots, n)$, und daher wären die Punkte von $F \cup \{P\}$ unabhängig. Das ist ein Widerspruch. Da $[H]$ ein Block von $[M']$ und $H \subset M'$ ist, muß $n \geqq 2$ bestehen. Es sei $F_i = F \cap K_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Dann ist $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$. Ferner gilt $\nu(F_i) = \varphi(K_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Denn nehmen wir z. B. an, daß $\nu(F_1) < \varphi(K_1)$ gilt. Bezeichne F_1^* ein φ-System von K_1. Da F_1^* von H nur den Punkt R_1 enthalten kann, sind nach (3.14) die Punkte von $F^* = F_1^* \cup \left(\bigcup_{i=2}^{n} F_i\right)$ unabhängig. Das ist ein Widerspruch. Wir können also behaupten:

$$\varphi(M') = \nu(F) = \sum_{i=1}^{n} \nu(F_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(K_i)\,.$$

Es ist also $\{K_1, \ldots, K_n\}$ eine φ-Zerlegung von M'. Da $K_i \neq \emptyset, H_i = K_i(M' - K_i) = \{R_i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ und $H = \bigcup_{i=1}^{n} H_i$ besteht, ist Γ nach (13.2) φ-zerlegbar.

3) Nehmen wir jetzt an, daß *jedes* φ-System von M' H-Punkte enthält. Ist $H = M'$, so folgt die φ-Zerlegbarkeit von Γ unmittelbar aus (13.2). Es sei $H \subset M'$ und K_i und R_i $(i = 1, \ldots, n;\ n \geqq 1)$ sollen dieselbe Bedeutung haben, wie in 2). Dann ist für $\overline{K}_1 = M' - (K_1 - \{R_1\})$ der Graph $[\overline{K}_1] = [M'] - [K_1]$ zusammenhängend und nach (4.18) ein Block von $[M']$. Ferner gilt $K_1 \cap \overline{K}_1 = \{R_1\}$ und $[K_1] \cup [\overline{K}_1] = [M']$. Laut (13.4) gibt es eine solche φ-Zerlegung $\{M_1, M_2\}$ von M', wo entweder $M_1 = K_1$ und $M_2 = \overline{K}_1 - \{R_1\}$ oder $M_1 = K_1 - \{R_1\}$ und $M_2 = \overline{K}_1$ ist. In keinem dieser Fälle kann gleichzeitig ein φ-System F_1 von M_1 und ein φ-System F_2 von M_2 mit $F_i \cap H = \emptyset$ $(i = 1,2)$ existieren. Denn in diesem Falle wäre $F_1 \subseteq K_1 - \{R_1\}$, $F_2 \subseteq \overline{K}_1 - \{R_1\}$, und demzufolge $F_1 \cup F_2$ ein solches φ-System von M', der keinen H-Punkt enthielte. Wir können also annehmen, daß für ein j $(j = 1$ oder $2)$ jedes φ-System von M_j H-Punkte enthält.

Es ist jetzt

$$(2) \qquad \varphi(M_j \cup J) = \varphi(M_j)\,.$$

Wäre nämlich $\varphi(M_j \cup J) = \varphi(M_j) + 1$, so wäre, falls F' ein φ-System von $M_j \cup J$ ist, $\nu(F' \cap J) = 1$, und daher gälte $\nu(F' \cap H) = \emptyset$. Dann wäre jedoch $F' \cap M_j$ ein solches φ-System von M_j, das keinen H-Punkt enthält. Aus (1) und (2) folgt mit $h \neq j$ ($h = 1$ oder 2)

$$\varphi(M_j \cup J) + \varphi(M_h) = \varphi(M_j) + \varphi(M_h) = \varphi(M') = \varphi(M)\,.$$

Es ist also $\{M_j \cup J, M_h\}$ eine φ-Zerlegung von M.

§ 14. Zerlegbarkeit von speziellen Graphen. Die τ-Zerlegung

(14.1) *Ist Γ ein paarer, jedoch kein vollständiger Graph, so ist Γ φ-zerlegbar.*

Beweis. Die Behauptung, daß der paare Graph Γ nicht vollständig ist, bedeutet folgendes: Es ist $\pi(\Gamma) > 1$ und im Falle $\pi(\Gamma) = 2$ sind die Punkte von Γ nicht verbunden. Es sei nun Γ ein paarer, jedoch kein vollständiger Graph und $\{M_1, M_2\}$ eine zu Γ gehörige Zerlegung von $\Phi(\Gamma) = M$. (Γ enthält also nur M_1M_2-Kanten.) Es gilt $\varphi_\Gamma \geqq 2$.

1) Nehmen wir erst an, daß Γ ein φ-System F mit $F_i = F \cap M_i \neq \emptyset$ ($i = 1,2$) besitzt. Setzen wir $E_i = M_i - F_i$ ($i = 1,2$). Dann ist

$$(1) \qquad \varphi(F_1 \cup E_2) = \nu(F_1)\,.$$

Ist nämlich F' ein φ-System von $F_1 \cup E_2$, so sind die Punkte von $F' \cup F_2$ unabhängig, und daher ist $\nu(F') + \nu(F_2) = \nu(F' \cup F_2) \leqq \nu(F_1) + \nu(F_2)$. Es ist also $\nu(F') \leqq \nu(F_1)$, und das bestätigt (1).

Ähnlicherweise kann man

$$(2) \qquad \varphi(F_2 \cup E_1) = \nu(F_2)$$

beweisen. Aus (1) und (2) folgt

$$\varphi(F_1 \cup E_2) + \varphi(F_2 \cup E_1) = \nu(F) = \varphi_\Gamma\,.$$

Das bedeutet jedoch, daß $\{F_1 \cup E_2, F_2 \cup E_1\}$ eine φ-Zerlegung von Γ ist.

2) Nehmen wir jetzt an, daß für jedes φ-System F von Γ entweder $F \subseteq M_1$ oder $F \subseteq M_2$ gilt. Enthält dann Γ keine Kanten, so ist wegen $\pi(\Gamma) > 1$ Γ nicht zusammenhängend, und daher nach (13.1) φ-zerlegbar. Es sei nun $P_1P_2 \in \Gamma$ ($P_1 \in M_1$, $P_2 \in M_2$) und $M' = \{P_1, P_2\}$, $M'' = M - M'$. Dann gilt $\varphi(M') = 1$ und $\varphi(M'') > 0$. Ferner ist

$$(3) \qquad \varphi(M'') < \varphi(M)\,.$$

Denn wäre $\varphi(M'') = \varphi(M)$, so wäre ein φ-System F von M'' auch ein φ-System von M, und daher müßte $F \subseteq M_i$ ($i = 1$ oder 2) bestehen. Dann wären die Punkte von $F \cup \{P_i\}$ unabhängig. Das bedeutet jedoch einen Widerspruch.

Aus (3) folgt $\varphi(M') + \varphi(M'') \leqq \varphi(M)$, und daher ist $\{M', M''\}$ eine φ-Zerlegung von Γ.

(14.2) *Ist Γ ein vollständig-chromatischer, jedoch kein vollständiger Graph, so ist Γ φ-zerlegbar.*

Beweis. Genügt Γ den erwähnten Bedingungen, so enthält Γ mehrpunktige Punktklassen. Es sei E_1 eine Punktklasse von Γ mit maximaler Anzahl von Punkten. Dann ist $\varphi_\Gamma = \nu(E_1)$. Es seien $E_1, \ldots, E_n$ die Punktklassen von Γ und es sei $P_i \in E_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, $M' = \{P_1, \ldots, P_n\}$, $M'' = M - M'$. $[M']$ ist ein nichtleerer, vollständiger Graph und $[M'']$ ein nichtleerer vollständig-chromatischer Graph (s. (1.21)). Ferner ist $E_1 - \{P_1\}$ eine Punktklasse von $[M'']$, und zwar eine solche mit maximaler Anzahl von Punkten. Wir bekommen so $\varphi(M') = 1$, $\varphi(M'') = \varphi_\Gamma - 1$, und daher ist $\{M', M''\}$ eine φ-Zerlegung von Γ.

(14.3) **Satz.** *Ist jedes ungerade Vieleck von Γ in Γ triangulierbar und ist Γ kein vollständiger Graph, so ist Γ φ-zerlegbar.*

Beweis. Es sei Γ u-triangulierbar, jedoch kein vollständiger Graph. Ist Γ nicht zusammenhängend, so ist er nach (13.1) φ-zerlegbar. Es sei nun Γ zusammenhängend. Γ besitzt eine minimale trennende Punktmenge L (s. (9.2)). Es seien $[K_1], \ldots, [K_n]$ die Komponenten von $\Gamma - L$. Ist $[L]$ vollständig, so ist Γ nach (13.3) φ-zerlegbar. Es sei nun $[L]$ nicht vollständig. Dann ist nach (11.9) L bezüglich sämtlicher K_i $(i = 1, \ldots, n)$ von gleichem Typ, und alle K_i $(i = 1, \ldots, n)$ bestimmen die selbe geordnete Zerlegung (L_x, L_y) von L. Ferner genügen nach (11.9), (14.1) und (14.2) Γ, $J = L_y$ und $H = L_x \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} B^i\right)$ $\left(B^i = K_i(L_x \sim L_x),\ i = 1, \ldots, n\right)$ sämtlichen Bedingungen von (13.5). Laut (13.5) ist dann Γ φ-zerlegbar.

(14.4) **Definitionen.** Eine Zerlegung $\{E_1, \ldots, E_n\}$ von $\Phi(\Gamma)$, die den Bedingungen $\varphi(E_i) \leq 1$ $(i = 1, \ldots, n)$ genügt, nennen wir eine *τ-Zerlegung* von Γ (s. Einleitung). Jeder Graph besitzt τ-Zerlegungen. (Ist $\Gamma = \emptyset$, so ist $\{\emptyset\}$, ist $\Phi(\Gamma) = \{P_1, \ldots, P_n\}$, so ist $\{\{P_1\}, \ldots, \{P_n\}\}$ eine τ-Zerlegung von Γ.) Wir haben in der Einleitung die Zahl τ_Γ durch die folgende Eigenschaft definiert: Es gibt eine aus τ_Γ Mengen bestehende τ-Zerlegung von Γ, und keine τ-Zerlegung von Γ enthält weniger als τ_Γ Mengen. Nach (12.3) gilt offensichtlich $\varphi_\Gamma \leq \tau_\Gamma$.

Nun beweisen wir endlich den Hauptsatz der vorliegenden Arbeit:

(14.5) **Satz.** *Ist jedes ungerade Vieleck des nichtleeren Graphen Γ in Γ triangulierbar, so gilt $\varphi_\Gamma = \tau_\Gamma$, d. h. es existiert eine solche Zerlegung $\{E_1, \ldots, E_n\}$ der Menge der Punkte von Γ, daß jedes E_i $(i = 1, \ldots, n)$ in Γ einen vollständigen Graphen spannt und n gleich der maximalen Anzahl der unabhängigen Punkte von Γ ist.*

Beweis. Es sei Γ u-triangulierbar und $\Gamma \neq \emptyset$. Ist $\pi(\Gamma) = 1$ so ist die Behauptung trivial. Es sei $m > 1$, und nehmen wir an, daß sie für jeden nichtleeren Graphen mit weniger als m Punkten richtig ist. Es sei ferner $\pi(\Gamma) = m$. Ist Γ vollständig, so ist die Behauptung trivial. Es sei nun Γ nicht vollständig. Dann gibt es nach (14.3) eine φ-Zerlegung $\{E'_1, \ldots, E'_n\}$ von Γ. Wir können $E'_i \neq \emptyset$ $(i = 1, \ldots, n)$ annehmen. Es gilt $\nu(E'_i) < m$ und $[E'_i]$ ist laut (8.10) u-triaugulierbar $(i = 1, \ldots, n)$. Nach der Induktionsannahme gibt es eine τ-Zerlegung von $[E'_i]$, die aus $\varphi(E'_i)$ Mengen besteht $(i = 1, \ldots, n)$. Wegen $\sum_{i=1}^{n} \varphi(E'_i) = \varphi_\Gamma$ bilden sämtliche Mengen dieser Zerlegungen eine aus φ_Γ Mengen bestehende τ-Zerlegung von Γ.

Bemerkung. Aus (14.5), (8.11) und (8.12) folgt, daß für jeden nichtleeren paaren und jeden vollständig-chromatischen Graphen Γ $\varphi_\Gamma = \tau_\Gamma$ besteht. Wir bemerken, daß man diese Behauptungen auch ohne Anwendung von (14.5), einfach aus (14.1) und (14.2) herleiten kann. Ferner soll noch einmal (s. Einleitung) erwähnt werden, daß die auf paare Graphen erhaltene Behauptung mit einem Satz von König ([5], S. 134. (2)) gleichwertig ist.

(Eingegangen: 18. August, 1961.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Descartes, Blanche: »A three colour problem«. *Eureka* (April, 1947 und März, 1948)
[2] Descartes, Blanche: »Solution to Advance Problem No. 4526«. *Amer. Math. Monthly*, **61** (1954) S. 352
[3] Dirac, G. A.: »Trennende Knotenpunktmengen und Reduzibilität abstrakter Graphen mit Anwendung auf das Vierfarbenproblem«. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **204** (1960) S. 116–131
[4] Dirac, G. A.: »On rigid circuit graphs«. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, **25** (1961) S. 71–76
[5] Gallai, T.: »Über extreme Punkt- und Kantenmengen«. *Annales Univ. Sci. Budapestinensis*, **2** (1959) S. 133–138
[6] Hajnal, A.—Surányi, J.: »Über die Auflösung von Graphen in vollständige Teilgraphen«. *Annales Univ. Sci. Budapestinensis*, **1** (1958) S. 113–121
[7] König, D.: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* (Leipzig, 1936)
[8] Kuratowski, C.: *Topologie* (Warschau, 1952, 2. Auflage)
[9] Whitney, H.: »Non-separable and planar graphs«. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **34** (1932) S. 339–362
[10] Whyburn, G. T.: *Analytic topology* (New York, 1942)

ГРАФЫ, В КОТОРЫХ НЕЧЕТНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ ТРИАНГУЛИРУЕМЫ

T. GALLAI

Резюме

В статье рассматриваются только такие конечные неориентированные графы, которые не содержат рёбра петель и в которых две точки связаны не более чем одним ребром. Точки $P_1, \ldots, P_n$ графа Γ мы назовём независимыми, если любые две из них не связаны никаким ребром от Γ. Обозначим через φ_Γ наибольшее число независимых точек, которые можно выбрать в графи Γ. n-угольник v в Γ мы назовём триангулируемым, если в Γ существуют $(n — 3)$ ребра, являющиеся диагоналями от v и которые попарно не скрещиваются. n-угольник мы назовем нечётным, если n нечётное число. Главный результат статьи может быть сформулирован следующим образом:

Если в графе Γ все нечётные многоугольники триангулируемы в Γ, тогда множество точек Γ можно разбить на φ_Γ подмножеств E_i $(i = 1, \ldots, \varphi_\Gamma)$ так, что для каждого i любые две точки от E_i связаны одним ребром от Γ.

ON TRIGONOMETRIC SUMS WITH GAPS

by

P. ERDŐS

A well known theorem states as follows:[1]

Let $n_1 < n_2 < \ldots,\ n_{k+1} / n_k > A > 1$ be an infinite sequence of real numbers and $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$ a divergent series satisfying

$$\lim_{N=\infty} (a_N^2 + b_N^2)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{N} a_k^2 + b_k^2 \right)^{-1/2} = 0 . \tag{1}$$

Then

$$\lim_{n\to\infty} \left| \underset{t}{\mathsf{E}} \left\{ \sum_{k=\infty}^{N} (a_k \cos 2\pi n_k t + b_k \sin 2\pi n_k t) < \right.\right. \tag{2}$$
$$\left.\left. < \omega \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} (a_k^2 + b_k^2) \right)^{1/2} \right\} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\omega} e^{-u^2/2}\, du .$$

($| \underset{t}{\mathsf{E}} \{ \quad \} |$ denotes the Lebesgue measure of the set in question).

In the present paper I shall weaken the lacunarity condition $n_{k+1}/n_k > A > 1$. In fact I shall prove the following

Theorem 1. *Let $n_1 < n_2 < \ldots$ be an infinite sequence of integers satisfying*

$$n_{k+1} > n_k \left(1 + \frac{c_k}{k^{1/2}} \right) \tag{3}$$

where $c_k \to \infty$. Then

$$\lim_{N=\infty} \left| \underset{t}{\mathsf{E}} \left\{ \sum_{k=1}^{N} \left(\cos 2\pi n_k (t - \vartheta_k) < \omega \cdot N^{1/2} \right\} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\omega} e^{-u^2/2}\, du . \tag{4}$$

It seems likely that the Theorem remains true if it is not assumed that the n_k are integers. On the other hand if $n_{k+1}/n_k \to 1$ is an arbitrary sequence of integers it is easy to construct examples which show that (1) is not enough

---

[1] R. SALEM and A. ZYGMUND: "On lacunary trigonometric series I. and II.", *Proc. Math. Acad. Sci. USA* **33** (1947) 333—338 and **34** (1948) 54—62.

For the history of the problem see M. KAC: "Probability methods in analysis and number theory". *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949) 641—665.

for the truth of (2). It is possible that (3) and

$$\lim_{N=\infty}\left(\sum{}' a_k^2 + b_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{N}(a_k^2+b_k^2)\right)^{-1/2} = 0$$

where in $\sum' \frac{1}{2} n_N < n_k \leqq n_N$ suffices for the truth of our Theorem. But I can not at present decide this question and in this paper only consider the case $a_k = b_k = 1$.

I can show that Theorem 1. is best possible in the following sense: To every constant c there exists a sequence n_k for which $n_{k+1} > n_k\left(1+\frac{c}{k^{1/2}}\right)$ but (4) is not true. To see this let u_k tend to infinity sufficiently fast. Put

$$n_{k^2+l} = n_k + lc_1\left[\frac{n_k}{k}\right],\quad 1 \leqq l \leqq 2k+1 .$$

Clearly $n_{r+1} > n_r\left(1+\frac{c}{r^{1/2}}\right)$ if c_1 is sufficiently large and it is not difficult to see that (4) can not be satisfied. We do not give the details.

Further I can prove the following

Theorem 2. *Let* $n_1 < n_2 < \ldots$ *be an infinite sequence of integers for which for every* $\varepsilon > 0$ *there exists a* $k_0 = k_0(\varepsilon)$ *so that for every* $k > k_0$

(5) $$n_{k+1} > n_k + n_{k-[\varepsilon k^{1/2}]} .$$

Then (4) *holds.*

It is not difficult to construct sequences for which (3) holds but (5) does not hold and sequences for which (5) holds and (3) not, or Theorems 1 and 2 are incomparable. (3) seems to be easier to verify, thus Theorem 1 is probably more useful. We will not give the proof of Theorem 2 since it is similar to that of Theorem 1.

To simplify the computations we will work out the proof of Theorem 1 only for a cosine series, the proof of the general case follows the same lines.

Theorem 1'. *Let* $n_1 < n_2 < \ldots$ *be an infinite sequence of integers satisfying* (3). *Then*

(4') $$\lim_{N=\infty}\left|\underset{t}{\mathsf{E}}\left\{\sum_{k=1}^{N}\cos 2\pi n_k t < \omega\left(\frac{N}{2}\right)^{1/2}\right\}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\omega} e^{-u^2/2}\,du .$$

A well known theorem of Chebyshev implies that to prove Theorem 1' it will suffice to show that for every l, $1 \leqq l < \infty$

(6) $$\lim_{N=\infty} I_N^{(l)} = \lim_{N=\infty}\int_0^1\left(\frac{\sum_{k=1}^{N}\cos 2\pi n_k t}{\left(\frac{N}{2}\right)^{1/2}}\right)^l dt = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} x^l e^{-x^2/2}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{if } l \text{ is odd,} \\ \dfrac{l!}{2^{l/2}\left(\dfrac{l}{2}\right)!} & \text{if } l \text{ is even.}\end{cases}$$

It is easy to see that ($\varepsilon_1 = \pm 1$, $1 \leq i \leq l$)

$$(7) \qquad \int_0^1 \prod_{i=1}^{l} \cos 2\pi n_i t = \frac{1}{2^l} \int_0^1 \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l} \cos\left(2\pi \sum_{i=1}^{l} \varepsilon_i n_i t\right) dt = \frac{h(n_1, \ldots, n_l)}{2^l}$$

where $h(n_1, \ldots, n_l)$ denotes the number of solutions of $\sum\limits_{i=1}^{l} \varepsilon_i n_i = 0$. From (7) we have

$$(8) \qquad \left(\frac{N}{2}\right)^{l/2} I_N^{(l)} = \frac{1}{2^l} \sum h(n_{i_1}, \ldots, n_{i_l})$$

where $i_1, \ldots, i_l$ runs through all the l-tuples formed from the integers $1 \leq r \leq N$ (where order counts). Clearly $\Sigma\, h(n_{i_1}, \ldots, n_{i_l})$ equals the number of solutions of

$$(9) \qquad \sum_{i=1}^{l} \varepsilon_i n_{r_i} = 0\,, \quad 1 \leq r_i \leq N \quad \text{(order counts here too).}$$

Thus to estimate $I_n^{(l)}$ we only have to estimate the number of solutions of (9). Assume first l even $l = 2s$. Then (9) has trivial solutions such that among the terms in (9) each n_r occurs the same number of times with a positive as with a negative sign. The number of these trivial solutions clearly equals

$$(10) \qquad (1 + o(1)) \frac{l!}{\left(\frac{l}{2}\right)!} N^{l/2}\,.$$

Now we prove the following

Lemma 1. *Let $\{n_k\}$ be a sequence of integers satisfying* (3). *Denote by $g_l(A, N)$ the number of solutions of*

$$(11) \qquad \sum_{i=1}^{l} \varepsilon_i n_{r_i} = A\,, \qquad 1 \leq r_l \leq \ldots \leq r_1 \leq N$$

where the trivial solutions are excluded.

Then

$$(12) \qquad \max_A g_l(A, N) = o(N^{l/2})\,.$$

(The trivial solutions can only occur if $A = 0$ and l is even).

From Lemma 1, (8) and (10) it follows that

$$\lim_{N=\infty} I_N^{(l)} = \begin{cases} 0 & \text{if } l \text{ is odd} \\ \dfrac{l!}{2^{l/2}\left(\frac{l}{2}\right)!} & \text{if } l \text{ is even} \end{cases}$$

which implies Theorem 1. Thus to complete our proof it will suffice to prove Lemma 1, and in fact Lemma 1 is the only new and difficult part of our paper.

First we show that the Lemma holds for $l = 1$ and $l = 2$. For $l = 1$ the Lemma is trivial, the number of solutions of (11) is at most one for $l = 1$. Now we need

Lemma 2. *The number of n_i satisfying* $(k \to \infty)$

$$n_k x^{-1} < n_i < n_k x$$

is $o(k^{1/2} \log x) + o(1) + o((\log x)^2)$.

The Lemma follows immediately from (3). (The term $o(1)$ is needed only for small x and the term $o((\log x)^2)$ only for very large x.)

If $\pm n_{r_1} \pm n_{r_2} = A (n_{r_1} > n_{r_2})$ we must have (by (3))

$$\left|\frac{A}{2}\right| \leqq n_{r_1} \leqq |A|\, N. \tag{13}$$

From (13) and Lemma 2 we obtain that the number of solutions of (11) for $l = 2$ is $o(N^{1/2} \log N) = o(N)$ uniformly in A which proves Lemma 1 for $l = 2$.

Now we use induction with respect to l. Assume that (12) holds for all $l' < l$, we shall then prove that (12) holds for l too. We assume now $l \geqq 3$ and distinguish four cases.

In case I.

$$\frac{1}{N} n_{r_i} \leqq n_{r_{i+1}} \leqq n_{r_i} \tag{14}$$

holds for all $1 \leqq i \leqq l - 1$.

Put $(1 \leqq s \leqq l - 1)$

$$2^n \leqq \max n_{r_i}/n_{r_{i+1}} = n_{r_s}/n_{r_{s+1}} < 2^{n+1}. \tag{15}$$

Clearly $0 \leqq n \leqq \log N/\log 2$. Evidently there are at most N choices for n_{r_1}. Let $i < l - 1$. If $n_{r_1}, \ldots, n_{r_i}$ have already been determined then by (15) and Lemma 2 there are at most $o(N^{1/2} n)$ choices for $n_{r_{i+1}}$. Now we show that for n_{r_s} there at most are $o(N^{1/2}/2^n) + o(1) = o\left(\frac{N^{1/2}}{2^{n/4}}\right)$ choices (if $n_{r_1}, \ldots, n_{r_{s-1}}$ has already been chosen). To see this observe that from (15) we have

$$\left|\sum_{i=s+1}^{l} \varepsilon_i n_{r_i}\right| < \frac{l \cdot n_{r_s}}{2^n}. \tag{16}$$

Thus from (11) and (16)

$$A - \sum_{i=1}^{s-1} \varepsilon_i n_{\,i} = \varepsilon_s n_{r_s} + \frac{\theta l}{2^n} n_{r_s}, \ |\theta| < 1. \tag{17}$$

(17) implies that n_{r_s} must lie in an interval (α, β) with $\alpha < \beta < \alpha \left(1 + \frac{cl}{2^n}\right)$. Thus from Lemma 2 there are at most $o\left(\frac{N^{1/2}}{2^n}\right) + o(1) = o\left(\frac{N^{1/2}}{2^{n/4}}\right)$ choices for n_{r_s} as stated. Finally if $n_{r_1}, \ldots, n_{r_{l-1}}$ has already been determined there are at most 2^{l-1} choices for n_{r_l} (i. e. $\sum_{i=1}^{l-1} \varepsilon_i n_{r_i}$ can be chosen in 2^{l-1} ways). Thus the

total number of choices for $n_{r_1}, \ldots, n_{r_l}$ satisfying (15) is at most

$$cN(o(N^{1/2} n))^{l-3} o\left(\frac{N^{1/2}}{2^{n/4}}\right) = o(N^{l/2}) \frac{n^{l-3}}{2^{n/4}}. \tag{18}$$

From (18) we evidently obtain that the number of solutions of (11) in case I is

$$o(N^{l/2}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{l-3}}{2^{n/4}} = o(N^{l/2}).$$

In case II (14) holds for $i < j, j \geq 3$ and for $i = j \leq l - 1$

$$n_{r_{j+1}} < \frac{1}{N} n_{r_j}. \tag{19}$$

We show that if $n_{r_1}, \ldots, n_{r_{j-1}}$ has already been determined, then there are only a bounded number of choices of n_{r_j}. To see this observe that by (19)

$$\left(\sum_{i=j+1}^{l} \varepsilon_i n_{r_i}\right) < \frac{l}{N} n_{r_j}.$$

Thus from (11)

$$A - \sum_{i=1}^{j-1} \varepsilon_i n_{r_i} = \varepsilon_j n_{r_j} + \theta \frac{ln_{j}}{N}, \quad |\theta| < 1 \tag{20}$$

or n_{r_j} must lie in an interval (α, β) with $\alpha < \beta < \alpha \left(1 + \frac{cl}{N}\right)$. Thus by Lemma 2 there are only a bounded number of choices for n_{r_j}.

Put

$$2^n \leq \max_{1 \leq i \leq j-1} n_{r_i}/n_{r_{i+1}} = n_{r_s}/n_{s+1} < 2^{n+1}. \tag{15'}$$

As in case I. there are at most $o(N^{1/2}/2^{n/4})$ choices for n_{r_s}, $o(N^{1/2}n)$ choices for n_{i}, $1 < i < j$, $i \neq s$ and at most N choices for n_{r_1}. Thus we see as in case I that for $n_{r_1}, \ldots, n_{r_j}$ there are at most $o(N^{j/2})$ choices. If $n_{r_1}, \ldots, n_{r_j}$ are already chosen there are 2^j choices for $\sum_{i=1}^{j} \varepsilon_i n_{r_i}$. Hence there are only $2^j o(N^{j/2}) = o(N^{j/2})$ choices for $\sum_{i=1}^{j} \varepsilon_i n_{r_i}$. By our induction hypothesis there are $o(N^{(-j)/2})$ solutions of

$$A - \sum_{i=1}^{j} \varepsilon_i n_{r_i} = \sum_{i=j+1}^{l} \varepsilon_i n_{r_i} \tag{21}$$

in $n_{j+1}, \ldots, n_{r_l}$. Thus finally there are $o(N^{l/2})$ solutions of (11) in case II.

In case III (14) holds for $i = 1$, but

$$n_{r_3} < \frac{1}{N} n_{r_2}.$$

The same proof as in case II shows that if n_{r_1} has already been chosen there are only a bounded number of choices for n_{r_2}. Thus since there are at most N choices for n_{r_1} there are at most cn choices for $\varepsilon_1 n_{r_1} + \varepsilon_2 n_{r_2}$. Hence arguing as in (21) we see that by our induction hypothesis the number of solutions of (11) is $o(N^{l/2})$ in case III too.

In case IV $n_{r_2} < \frac{1}{N} n_{r_1}$ i. e. (14) never holds. We see by the same argument as in (20) that there are only a bounded number of choices for n_{r_1} and therefore again arguing as in (21) we obtain by our induction hypothesis that in case IV (11) has $o(N^{l/2})$ solutions.

Thus combining the four cases we obtain that the number of solutions of (11) is $o(N^{l/2})$ uniformly in A, or (12) — and therefore Lemma 1 is proved. Hence the proof of Theorem 1 is complete.

Let $f(k) \to \infty$ monotonically. It is easy to see that

$$n_k = [e^{k^{1/2} f(k)}] \tag{22}$$

satisfies (3), hence Theorem 1 holds for the sequence (22).

It is not difficult to see that Lemma 1 is best possible in some sense, namely if (3) is replaced by

$$n_{k+1} > n_k \left(1 + \frac{c}{k^{1/2}}\right) \qquad c \text{ independent of } k$$

then (12) in general will not hold. On the other hand (12) may very well hold for special sequences which do not satisfy (3). In particular I would guess that (12) and therefore Theorem 1 will hold if $n_k = [e^{k^\alpha}]$ for every $\alpha > 0$. I cannot even prove this for $\alpha = 1/2$.

(Received August 25, 1961.)

О ЛАКУНАРНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДАХ

P. ERDŐS

Резюме

В работе доказывается следующая теорема: пусть $n < n_2 < \ldots$ последовательность натуральных чисел для которых

$$n_{k+1} > n_k \left(1 + \frac{c_k}{\sqrt{k}}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

где

$$\lim_{k \to \infty} c_k = +\infty .$$

Пусть $S_N(t) = \sum_{k=1}^{N} \cos 2\pi n_k (t - \vartheta_k)$ где вещественные числа ϑ_k произвольные. Пусть $\underset{t}{\mathsf{E}}\{\quad\}$ обозначает множество тех чисел t в интервале $0 \leq t \leq 1$ для которых условие в скобках выполняется, и пусть $|\underset{t}{\mathsf{E}}|$ — мера Lebesgue-а множества $\underset{t}{\mathsf{E}}$. Тогда имеем для всех ω $(-\infty < \omega < \infty)$

$$\lim_{N \to \infty} |\underset{t}{\mathsf{E}}\{S_N(t) < \omega \sqrt{N}\}| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\omega} e^{-u^2/2} du .$$

A GENERALIZATION OF A THEOREM OF SZEGŐ

by

BÉLA GYIRES[1]

Dedicated to Professor P. Turán
at his 50 th birthay.

1. In the present paper we are going to consider quadratic matrices of order p, the elements of which are real or complex functions defined in the interval $[-\pi, \pi]$. In the sequel such matrices will be called functional matrices. If we state a condition for a functional matrix, this must be taken in the sense that the condition must hold for all elements of the matrix. In this sense we speak of bounded, measurable, integrable, continuous etc. functional matrices. By the integral of an integrable functional matrix we understand the matrix formed from the integrals of its elements, and denote this by writing the functional matrix in question as integrated behind the integral sign. The unit matrix and the zero matrix will always be denoted by $\boldsymbol{E}$ and $\boldsymbol{O}$ respectively, and the spur of a matrix will be denoted by an "Sp" written before the sign of the matrix.

A Hermitian matrix will be called positive definite, if the corresponding Hermitian form vanishes only in the point 0, and takes in every other place positive values. If the form takes the value zero also outside the point 0, while it is nowhere negative, the corresponding matrix will be called positive semidefinite. The positive definite and the positive semidefinite Hermitian matrices will have the common name of nonnegative definite matrices. Let $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ be Hermitian matrices. We say that $\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{B}$, if $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ is nonnegative definite, and $\boldsymbol{A} > \boldsymbol{B}$ if $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ is positive definite.

In the sequel ν runs through the rational integers, n through the nonnegative integers, k, l through the integers from 0 to n, and α through the integers from 1 to p. $\boldsymbol{z}$ and $\boldsymbol{z}_k$ denote respectively an arbitrary row vector of the p-dimensional space with complex elements, while $\boldsymbol{x}_k$ stands for a quadratic matrix of order p built from arbitrary complex numbers.

2. Let $\boldsymbol{f}(x)$ be a Lebesgue measurable Hermitian matrix, positive definite on a set of positive measure, and nonnegative definite elsewhere. With the aid of this functional matrix we form the matrices

$$\boldsymbol{a}_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \boldsymbol{f}(x)\, e^{-i\nu x}\, dx$$

and with the aid of these the hypermatrices

$$\boldsymbol{T}_n(\boldsymbol{f}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_0 & \boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_n \\ \boldsymbol{a}_{-1} & \boldsymbol{a}_0 & \dots & \boldsymbol{a}_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \boldsymbol{a}_{-n} & \boldsymbol{a}_{-n+1} & \dots & \boldsymbol{a}_0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

[1] University of Debrecen. Department of mathematics.

$\boldsymbol{T}_n(\boldsymbol{f})$ and the determinant $D_n(\boldsymbol{f}) = \text{Det}\, \boldsymbol{T}_n(\boldsymbol{f})$ will be called the n-th Toeplitzian matrix and determinant respectively, generated by the functional matrix $\boldsymbol{f}(x)$. (For the case $p = 1$ see [2], 17, 38.)

As one easily sees, these are Hermitian matrices. It is also easy to show that they are positive definite. Indeed, we form with the vectors $\boldsymbol{z}_k$ the Hermitian form

$$\sum_{k,l=0}^{n} \boldsymbol{z}_k \boldsymbol{a}_{l-k} \boldsymbol{z}_l^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{z}_k e^{ikx} \right) \boldsymbol{f}(x) \left(\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{z}_k e^{ikx} \right)^* dx . \tag{2}$$

Since $\boldsymbol{f}(x)$ is a Hermitian functional matrix, positive definite on a set of positive measure, the function

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{z}_k e^{ikx} \right) \boldsymbol{f}(x) \left(\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{z}_k e^{ikx} \right)^*$$

is positive on a set of positive measure, if only $\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{z}_k \boldsymbol{z}_k^* > 0$, i. e. if the right hand side of (2) is positive.

The purpose of the present paper is to demonstrate the following

Theorem. *If $\boldsymbol{f}(x)$ is a Lebesgue measurable, nonnegative definite Hermitian functional matrix, then*

$$\frac{D_n(\boldsymbol{f})}{D_{n-1}(\boldsymbol{f})} \downarrow \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \text{Det}\, \boldsymbol{f}(x)\, dx \right\} \tag{3}$$

and this limit is to be taken equal to zero, if

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log \text{Det}\, \boldsymbol{f}(x)\, dx = -\infty . \tag{4}$$

The author has investigated matrices of the form (1) in several papers ([3], [4], [5]). In all three of these he has derived the theorem just formulated under more special conditions. So, in his paper [4], the author has obtained the limit (3) under the assumption that $\boldsymbol{f}(x)$ is a continuous, real, symmetric functional matrix, and

$$\inf \boldsymbol{z}\boldsymbol{f}(x)\boldsymbol{z}^* = m > 0\,, \quad x \in [-\pi, \pi]\,, \quad \boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^* = 1 . \tag{5}$$

In papers [3] and [5] the expression (3), and its equivalent form based on the limit relation

$$\lim_{n \to \infty} \frac{D_n(\boldsymbol{f})}{D_{n-1}(\boldsymbol{f})} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n+1]{D_n(\boldsymbol{f})} \tag{6}$$

has occurred as a special case of more general theorems. Indeed, this was the case in [3] for continuous Hermitian functional matrices satisfying condition (5), while in [5] the condition of continuity was replaced by boundedness and measurability.

As is well known, eigenvalues of Toeplitzian matrices in the case $p = 1$, i.e. when the generating functional matrix is replaced by a generating function, have first been investigated by G. Szegő ([8], [9], [10]). He was also the first to obtain for the case $p = 1$ the result expressed in our theorem ([8], [9], [10]).

In the proof of our theorem we make use of the following theorem of HELSON and LOWDENSLAGER ([6], 186):

If $\boldsymbol{f}(x)$ is a Lebesgue measurable nonnegative definite Hermitian matrix and $d\boldsymbol{M}$ an arbitrary measure taking as values nonnegative Hermitian matrices and having the absolute continuous part $\frac{1}{2\pi}\boldsymbol{f}(x)\,dx$, then

$$\inf_{\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{P}} \frac{1}{p} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Sp}[(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{P})(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{P})^* \, d\boldsymbol{M}] = \exp\left\{\frac{1}{2\pi p} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Sp}\log \boldsymbol{f}(x)\,dx\right\}, \tag{7}$$

where $\boldsymbol{x}_0$ runs through all unimodular matrices and $\boldsymbol{P}$ through the trigonometric polynomial matrices

$$\boldsymbol{P}(e^{ix}) = \sum_{k>0} \boldsymbol{x}_k e^{ikx}. \tag{8}$$

(7) *must be taken equal to zero, if*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Sp}\log \boldsymbol{f}(x)\,dx = -\infty.$$

It is also known that the theorem just quoted of HELSON and LOWDENSLAGER has been proved for the case $p = 1$ by G. SZEGŐ under the assumption that $\boldsymbol{f}(x)$ is absolutely continuous, and later without this assumption by KOLMOGOROV ([7]).

In order to establish a connection between our theorem and that of HELSON and LOWDENSLAGER, we shall need the matricial generalization of the Lagrange transformation relative to positive definite Hermitian hypermatrices built from matrices of order p. This generalization will be given in **3.** The theorem itself will be proved under **4.** There it will also be pointed out that from a special case proved earlier [5] of the theorem of the author formulated in this paper the special case of the theorem of HELSON and LOWDENSLAGER can easily be derived.

3. Let the positive definite Hermitian matrix of order $(m + 1)p$

$$\boldsymbol{A}_m = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{00} & \boldsymbol{a}_{01} & \dots & \boldsymbol{a}_{0m} \\ \boldsymbol{a}_{10} & \boldsymbol{a}_{11} & \dots & \boldsymbol{a}_{1m} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \boldsymbol{a}_{m0} & \boldsymbol{a}_{m1} & \dots & \boldsymbol{a}_{mm} \end{pmatrix} \tag{9}$$

be given, which is built from matrices $\boldsymbol{a}_{kl}$ of order p. By the form belonging to the matrix (9) we understand the matrix

$$\sum_{k,l=0}^{m} \boldsymbol{x}_k \boldsymbol{a}_{kl} \boldsymbol{x}_l^* = \boldsymbol{H}_m(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m). \tag{10}$$

Now we prove the following lemma, constituting a generalization of the well known Lagrange transformation:

Lemma 1. *By the transformation*

$$(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m) = (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m)\, \boldsymbol{B}$$

defined with the aid of the hypermatrix

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{o} & \boldsymbol{o} & \ldots & \boldsymbol{o} \\ \beta_{01} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{o} & \ldots & \boldsymbol{o} \\ \beta_{02} & \beta_{12} & \boldsymbol{E} & \ldots & \boldsymbol{o} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \beta_{0m} & \beta_{1m} & \beta_{2m} & \ldots & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}$$

built from matrices of order p which depend only on the elements of the matrix (9)' *the positive definite Hermitian form* (10) *can be given in the form*

$$\boldsymbol{H}_m(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m) = \xi_0 \gamma_0 \xi_0^* + \xi_1 \gamma_1 \xi_1^* + \ldots + \xi_m \gamma_m \xi_m^*,$$

where $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_m$ *are positive definite Hermitian matrices of order p.*

For $p = 1$ our theorem gives the Lagrange transformation for positive definite Hermitian forms.

Proof. Let

$$\boldsymbol{a}_{j0}\, \boldsymbol{a}_{00}^{-1} = \beta_{0j} \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

and

$$\xi_0 = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_1 \beta_{01} + \ldots + \boldsymbol{x}_m \beta_{0m}.$$

Since

$$\xi_0\, \boldsymbol{a}_{00}\, \xi_0^* = \boldsymbol{x}_0\, \boldsymbol{a}_{00}\, \boldsymbol{x}_0^* + \boldsymbol{x}_1\, \boldsymbol{a}_{10}\, \boldsymbol{x}_0^* + \ldots + \boldsymbol{x}_m\, \boldsymbol{a}_{m0}\, \boldsymbol{x}_0^* + \boldsymbol{x}_0\, \boldsymbol{a}_{01}\, \boldsymbol{x}_1^* +$$

$+ \boldsymbol{x}_0\, \boldsymbol{a}_{02}\, \boldsymbol{x}_2^* + \ldots + \boldsymbol{x}_0\, \boldsymbol{a}_{0m}\, \boldsymbol{x}_m^* +$ are members which do not contain $\boldsymbol{x}_0$, using the notation $\boldsymbol{a}_{00} = \gamma_0$ we obtain

$$\boldsymbol{H}_m(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m) = \xi_0 \gamma_0 \xi_0^* + \boldsymbol{H}_{m-1}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m).$$

Let $\boldsymbol{B}_m$ denote the matrix which arises from $\boldsymbol{B}$, if we replace by zeros all elements of $\boldsymbol{B}$ with the exception of those in the first column and in the diagonal, and let $\boldsymbol{A}_{m-1}$ denote the matrix of the form $\boldsymbol{H}_{m-1}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m)$, then from the equality

$$\boldsymbol{B}_m \begin{pmatrix} \gamma_0 & (\boldsymbol{o}) \\ (\boldsymbol{o}) & \boldsymbol{A}_{m-1} \end{pmatrix} \boldsymbol{B}_m^* = \boldsymbol{A}_m$$

it is clear that $\boldsymbol{A}_{m-1}$ is a positive definite Hermitian matrix of order np. But then, by the foregoing

$$\boldsymbol{H}_{m-1}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m) = \xi_1 \gamma_1 \xi_1^* + \boldsymbol{H}_{m-2}(\boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m).$$

Continuing this process, we obtain the theorem to be proved.

From our theorem there follows

$$\boldsymbol{A}_m = \boldsymbol{B} \begin{pmatrix} \gamma_0 & & & (\boldsymbol{o}) \\ & \gamma_1 & & \\ & & \ddots & \\ (\boldsymbol{o}) & & & \gamma_m \end{pmatrix} \boldsymbol{B}^*$$

and from this

$$\operatorname{Det} \boldsymbol{A}_m = D_m = \operatorname{Det} \boldsymbol{\gamma}_0 \operatorname{Det} \boldsymbol{\gamma}_1 \ldots \operatorname{Det} \boldsymbol{\gamma}_m .$$

In view of

$$\boldsymbol{H}_m(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_s, \boldsymbol{o}, \ldots, \boldsymbol{o}) = \sum_{i,j=0}^{s}{}' \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{a}_{ij} \boldsymbol{x}_j^* =$$

$$= (\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_1 \beta_{01} + \ldots + \boldsymbol{x}_s \beta_{0s}) \gamma_0 (\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_1 \beta_{01} + \ldots + \boldsymbol{x}_s \beta_{0s})^* +$$
$$+ (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \beta_{12} + \ldots + \boldsymbol{x}_s \beta_{1s}) \gamma_1 (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \beta_{12} + \ldots + \boldsymbol{x}_s \beta_{1s})^* +$$
$$+ \ldots + \boldsymbol{x}_s \gamma_s \boldsymbol{x}_s^* ,$$

if we denote by D_s the determinant obtained from Det $\boldsymbol{A}_m$ by leaving only the first $(s+1)p$ rows and columns while cancelling everything else, the relation

$$D_s = \operatorname{Det} \gamma_0 \operatorname{Det} \gamma_1 \ldots \operatorname{Det} \gamma_s \tag{11}$$

follows.

Lemma 2. *If the eigenvalues of γ_m are $\lambda_\alpha^{(m)}$, and $\boldsymbol{x}_m$ runs through all unitary matrices, then*

$$\inf \frac{1}{p} \operatorname{Sp} \boldsymbol{H}_m(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m) = \frac{1}{p} [\lambda_1^{(m)} + \ldots + \lambda_p^{(m)}]. \tag{12}$$

If, moreover, $\boldsymbol{x}_m$ runs through the matrices, whose determinants have the absolute value 1, then

$$\inf \frac{1}{p} \operatorname{Sp} \boldsymbol{H}_m(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m) = \sqrt[p]{\lambda_1^{(m)} \ldots \lambda_p^{(m)}} = \sqrt[p]{\frac{D_m}{D_{m-1}}} .$$

Proof. By Lemma 1 Sp $\xi_j \gamma_j \xi_j^* \geqq 0$, and therefore

$$\operatorname{Sp} \boldsymbol{H}_m(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m) \geqq \operatorname{Sp} \boldsymbol{x}_m \gamma_m \boldsymbol{x}_m^* . \tag{13}$$

Let γ_m have the Jordan normal form

$$\gamma_m \boldsymbol{U} \Lambda \boldsymbol{U}^*, \quad \boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^* = \boldsymbol{E} .$$

If the sum of the squares of the absolute values of the elements standing in the α-th row of the matrix $\boldsymbol{U}^* \boldsymbol{x}_m^*$ is denoted by s_α^2, then

$$\frac{1}{p} \operatorname{Sp} \boldsymbol{x}_m \gamma_m \boldsymbol{x}_m^* = \frac{1}{p} \operatorname{Sp} \Lambda (\boldsymbol{u}^* \boldsymbol{x}_m^* \boldsymbol{x}_m \boldsymbol{u}) = \frac{1}{p} [s_1^2 \lambda_1^{(m)} + \ldots + s_p^2 \lambda_p^{(m)}] . \tag{14}$$

If $\boldsymbol{x}_m$ is unitary, in which case $\boldsymbol{U}^* \boldsymbol{x}_m^*$ is also unitary, we have $s_\alpha^2 = 1$, and so (14), together with (13), already proves (12), the relation expressing the first half of our theorem.

From (14) one gets

$$\frac{1}{p} \operatorname{Sp} \boldsymbol{x}_m \gamma_m \boldsymbol{x}_m^* \geqq \sqrt[p]{(s_1 \ldots s_p)^2 \lambda_1^{(m)} \ldots \lambda_p^{(m)}} , \tag{15}$$

and in view of the well known determinant theorem of Hadamard, by which

$$(s_1 \ldots s_p)^2 \geqq \operatorname{Det} \boldsymbol{x}_m \boldsymbol{x}_m^*$$

and by the equality

$$\lambda_1^{(m)} \ldots \lambda_p^{(m)} = \operatorname{Det} \boldsymbol{\gamma}_m = \frac{D_m}{D_{m-1}}$$

resulting from (11), we get the inequality

$$(16) \qquad \frac{1}{p} \operatorname{Sp} \boldsymbol{x}_m \boldsymbol{\gamma}_m \boldsymbol{x}_m^* \geqq \sqrt[p]{\operatorname{Det} \boldsymbol{x}_m \boldsymbol{x}_m^* \lambda_1^{(m)} \ldots \lambda_p^{(m)}} = \sqrt[p]{\operatorname{Det} \boldsymbol{x}_m \boldsymbol{x}_m^* \frac{D_m}{D_{m-1}}}\,.$$

Let $|\operatorname{Det} \boldsymbol{x}_m| = 1$. From inequality (13) we get through inequality (16) the relation

$$(17) \qquad \frac{1}{p} \operatorname{Sp} \boldsymbol{H}_m(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m) \geqq \sqrt[p]{\lambda_1^{(m)} \ldots \lambda_p^{(m)}} = \sqrt[p]{\frac{D_m}{D_{m-1}}}\,.$$

Now it remains only to be shown that the left hand side of (17) actually attains the lower bound given in (17). Indeed, if

$$\boldsymbol{x}_m = (\beta_1, \ldots, \beta_p), \quad |\beta_\alpha|^2 = \frac{1}{\lambda_\alpha} \sqrt[p]{\lambda_1^{(m)} \ldots \lambda_p^{(m)}}\,,$$

then $|\operatorname{Det} \boldsymbol{x}_m| = 1$ and

$$\frac{1}{p} \operatorname{Sp} \boldsymbol{x}_m \boldsymbol{\gamma}_m \boldsymbol{x}_m^* = \frac{1}{p} [\lambda_1^{(m)} |\beta_1|^2 + \ldots + \lambda_p^{(m)} |\beta_p|^2] = \sqrt[p]{\lambda_1^{(m)} \ldots \lambda_p^{(m)}}\,.$$

From the proof of Lemma 2 it is clear that the second assertion valid also for $|\operatorname{Det} \boldsymbol{x}_m| \geqq 1$.

By the proof of Lemma 2 and by Lemma 1 it is clear that there holds the following

Corollary. *The minimizing matrices $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ are given in both cases of Lemma 2 by*

$$(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m) = (\boldsymbol{o}, \boldsymbol{o}, \ldots, \boldsymbol{x}_m) \boldsymbol{B}^{-1},$$

if $\boldsymbol{x}_m$ denotes an arbitrary unitary matrix, resp. a matrix satisfying the condition $|\operatorname{Det} \boldsymbol{x}_m| = 1$ and minimizing the expression $\operatorname{Sp} \boldsymbol{x}_m \boldsymbol{\gamma}_m \boldsymbol{x}_m^*$.

4. In this section we are going to prove our theorem.

Since $\boldsymbol{T}_n(\boldsymbol{f})$ is a positive definite Hermitian matrix, we can employ the generalized Lagrange transformation defined in our Lemma 1. By giving closer attention to the procedure which led us to this transformation, we remark that the matrix $\boldsymbol{\gamma}_k$ arising in the diagonal in the k-th step depends only on the matrices $\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$. From this it follows that continuing this procedure for all values of n, we make correspond to the matrix (1) a sequence $\{\boldsymbol{\gamma}_n\}$ of positive definite Hermitian matrices of order p.

Lemma 3. *The sequence $\{\boldsymbol{\gamma}_n\}$ is monotonically nonincreasing.*

In order to prove this we start with the form

$$\boldsymbol{H}_n(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \xi_0 \gamma_0 \xi_0^* + \xi_1 \boldsymbol{\gamma}_1 \xi_1^* + \ldots + \xi_n \boldsymbol{\gamma}_n \xi_n^*$$

gained by use of the generalized Lagrange transformation of the form belonging to the matrix $\boldsymbol{T}_n(\boldsymbol{f})$. Indeed, hence we get

$$\gamma_n \leqq \boldsymbol{H}_n(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{E}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{x}_k\, e^{ikx}\right)\boldsymbol{f}(x)\left(\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{x}_k\, e^{ikx}\right)^{*} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{x}_k\, e^{i(k-1)x}\right)\boldsymbol{f}(x)\left(\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{x}_k\, e^{i(k-1)x}\right)^{*} dx = \boldsymbol{H}_{n-1}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{E}).$$

Since this inequality holds for all matrices $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1}$, the relation $\gamma_n \leqq \gamma_{n-1}$ follows.

All elements of the sequence $\{\gamma_n\}$ are positive definite Hermitian matrices. So we have the following

Corollary 1. *The limit* $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n = \gamma$ *exists.*

Indeed, by Lemma 3, the sequence $\{z\,\gamma_n\, z^*\}$ is monotonically nonincreasing and bounded for any fixed vector z, and so it has a limit. With the aid of suitably chosen vectors z it is easy to show that the sequence $\{\gamma_n\}$ converges elementwise.

Corollary 2. *If the eigenvalues of* γ_n *resp. of* γ *are in monotonically nondecreasing order* $\lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_p^{(n)}$ *and* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *respectively, then* $\lambda_a^{(n)} \downarrow \lambda_a$.

For a proof see e. g. [1], 298, Satz 15.

Corollary 3. *The sequence* $\left\{\dfrac{D_n(\boldsymbol{f})}{D_{n-1}(\boldsymbol{f})}\right\}$ *is monotonically nonincreasing.*

On the basis of (11) and of Corollary 2 we indeed have

$$\frac{D_n(\boldsymbol{f})}{D_{n-1}(\boldsymbol{f})} = \operatorname{Det}\gamma_n = \lambda_1^{(n)}\ldots\lambda_p^{(n)} \leqq \lambda_1^{(n-1)}\ldots\lambda_p^{(n-1)} = \operatorname{Det}\gamma_{n-1} = \frac{D_{n-1}(\boldsymbol{f})}{D_{n-2}(\boldsymbol{f})}.$$

Corollary 3 gives the first assertion of our theorem.

Consider now the Hermitian forms (2) belonging to the matrices $\boldsymbol{T}_n(\boldsymbol{f})$. By Lemma 2 and by Corollary 3 to Lemma 3 we have the following

Lemma 4. *If* $\boldsymbol{f}(x)$ *is a Hermitian functional matrix, Lebesgue measurable, nonnegative definite and positive definite on a set of positive measure, then*

$$(18)\quad \inf_{\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{P}} \frac{1}{p\cdot 2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Sp}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{P})(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{P})^*\boldsymbol{f}(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sqrt[p]{\frac{D_n(\boldsymbol{f})}{D_{n-1}(\boldsymbol{f})}} = \sqrt[p]{\operatorname{Det}\gamma},$$

where $\boldsymbol{x}_0$ *runs through all matrices satisfying* $|\operatorname{Det}\boldsymbol{x}_0| = 1$ *and* $\boldsymbol{P}$ *through the trigonometric polynomial matrices* (8).

It is clear that (18) vanishes if and only if $\lambda_1 = 0$.

In case $\boldsymbol{f}(x)$ is positive semidefinite almost everywhere, we have $D_n(\boldsymbol{f}) = 0$, and so the quotients $\dfrac{D_n(\boldsymbol{f})}{D_{n-1}(\boldsymbol{f})}$ are senseless. Then however the infimum (18) can be taken equal to zero by (6), which is true for nonnegative Hermitian functional matrices $\boldsymbol{f}(x)$, positive definite on a set of positive measure.

Using now the theorem of HELSON and LOWDENSLAGER in (18), we obtain the limit (3), proving at the same time our theorem.

By the preceding considerations it is necessary and sufficient for the validity of (4) that $\lambda_1 = 0$ be valid, resp. that the Lebesgue measurable functional matrix $\boldsymbol{f}(x)$ be almost everywhere positive semidefinite.

As we have already mentioned in the introduction, the author has obtained the theorem just proved also independently of the theorem of HELSON and LOWDENSLAGER for the case when $\boldsymbol{f}(x)$ is a Lebesgue measurable, bounded, positive definite functional matrix satisfying the condition (5). Of course our Lemma 4 can also be used in order to prove with its help the theorem of HELSON and LOWDENSLAGER for a functional matrix $\boldsymbol{f}(x)$ having these properties. Indeed, it even follows from our remark on Lemma 2 that (7) remains also for $|\operatorname{Det} \boldsymbol{x}_0| \geqq 1$.

In his paper [11] T. BALOGH has investigated the infimum of $\operatorname{Sp} \int_{-\pi}^{\pi} \boldsymbol{P}(x)\, \boldsymbol{P}^*(x)\, \boldsymbol{f}(x)\, dx$, where $\boldsymbol{P}(x)$ runs through all matrix polynomials of grade n and of order p, which also satisfy the condition $\boldsymbol{P}(\alpha) = \boldsymbol{E}$, where α is an arbitrary fixed complex number. Formula (12) of Lemma 2 also answers this question by a method and in a form different from those of T. BALOGH in the special case, when $\alpha = 0$, and in the more general case, when $\boldsymbol{P}(0)$ is an arbitrary unitary matrix. The result of T. BALOGH is a generalization of a theorem of SZEGŐ ([2], 38).

Finally it is worth mentioning, that a new possibility would arise for generalizing the theorem of SZEGŐ mentioned in the introduction and to be obtained from our theorem by putting $p = 1$, by determining the limit γ of the sequence $\{\gamma_n\}$, which exists in view of Corollary 1 to Lemma 3. This would perhaps give a new matricial generalization of the theorem of SZEGŐ. Namely a matricial generalization of this theorem has already been given in the paper [5] by the author.

(Received November 11, 1960.)

REFERENCES

[1] GANTMACHER, F. R.: *Matrizenrechnung* I., Berlin, 1958.

[2] GRENANDER, U.—SZEGŐ, G.: *Toeplitz forms and their applications.* Berkeley—Los Angeles, 1958.

[3] GYIRES, B.: „Eigenwerte verallgemeinerter Toeplitzscher Matrizen". *Publ. Math., Debrecen* **4** (1956), 171—179.

[4] GYIRES, B.: „Valós függvénymatrixhoz tartozó Toeplitz-féle determinánsokról." *Acta Univ. Debreceniensis* **5** (1958), 145—158.

[5] GYIRES, B.: „Spuren der verallgemeinerten Toeplitzschen Matrizen." *Publ. Math., Debrecen,* **8** (1961) 93—116.

[6] HELSON, H.—LOWDENSLAGER, D.: „Prediction Theory and Fourier Series in several Variables". *Acta Math.* **99** (1958), 165—202.

[7] KOLMOGOROV, A.: „Stationary Sequences in Hilbert Space". *Bull. Math. Univ. Moscou* 2. No. 6 (1941), 40 pp. (English translation by Natasa Artin.)

[8] SZEGŐ, G.: „Ein Grenzwertsatz über die Toeplitzschen Determinanten einer reellen positiven Funktion." *Math. Ann.* **76** (1915), 490—503.

[9] SZEGŐ, G.: „A Toeplitz-féle formákról". *Mat. Termtud. Értesítő* **35** (1917), 185—222.

[10] SZEGŐ, G.: „Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen". *Math. Zeitschr.* **6** (1920), 167—202, **9** (1921), 167—190.

[11] BALOGH, T.: „Solution of a minimum problem". *Publ. Math, Debrecen,* **8** (1961) 131—142.

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ SZEGŐ

B. GYIRES

Резюме

В настоящей работе автором доказывается следующая теорема:

Пусть $\boldsymbol{f}(x)$ определенная в интервале $[-\pi, \pi]$ измеримая по Лебегу функция с матричными значениями, типа $p \times p$, неотрицательно определенная и ермитова. Если

$$D_n(\boldsymbol{f}) = \mathrm{Det}\,(\boldsymbol{a}_{\mu-\nu})_{\mu,\nu=0}^{n},$$

где

$$\boldsymbol{a}_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \boldsymbol{f}(x)\, e^{-ikx}\, dx,$$

то

$$\frac{D_n(\boldsymbol{f})}{D_{n-1}(\boldsymbol{f})} \downarrow \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log \mathrm{Det}\,\boldsymbol{f}(x)\, dx\right\}$$

и этот предел равен 0, если

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \log \mathrm{Det}\,\boldsymbol{f}(x)\, dx = -\infty.$$

При доказательстве автор установит связь со следующим результатом Helson и Lowdenslager [6], стр. 186):

Если $d\boldsymbol{M}$ данная мера состоящая из неотрицательных самосопряженных матриц типа $p\times p$, $\frac{1}{2\pi}\boldsymbol{f}(x)$ абсолютно непрерывная часть меры $d\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{P}(x)$ бежит по тригонометрическим полиномам формы

$$\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{A}_k\, e^{-ikt}$$

коэффициенты которых являются матрицами типа $p\times p$, подчиненные условию $\mathrm{Det}\,\boldsymbol{A}_0 = 1$, то

$$\inf_{P} \frac{1}{p}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Sp}\,[\boldsymbol{P}(x)\, d\boldsymbol{M}(x)\, \boldsymbol{P}^*(x)] = \exp \frac{1}{2\pi p}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Sp}\,[\log \boldsymbol{f}(x)]\, dx.$$

Автор получил свою вышеформулированную теорему и независимо от теоремы Хелсона—Ловденслагера для случая, когда $\boldsymbol{f}(x)$ измеримая по Лебегу функция с матричными значениями, ермитова и типа $p\times p$, обладающая положительной нижней и конечной верхней гранью. ([5]). Исходя из этой теоремы можно доказать методом автора теорему Хелсона и Ловденслагера для случая, когда $d\boldsymbol{M}$ абсолютно непрерывна, т. е. $d\boldsymbol{M} = \frac{1}{2\pi}\boldsymbol{f}(x)\,dx$ и $\boldsymbol{f}(x)$ удовлетворит условиям вышеприведенной теоремы.

ON COVERINGS OF GENERALIZED CHECKER BOARDS I.

by

BÉLA HAJTMAN

1. Our starting point is the following well-known problem: remove two squares at two opposite corners of a checker board and try to cover the rest with dominoes. (Each domino covers exactly two adjacent squares of the board.) The question arises: how is it possible? The answer is: it is impossible. Proof: each domino covers one light and one dark square and thus among the covered squares there are light and dark ones in equal number. However, the opposite corners are of the same colour (dark, say) and so the rest consists of thirty dark and thirty-two light squares.

This problem can easily be generalized in many ways. S. W. GOLOMB ([1] and [2]) has dealt with several generalizations. He replaced the dominoes with various "polyominoes" and examined the possibilities of different coverings of the common checker board.

In this paper we are dealing with an other kind of generalization. From the polyominoes used by GOLOMB we maintain only two types: the "straight polyominoes" (called polyominoes here) and the "monominoes" (called simply squares). But the checker board is generalized, as an arbitrary large board is considered instead of the usual 8×8 one.

After these introductory remarks let us formulate the problem more exactly.

2. Let k and n be natural numbers. Consider a "generalized checker board" (called *board* in what follows) which consists of $kn\times kn$ squares. Deleting k squares of this board (called *deleted* or *omitted squares)*, try to cover the *rest* (all the other squares) with *k-ominoes* i. e. $k\times 1$ rectangles covering exactly k consecutive squares in one row or column. The question is: what conditions must be fulfilled by the omitted squares in order to make the covering of the rest possible.

A certain position of the deleted squares on the board (related to each other) is called a *configuration*. Since this determines the localization of the remaining squares as well, we use the term "configuration" also for the whole board. (I.e., we say that a configuration is coverable if its rest is coverable, and that the conditions are fulfilled by a configuration if they are fulfilled by its deleted squares.)

The case $k = 1$ is trivial whatever n is; in the following we shall confine ourselves to cases $k > 1$. The case $k = 2$ is essentially solved by the aid of the proof mentioned in the introduction. However, we shall seek conditions valid in general and these will contain $k = 2$ as a special case.

Our first condition is also based on the solution mentioned before. Let us colour the board with k colours in such a way that k consecutive squares in one row or in one column should be all of different colours. So the k-ominoes cover always k squares of different colours. Therefore, if among the deleted squares there are two of the same colour, it is sure that the configuration cannot be covered.

This colouring, however, may be carried out not only in one way. The permutation of the colours does not give an essential change but we may alter the colouring essentially e. g. by permuting several coloured rows. Evidently, what we have stated about an arbitrary colouring, it concerns every possible colouring as well. Consequently, we may state (without the need of any proof) that the following Condition has to be necessarily fulfilled if a configuration is coverable.

(C_1) *The rest can be covered only if the deleted squares are of different colours — and this is valid for every colouring.*

In what follows we shall call some configuration "good" if it satisfies the above condition.

3. The condition (C_1) is formally very simple. However, if we want to ascertain whether a configuration may be or may not be considered good, we are confronted with great difficulties. First, we have to colour the board, then, to inspect if the deleted squares are of different colours or not. If they are, we must repeat the whole process over again till for a certain colouring there are found two deleted squares of the same colour, — or until we shall have examined every colouring. But this is almost impossible if k is great; the number of different colourings is equal to the number of k-side Latin squares.

In the following we state a (similarly necessary) condition which is much more convenient for use.

Let us number the rows and the columns of the board modulo k. This way we gave double indices to each square. We say two squares *congruent by row* if their row indices are equal. (The congruency by column is defined in the same manner.) Two rows (columns) are congruent if their squares are congruent by row (column). So, the mentioned Condition is:

(C_2) *In order that some configuration should be coverable, its deleted squares have to be pairwise incongruent by row (resp. by column) and simultaneously all of them have to be congruent by column (resp. by row).*

We assert *conditions* (C_1) *and* (C_2) *to be equivalent.*

Proof. In the proof we may restrict ourselves to the case when the omitted squares are congruent with each other by column.[1]

The properties of colouring imply that going along a row or column in the board we find the same colour again just after k steps. (Squares of the same colour may not be nearer by definition; if they would be farther, between the two equally coloured squares there must be at least k squares, the number of different colours used for these, however, is $k - 1$.) Therefore the congruent columns (and congruent rows similarly) are coloured in the same manner. So, if the deleted squares are congruent by column, we may regard them — in respect of colouring — as belonging to the same column (leaving every square

[1] This is no restriction of the generality: turning the board by 90° the possibility of covering does clearly not change.

in its original row). Now, in one column two squares are of the same colour if and only if they are congruent by row. However, deleted squares are — by (C_2) — all incongruent, consequently they are all of different colours.

Thus (C_2) implies (C_1). Let us now prove the implication in the opposite direction.

First we establish that in a good configuration (i.e. satisfying (C_1)) it is impossible for two squares to be congruent by row and by column simultaneously. For, in such a case, they would have the same indices and hence they ought to be of the same colour in any colouring — contradicting (C_1).

Similarly, in a good configuration there are not two squares which are incongruent by row and by column simultaneously. Suppose — opposing to our assertion — that two such squares can be found. Let these be called a and b. Consider a colouring. Let a be, say, red, and b green. (They may not be of the same colour because of (C_1).) Let the square in the row of b and in the column of a be coloured blue. (This one may not be red or green: in the first case a and b would be congruent by row, and in the other case they would be congruent by column.) Starting from this blue square and going towards b let us seek the first red and first green square. The green will be the j^{th} and the red will be the l^{th} one. Evidently $j \neq l$, $j,l < k$ (the k^{th} square is blue again). Starting from the column of a we exchange the j^{th} and l^{th} column. So we get an other colouring where in the row of b the j^{th} square will be red. Extending this new colouring to the whole board in the row of b every green square becomes red (therefore also b itself), while a remains red unchanged. But this is impossible because these squares belong to a good configuration.

So we are ready essentially. Namely, choosing two deleted squares from a good configuration these are congruent either by row or by column (and by no means by both). Let these be, say, congruent by column. Now, choose a third square. If this is congruent by row with one of the preceding squares (and therefore incongruent with the other), it must be incongruent by column with them according to our first establishment. But in this case the third is incongruent simultaneously by row and by column with one of the preceding squares — in contradiction to our second conclusion. Therefore, if the third square belongs to a good configuration, it must be incongruent by row with the preceding ones — and necessarily congruent by column with them. The assertion may be successively seen for the other deleted squares in the same way.

So we have proved the equivalency of (C_1) and (C_2). In what follows we shall always refer to the condition (C_2) because the verification of its fulfilment is incomparably simpler than in the case of (C_1). We maintain the expression "good configuration" concerning (C_2) too.

4. Condition (C_2), as we have seen, is necessary for the possibility of constructing a covering. We cannot prove (C_2) to be sufficient too. Indeed, (C_2) is not a sufficient condition in general. Moreover, n and k must be very special in order to make (C_2) sufficient.

In the case $n = 1$, whatever k may be, (C_2) is sufficient too. Then it is easy to see the omitted squares of a good configuration may be placed only in one row or in one column; the other rows (columns) we can easily cover with k-ominoes which cover an entire row (column) here.

In the case $k = 2$ (n is arbitrary) (C_2) is a necessary and sufficient condition. Although it would be very easy to prove this, we shall obtain this result as a special conclusion from the general sufficient condition to be worded later.

The above mentioned cases are the only ones where (C_2) is sufficient and necessary. Already in the simplest case $n = 2$ $k = 3$ we can show a good configuration which is not yet coverable[2] (Figure 1).

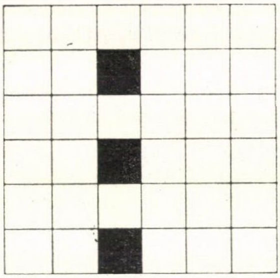


Fig. 1.

We note that this is not the only similarly uncoverable configuration. Such a configuration can not be covered being just at any place of this board. Moreover, there exist some another good yet not coverable configurations.

5. Our next purpose is to find a sufficient condition as strong as possible for the general case.

First we shall show that if we can cover a complete rectangle which contains every omitted square and one side of which is a multiple of k then the board is simply coverable. Suppose this rectangle consists of m rows and l columns where $m = d \cdot k$ $(d = 1, 2, \ldots, n)$ and $1 \leq l \leq n \cdot k$. (The role of the rows and columns may be evidently exchanged.) Thus beside the rectangle we can put d k-ominoes in one column. So we may extend the covered rectangle to an $m \times nk$ one. The $nk - m$ empty rows can be easily covered by k-ominoes: each row is coverable with n k-ominoes.

In the following we need some definitions.

We look at the board always so that the the omitted squares should be congruent by column.[3] Columns which are congruent with ones containing omitted squares we call *significant columns*. Since the row index is characteristic for each deleted square, row indices may be regarded as "names" of different deleted squares. Starting from the first row of the board and going on row by row we can establish a natural order of the deleted squares; thus their "names" form a permutation of the numbers $1, 2, \ldots, k$. We call this one *the permutation of the configuration*. In what follows, the *circular permutations* will have an important role; we call a permutation circular if putting it around a circle it is indistinguishable from the identical one.

A *minimal rectangle* is the smallest rectangle which contains all the omitted squares. A *period* consists of k consecutive rows or columns of the rectangle eventually in question (let it be just the minimal rectangle as well as the whole board).

[2] We don't prove the impossibility of covering; anybody can easily verify it by trying.

[3] In this section we regard good configurations exclusively.

We shall prove the following simple sufficient condition:

(S) *A good configuration is coverable if its permutation is circular.*

Proof. Since in this case the number of rows of the minimal rectangle is evidently divisible by k in order to prove (S) it is enough to show the minimal rectangle to be coverable. (We note that the number of the columns of any minimal rectangle is congruent with 1 modulo k, because its first and last columns are both significant ones and so they are congruent.)

In the minimal rectangle first we cover the rows which contain omitted squares. (There are k such rows.) Such a row is cut by any significant column (the possible places of the omitted squares) into two parts the length of which is a multiple of k (eventually zero). So we can cover these rows separately with k-ominoes.

As the permutation of the configuration is circular the rows covered before either are neighbouring ones or between two covered rows there are one or more empty periods. Thus these rows are coverable by periods setting k-ominoes along columns.

So we have obtained a covering of the minimal rectangle. Thus (S) is proved.

6. In this section we want to give some sharpening of (S).

(S*) *Some good configuration is coverable if from its permutation we can make a circular one with the following discrete changes.*[4] *Two or three consecutive elements may be changed among themselves if the corresponding deleted squares are in different columns. Before the row of the first deleted square there must be as many rows as the number of those elements of the obtained circular permutation*[5] *which precede the first element of the original permutation. Similarly, after the row of the last deleted square there must be as many rows as the number of those elements of the obtained circular permutation which follow the last element of the original permutation.*

If we add other conditions, some of the requirements listed in (S*) may be cancelled. Indeed, covering is possible even in some cases not satisfying (S*). However, as we have said, we state *some* sharpening of (S) and not the *strongest* one.

Proof. We regard the permutation of the given configuration as a "perturbed" circular one. If the first and last element of the respective circular order are also the first and last element of the given permutation then the number of the rows of the minimal rectangle is divisible by k. In the opposite case, if the outside elements are changed ones we must augment the minimal rectangle by so many rows as the number of elements of the circular order preceding the first (resp. following the last) element of the original permutation; thus this *augmented rectangle* has rows of a number divisible by k. Therefore it is enough to show the covering of the minimal resp. the augmented rectangle.

---

[4] We don't permit repeated changes at any element since then no restriction would be done for the permutations.

[5] It is easy to see, in the cases $k < 6$ we can often get different circular permutations from a given one: e. g. from 32154 both 12345 and 23451 are obtainable. In such a case we may choose the most convenient order.

These rectangles are coverable as in the case of the circular permutation (see the proof of (S)) except the parts where the circular order is "perturbed". Take out such a part from the permutation and consider the corresponding deleted squares. These (two or three) squares also determine their own minimal rectangle. We augment this rectangle by one or two rows above and by one or two rows below so that the index of the first row of the rectangle so obtained should be equal to the smallest of the indices of the omitted squares of this rectangle and the index of its last row should be equal to the greatest of the same indices.[6] The rectangle so obtained we call *elementary rectangle.*

The first and the last column of any elementary rectangle are significant. Therefore, beside these rectangles the minimal rectangle has entire periods of columns and so these parts are also coverable.

In order to complete the proof we show how the different kinds of elementary rectangles can be covered. Ways of covering may be seen in Figure 2.[7]

It is easy to see, that all the possible elementary rectangles may be obtained from these types by the simplest geometrical transformations.

7. In this section we seek answer to the question: among all possible configurations how many ones can be covered? More exactly: if in a $kn \times kn$ board we choose the k omitted squares at random what is the probability that the configuration so obtained will be coverable?

We cannot compute this probability as a sufficient and necessary condition is lacking. However, conditions (C_2) and (S) supply lower and upper bounds for this probability.

Let $P_n(k)$ denote the probability that some chosen configuration is "good" (in the sense of the preceding sections), and $p_n(k)$ the probability that some configuration satisfies (S). $\big(P_n(k)$ is an upper, $p_n(k)$ is a lower boundary of the sought probability.$\big)$

It is easy to see[8] that

$$P_n(k) = \frac{2\,kn^{2k}}{\binom{n^2\,k^2}{k}}. \tag{1}$$

In order to formulate $p_n(k)$ too, let us at first compute the number of configurations satisfying (S) which have omitted squares only in a preassigned column.

In this column, let the first square be an omitted one. The other $k-1$ deleted squares can be divided into the n periods in $\binom{n+k-2}{k-1}$ ways. The permutation must always be the identical one: this determines the place of the omitted squares within the periods. Cutting this column at the end of any period and exchanging the two sections we get circular permutations. In such a way n circular permutations are got from each former permutation. The

[6] The smallest and greatest indices are to be taken in "circular sense". Therefore, if the indices in question are e. g. k, 1 and 2 then the smallest is k and the greatest is 2.

[7] In order to make the illustration easier, in figures we have used 5-ominoes. Furthermore, we have represented the deleted squares in position as near as possible; if they are farther from each other, the intermediate entire periods are easily coverable.

[8] Now the board is considered in fixed position.

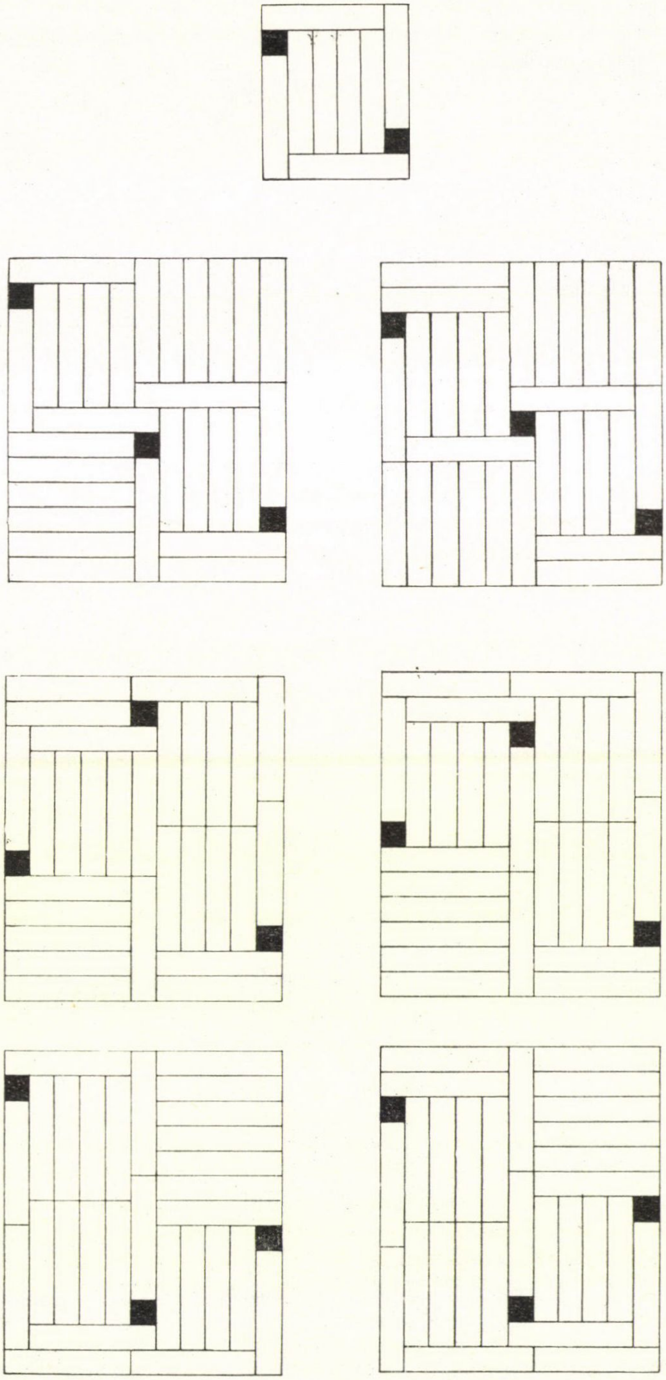


Fig. 2.

choice of some significant row or column and the division of the deleted squares into the n significant columns (rows) is likely performed as in computing $P_n(k)$. Thus we have

$$(2)\qquad p_n(k) = \frac{2k\binom{n+k-2}{k-1} n^{k+1}}{\binom{n^2 k^2}{k}} .$$

(All the formulas are valid only in the cases $k \geqq 2$.) Computing the quotient of (1) and (2) we have

$$(3)\quad \frac{P_n(k)}{p_n(k)} = \frac{n^{k-1}}{\binom{n+k-2}{k-1}} = (k-1)!\,\frac{1}{\left(1+\frac{k-2}{n}\right)\left(1+\frac{k-3}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)} .$$

If n tends to infinity (and k is fixed) this quotient tends to $(k-1)!$ from below.

We are interested in the behaviour of these probabilities as functions of k. If n is great enough, the dependence on n of the probabilities may be neglected. Namely, for any fixed k we have:

$$(4)\qquad P_\infty(k) \equiv \lim_{n\to\infty} P_n(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{2kn^{2k}}{\binom{n^2k^2}{k}} = \frac{2k\cdot k!}{k^{2k}} .$$

In addition, from (3) and (4):

$$(5)\qquad p_\infty(k) = \frac{P_\infty(k)}{(k-1)!} = \frac{2k^2}{k^{2k}} .$$

Applying very rough estimations we see that $p_\infty(k)$ may not be smaller than the square of $P_\infty(k)$:

$$(6)\qquad P_\infty(k) \leqq 2k^{-k}$$

and

$$(7)\qquad p_\infty(k) > 4k^{-2k} .$$

The cause of this great difference is the weakness of (S). Our sharpening given in Section 6. is not suitable for computation, on the other hand, it would not change the situation essentially. Nevertheless, if we examine the probability whether a configuration is coverable if the omitted squares are chosen at random, we shall see this probability to be very small. Namely, the function $P_\infty(k)$ which majorizes the preceding probability will be small already for relatively not great values of k. Applying the Stirling-formula, for $P_\infty(k)$ we obtain an estimation better than (6):

$$(8)\qquad P_\infty(k) \sim \frac{2\sqrt{2\pi}}{e^k k^{k-3/2}} .$$

(Received March 10, 1961.)

REFERENCES

[1] GOLOMB, S. W.: "Checker Boards and Polyominoes". *American Mathematical Monthly* **61** (1954) 675—682.

[2] GOLOMB, S. W.: "The General Theory of Polyominoes". *Recreational Mathematics magazine* (1961) Part I: Issue 4, 3—12. Part II: Issue 5, 3—14. Part III: Issue 6, 3—22.

ПРОБЛЕМЫ ПОКРЫТИЯ ОБОБЩЕННОЙ ШАХМАТНОЙ ДОСКИ

B. HAJTMAN

Резюме

В статье автор занимается следующей проблемой: Дана «обобщенная шахматная доска» содержащая $kn \times kn$ квадраты и даны также «обобщенные дощечки домино», которые могут покрыть точно k смежных квадратов доски. Если выбросить k квадратов доски, то спрашивается, можем ли мы покрыть оставшиеся квадраты? Возможность покрытия зависит, конечно, от расположения выброшенных квадратов. Автор дает, сначала, два необходимых условия (эквивалентных между собой) для возможности покрытия (легко доказуемое условие C_1 и хорошо применяемое условие C_2), а потом дает еще одно довольно слабое достаточное условие S и его уточнение S*. Наконец, он исследует вопрос, какая вероятность возможности покрытия полученного расположения, если выброшенные квадраты выбрать случайно.

EXTENSION OF A THEOREM OF ARMELLINI—TONELLI—SANSONE TO THE NONLINEAR EQUATION $u'' + a(t)f(u) = 0$

by

I. BIHARI

1. According to a well-known theorem the integrals of the *linear* equation $u'' + a(t)u = 0$ are for positive continuous non-decreasing $a(t)$, with $\lim_{t=\infty} a(t) = \infty$ all bounded and there is at least one solution tending to zero as $t \to \infty$. It is an interesting problem how further conditions must be imposed on $a(t)$ so that every solution may behave similarly. The theorem mentioned in the title gives reply on this point. In order to be able to quote this theorem we need the knowledge of two notions: one from set-theory, another from function-theory.

a) Density of an interval-sequence: Let $\{(\alpha_n, \beta_n)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ be an interval-sequence on the half line $t \geqq 0$ having no point in common. It is said of density ε $(\varepsilon > 0)$ on $(0, \infty)$ provided that

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i)}{\beta_n} = \varepsilon .$$

b) Function tending to infinity "quasi jumping" respectively "varying regularly": The function $F(t)$ being positive continuous non-decreasing, tending to infinity as $t \to \infty$ is said "tending to infinity quasi jumping", if to every $\varepsilon > 0$ number there is an interval-sequence $\{(\alpha_n, \beta_n)\}$ of density less than ε so that on its complementary set — on the set $(0, \infty) - \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, \beta_n)$ — the increase of $F(t)$ is finite. In the opposite case $F(t)$ is called tending to infinity "regularly".

The theorem of ARMELLINI—TONELLI—SANSONE (s. [1] p. 60.) is as follows.

If in the equation $u'' + a(t) = 0$ $a(t)$ is positive non-decreasing continuous together with its derivative, $\lim_{t=\infty} a(t) = \infty$ and $\log a(t)$ tends to infinity regularly, then every integral of the equation tends to zero as $t \to \infty$.

Z. OPIAL generalized this theorem for more complicated $a(t)$ and showed that the differentiability of $a(t)$ need not be supposed (s. [2]).

2. The purpose of the present paper is to find an extension of the A.—T.—S.-theorem to the *nonlinear* equation

$$u'' + a(t) f(u) = 0 . \tag{1}$$

This is intended by the following

Theorem. *If in equation* (1)

1. $a(t) > 0$, *is continuous non-decreasing*, $\lim\limits_{t=\infty} a(t) = \infty$, $\log a(t)$ *tends to infinity regularly*,

2. $f(u)$ *is a continuous non-decreasing odd function*,

3. $\dfrac{f(u)}{u} = O(1)$ $(u \to 0)$ *and* $\dfrac{f(u)}{u}$ *is non-increasing for* $u > 0$,

4. $|f(u_1) - f(u_2)| \leqq \omega(|u_1 - u_2|)$, *where* $\omega(z)$ *is positive non-decreasing and* $\int\limits^{u_0} \dfrac{dz}{\omega(z)} = \infty$ $(u_0 > 0)$, *then every solution of* (1) *tends to zero as* $t \to \infty$.

Proof. As is well-known these hypotheses assure the existence and uniqueness of an oscillatory solution (for $t \geqq 0$) with given initial conditions (s. [3] and [4]). Let us suppose there exists a solution $u(t)$ contradicting this theorem. Its "amplitude" defined by $A(t) = \sqrt{\dfrac{u'^2}{a(t)} + 2\,F(u)}$ is non-increasing (s. [4]) ($F(u)$ means here $\int\limits_0^u f(z)dz$). Let its limit be denoted by A. By our assumptions $A > 0$. Taken (1) into account

$$A^2(t) = 2\,F(u) + \frac{u'^2}{a(t)} = A^2(0) + \int\limits_0^t dA^2(t) = A^2(0) + \int\limits_0^t \left(2 f(u)\, u' + \frac{2\,u'\,u''}{a}\right) dt -$$

$$- \int\limits_0^t \frac{u'^2}{a^2(t)}\, da(t) = A^2(0) - \int\limits_0^t \frac{u'^2}{a^2(t)}\, da(t) = A^2(0) - \int\limits_0^t \frac{u'^2}{a(t)}\, \frac{da(t)}{a(t)}.$$

This may be written in the form

$$A^2(t) = A^2(0) - \int\limits_0^t [A^2(t) - 2\,F(u)]\,\frac{da(t)}{a(t)} \tag{2}$$

too. Tending $\log a(t)$ to infinity regularly there is such a number $\varepsilon_0 > 0$, that the growth of $\log a(t)$ on the complementary set of all sequences $\{(\alpha_n, \beta_n)\}$ $(\alpha_n < \beta_n < \alpha_{n+1})$ of intervals of density less than ε_0 is infinite, i.e. the series

$$\sum_{i=1}^{\infty} [\log a(\alpha_{i+1}) - \log a(\beta_i)] = \sum_{i=1}^{\infty} \log \frac{a(\alpha_{i+1})}{a(\beta_i)}$$

is a divergent one. It will be proved later, that one can choose (to ε_0) such a number $\eta > 0$, that the sequence of all the intervals (α_n, β_n), where the inequality $A^2(t) - 2F(u) \leqq \eta$ is satisfied, have a density less than ε_0. On account of (2)

$$A^2(\alpha_n) \leqq A^2(0) - \sum_{i=1}^{n-1} \int\limits_{\beta_i}^{\alpha_{i+1}} [A^2(t) - 2\,F(u)]\,\frac{da(t)}{a(t)}\,.$$

But on the intervals (β_i, α_{i+1}) we have $A^2(t) - 2F(u) \geqq \eta$, therefore,

$$A^2(\alpha_n) \leqq A^2(0) - \eta \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\beta_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{da(t)}{a(t)} = A^2(0) - \eta \sum_{i=1}^{n-1} \log \frac{a(\alpha_{i+1})}{a(\beta_i)}.$$

However this results in $A^2(\alpha_n) < 0$ for n large enough, what is impossible. — Hence we have still to show, that a choice of η like above is possible.

3. The inequality $A^2(t) - 2F(u) \leqq \eta$ implies

$$A(t) - \sqrt{2\,F(u)} \leqq \frac{\eta}{A(t) + \sqrt{2\,F(u)}} \leqq \frac{\eta}{A(t)} \leqq \frac{\eta}{\varrho},$$

where ϱ denotes the greatest lower bound of $A(t)$ for $t \geqq 0$. This is a positive number accordingly to our assumption on $u(t)$. Therefore it is sufficient to show that a number $\eta^* > 0$ can be chosen so that the sequence of the intervals, where

(3) $$A(t) - \sqrt{2\,F(u)} \leqq \eta^*,$$

is of a density less than ε_0. Namely multiplying (3) by $A(t) + \sqrt{2F(u)} \leqq K$ ($A(t)$ and consequently $u(t)$ are bounded) we have $A^2(t) - 2F(u) \leqq \eta^* K = \overline{\eta}$ and $\overline{\eta}$ satisfies our requirements. Being $\lim\limits_{t=\infty} A(t) = A$ there is a place $t_1 \geqq 0$ so that the inequality $A + \eta^* \geqq A(t) \geqq A - \eta^*$ is fulfilled for $t \geqq t_1$. In other words: every number $t \geqq t_1$ satisfying (3) satisfies the inequality

$$A - \sqrt{2\,F(u)} \leqq 2\,\eta^* \text{ or } A\left(1 - \frac{2\,\eta^*}{A}\right) \leqq \sqrt{2\,F(u)}$$

too. Since the density of a sequence of intervals does not change by omission of a finite number of intervals (preceding t_1), it is enough to prove the existence of such a number $0 < \sigma < 1$, that the density of the interval-sequence S_σ, where $\sigma A \leqq \sqrt{2F(u)}$, is less than ε_0. Viz., conversely, the previous inequality implies $A - \sqrt{2F(u)} \leqq 2\,\eta^*$ with a certain η^* $\left(\eta^* = \frac{1}{2} A(1 - \sigma)\right)$ and this the further inequality $A(t) - \eta^* - \sqrt{2F(u)} \leqq A - \sqrt{2F(u)} \leqq 2\eta^*$, i.e. $A(t) - \sqrt{2F(u)} \leqq 3\eta^* = \overline{\eta}$. By the notation $\mu = F^{-1}\left(\frac{\sigma^2 A^2}{2}\right)$ the condition $\sigma A \leqq \sqrt{2F(u)}$ takes the form $|u| \geqq \mu$. — Let us estimate the density of the sequence S_σ. Denoting the successive intervals of S_σ by (α_n', β_n') $(n = 1, 2, \ldots)$ we have $|u(\alpha_n')| = |u(\beta_n')| = \mu$. Regard simultaneously with (1) the auxiliary comparison equation

(4) $$v'' + a(\alpha_n') f(v) = 0$$

too and take its solution $v_n(t)$ satisfying the initial conditions $v_n(\alpha_n') = |u(\alpha_n')|$, $v_n'(\alpha_n') = |u'(\alpha_n')|$. Let the first root of the equation $v_n(t) = \mu$ lying to the right of α_n' be denoted by β_n'', resp. the first root of the equation

$v_n(t) = 0$ situated left from α'_n by γ'_n. Applying a comparison theorem of the Sturmian type (s. [4]) on $u(t)$ resp. $v_n(t)$ (solutions of (1) resp. (4))

$$\beta'_n - \alpha'_n \leqq \beta''_n - \alpha'_n \quad \text{and} \quad \alpha'_n - \gamma'_n \leqq \alpha'_n - \beta'_{n-1}\,.$$

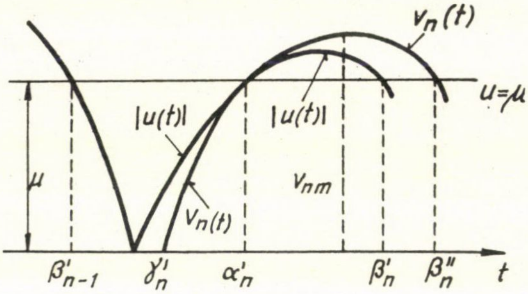


Figure.

Evaluate the lengths $\beta''_n - \alpha'_n$ and $\alpha'_n - \gamma'_n$. — Equation (4) may be solved. Obtaining

$$(5) \qquad 2\,v'\,v'' + 2\,a(\alpha'_n)\,f(v)\,v' = 0 \quad \text{resp.} \quad v'^2 + 2\,a(\alpha'_n)\,F(v) = K\,,$$

where

$$F(v) = \int_0^v f(z)\,dz \ \text{ and } \ K = v'^2(\alpha'_n) + 2a(\alpha'_n)\,F(v_n(\alpha'_n)) = u'^2(\alpha'_n) + $$
$$+ 2a(\alpha'_n)\,F(u(\alpha'_n)) = a(\alpha'_n)\,A^2(\alpha'_n)\,.$$

Thus (5) gives

$$\frac{dv}{dt} = \sqrt{a(\alpha'_n)\,A^2(\alpha'_n) - 2\,a(\alpha'_n)\,F(v)} \quad \text{resp.} \quad dt = \frac{1}{\sqrt{a(\alpha'_n)}}\,\frac{dv}{\sqrt{A^2(\alpha'_n) - 2\,F(v)}}\,.$$

Hence

$$\beta''_n - \alpha'_n = \frac{2}{\sqrt{a(\alpha'_n)}} \int_{\mu}^{v_{nm}} \frac{dz}{\sqrt{A^2(\alpha'_n) - 2\,F(z)}} = \frac{2}{\sqrt{a(\alpha'_n)}} \int_{\frac{1}{2}\sigma^2 A^2}^{F(v_{nm})} \frac{d\lambda}{f(z)\sqrt{A^2(\alpha'_n) - 2\lambda}}\,,$$
$$(\lambda = F(z))$$

where $v_{nm} = \max\limits_{(\alpha'_n,\,\beta''_n)} v_n(t)$ ($v_n(t)$ is symmetrical on its maxima) and

$$\alpha'_n - \gamma'_n = \frac{1}{\sqrt{a(\alpha'_n)}} \int_0^{\mu} \frac{dz}{\sqrt{A^2(\alpha'_n) - 2\,F(z)}} \geqq \frac{1}{\sqrt{a(\alpha'_n)}} \int_0^{\mu} \frac{dz}{\sqrt{A^2(t_1) - 2\,F(z)}}\,.$$

By the last relation

$$(6) \qquad \beta'_n - \beta'_{n-1} > \alpha'_n - \beta'_{n-1} \geqq \alpha'_n - \gamma'_n \geqq \frac{1}{\sqrt{a(\alpha'_n)}} \int_0^{\mu} \frac{dz}{\sqrt{A^2(t_1) - 2\,F(z)}}\,.$$

The amplitude $B_n^2(t) = \dfrac{v_n'^2(t)}{a(\alpha_n')} + 2F\big(v_n(t)\big)$ of $v_n(t)$ is constant (s. [4]). For this reason

$$B_n^2(v_{nm}) = 2\,F(v_{nm}) = B_n^2(\alpha_n') = A^2(\alpha_n'),$$

consequently

$$\beta_n'' - \alpha_n' = \frac{2}{\sqrt{a(\alpha_n')}} \int\limits_{\frac{1}{2}\sigma^2 A^2}^{\frac{1}{2}A^2(\alpha_n')} \frac{d\lambda}{f(z)\sqrt{A^2(\alpha_n') - 2\lambda}} \leqq \frac{2}{f(\mu)\sqrt{a(\alpha_n')}} \int\limits_{\frac{1}{2}\sigma^2 A^2}^{\frac{1}{2}A^2(\alpha')} \frac{d\lambda}{\sqrt{A^2(\alpha_n') - 2\lambda}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{A^2(\alpha_n') - \sigma^2 A^2}}{f(\mu)\sqrt{a(\alpha_n')}} = \frac{2\sqrt{A^2 + \nu_n - \sigma^2 A^2}}{f(\mu)\sqrt{a(\alpha_n')}} = \frac{2\sqrt{A^2(1-\sigma^2) + \nu_n}}{f(\mu)\sqrt{a(\alpha_n')}},$$

where $\nu_n \geqq 0$ and $\lim\limits_{n=\infty} \nu_n = 0$. Therefore $\nu_n \leqq \nu$ $(\nu > 0)$ fore some $n \geqq n_0$ and

$$\beta_n' - \alpha_n' \leqq \beta_n'' - \alpha_n' \leqq \frac{2\sqrt{A^2(1-\sigma^2) + \nu}}{f(\mu)\sqrt{a(\alpha_n')}} \qquad (n \geqq n_0).$$

By means of this and (6)

$$\frac{\beta_n' - \alpha_n'}{\beta_n' - \beta_{n-1}'} \leqq \frac{2\sqrt{A^2(1-\sigma^2) + \nu}}{f(\mu) \displaystyle\int\limits_0^{\mu} \frac{dz}{\sqrt{A^2(t_1) - 2\,F(z)}}} = G(\sigma, \nu)\,, \tag{7}$$

and finally

$$\frac{\sum\limits_{n=n_0+1}^{N} (\beta_n' - \alpha_n')}{\beta_N' - \alpha_{n_0}'} \leqq \frac{\sum\limits_{n=n_0+1}^{N} (\beta_n' - \alpha_n')}{\sum\limits_{n=n_0+1}^{N} (\beta_n' - \beta_{n-1}')} \leqq G(\sigma, \nu) \qquad (N > n_0). \tag{8}$$

The number μ is increasing with σ, therefore the denominator of (7) too. Once having chosen the number ν, i.e. n_0 so that $G(1, \nu) < \varepsilon_0$ is, we have also $G(\sigma, \nu) < \varepsilon_0$ provided that σ is near enough to 1. Therefore the left hand side of (8) may for arbitrary $N > n_0$ be made less than ε_0 by taking σ near enough to 1 and just this was to be proved.

(Received April 28, 1961.)

REFERENCES

[1] Sansone, L.: *Equazioni differenziali nel campo reale II*, second edition, 1949.

[2] Opial, Z.: "Sur l'équation différentielle $u'' + a(t) = 0$". *Annales Polon. Math.* **5** (1958) 77—93.

[3] Foias, C.—Gussi, G.—Poenaru, V.: "Une méthode directe dans l'étude des équations aux dérivées partielles". *Math. Nachr.* **15** (1956) 89—116.

[4] Bihari, I.: "Oscillation and monotonity theorems". *Acta Math. Hung. Acad.* **9** (1958) 83—104.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ARMELLINI—TONELLI—SANSONE НА НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ $u'' + a(t)f(u) = 0$

I. BIHARI

Резюме

В статье дается доказательство следующего факта. Всякое решение нелинейного уравнения

$$u'' + a(t)\,f(u) = 0$$

стремится к нулью при $t \to \infty$, если только $a(t)$ положительная, непрерывная неубывающая функция, $\log a(t)$ стремится «регулярно» к $+\infty$ при $t \to +\infty$, $f(u)$ является неубывающей нечёткой функцией, далее, $\frac{f(u)}{u}$ не убывающая функция при $u > 0$, $\frac{f(u)}{u} = O(t)$ $(u \to 0)$ и, наконец, $|f(u_1) - f(u_2)| \leqq \omega(|u_1 - u_2|)$, где $\omega(z)$ неубывающая положительная функция и

$$\int_0^{u_0} \frac{dz}{\omega(z)} = \infty \qquad (u_0 \to 0).$$

ÜBER DIE REKURSIVITÄT EINIGER ÜBERSETZUNGS-TRANSFORMATIONEN (I. MITTEILUNG)

von

RÓZSA PÉTER

1. Sowohl in der exakten Formulierung der einzelnen Zweige der Mathematik als auch in der Programmierung von Rechenautomaten spielt die Angabe der verwendeten Sprachen und die Art der Übersetzung solcher Sprachen auf einander eine wichtige Rolle. Ich behaupte, dass bei exakter Formulierung die betreffenden Übersetzungs-Transformationen auf einer »Wortemenge« mit geeignet gewähltem »Alphabet« primitiv-rekursiv sind.

In vorliegender I. Mitteilung beschränke ich mich auf das folgende Teilproblem:

Man trachtet (besonders bei den praktischen Anwendungen) eine exakte Sprache möglichst ökonomisch anzugeben. In einer solchen Sprache ist der »Ausdruck« immer ein zentraler Begriff (algebraischer, logischer, oder im allgemeinsten Sinn betrachteter abstrakter Ausdruck). Zum Aufzeichnen eines Ausdrucks werden üblich Anfangsklammern und Endklammern benutzt. LUKASIEWICZ hat eine eindeutige klammernfreie Bezeichnung eingeführt, auf Kosten einer wesentlichen Änderung der Reihenfolge der Zeichen eines Ausdrucks.[1] KALMÁR[2] hat bewiesen, dass man im Fall von höchstens zwei Operationen bei Behaltung der ursprünglichen Reihenfolge die Endklammern ersparen kann, und dass sein Bezeichnungssystem sogar dann eindeutig bleibt, wenn gewisse Zeichen auch mehrdeutig verwendet werden (wie z. B. $\sim$ manchmal als Negationszeichen, manchmal als Äquivalenzzeichen verwendet wird; ein Anfangsklammer kann mit dem LUKASIEWICZschen Zeichen C der Implikation verwechselt werden; K kann sowohl als Zeichen der Konjunktion als auch als Zeichen einer Konstante vorkommen).

Das Bezeichnungssystem mit der üblichen Klammernverwendung in den Ausdrücken soll mit (S_1) bezeichnet werden, und das LUKASIEWICZsche klammernfreie System mit (S_2). Die Ausdrücke der Systeme (S_1) und (S_2) können ein-eindeutig auf einander übersetzt werden. In vorliegender Arbeit beweise ich, dass die betreffenden Übersetzungs-Transformationen auf einer geeigneten »Wortemenge« primitiv-rekursiv sind. (Dasselbe gilt auch für Übersetzungen zwischen Ausdrücke von Systemen mit anderen Klammernkonventionen; auf den Fall des KALMÁRschen Halbklammernsystems, und anderer Systeme, deren

[1] Siehe z.B. L. KALMÁR, Another proof of the Markov-Post theorem, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* **3** (1952) S. 1—27.

[2] Mündliche Mitteilung von L. KALMÁR, vorgetragen in Juni 1960 am Kolloquium »Sprachen und Algorithmen« in Berlin.

Behandlung etwas umständlicher ist, komme ich noch zurück.) Ich beschränke mich dabei auf Ausdrücke mit 1- und 2-stelligen Operationen (es kann ja z. B. jede arithmetische Operation auf Addition und Multiplikation nebst einstelligen Operationen, jede logische Operation auf Negation und etwa Konjunktion zurückgeführt werden); der Gedankengang könnte aber leicht auch auf Systeme mit mehrstelligen Operationen übertragen werden.

2. Nun folgt die exakte Angabe der betrachteten Systeme.

Für beide Systeme ist eine abzählbare Menge $\mathfrak{V}$ der Zeichen $v_1, v_2, \ldots$ für Variablen (worunter auch die Konstanten zu zählen sind; hier ist eine Unterscheidung dieser Begriffe belanglos), ferner eine abzählbare Menge $\mathfrak{E}$ der Zeichen $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ für einstellige Operationen, endlich eine abzählbare Menge $\mathfrak{Z}$ der Zeichen $\Theta_1, \Theta_2, \ldots$ für zweistellige Operationen vorhanden. In (S_1) kommen ausserdem noch die beiden Klammernzeichen vor. $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{Z}$ sind paarweise fremd, und enthalten auch die Klammernzeichen nicht.

Das leere Wort Λ und jedes Element von $\mathfrak{V}$ gilt in beiden Systemen als Ausdruck. Ausserdem gelten für $i = 1, 2, \ldots$, falls $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ bereits Ausdrücke sind,

$$\text{in } (S_1) \quad \Delta_i\, \mathfrak{a}_1 \quad \text{und} \quad (\mathfrak{a}_1\, \Theta_i\, \mathfrak{a}_2)\,,$$

$$\text{in } (S_2) \quad \Delta_i\, \mathfrak{a}_1 \quad \text{und} \quad \Theta_i\, \mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_2$$

als Ausdrücke.

So enthält ein Ausdruck von (S_1) genau soviele Anfangsklammern als Endklammern. Und ein nicht zu $\mathfrak{V}$ gehöriger Ausdruck $\mathfrak{a}$ von (S_1) beginnt entweder mit einem Δ_i-Zeichen (worauf ein Ausdruck folgt), oder mit einer Anfangsklammer. Im letzteren Fall ist er der Form $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_1\, \Theta_i\, \mathfrak{a}_2)$, wo $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ eindeutig bestimmte Ausdrücke sind, und Θ_i ein eindeutig bestimmtes Element von $\mathfrak{Z}$ ist. Betrachtet man nämlich die Zeichenreihe, wodurch $\mathfrak{a}$ aufgeschrieben wird, so können zwar darin an verschiedenen Stellen Elemente von $\mathfrak{Z}$ auftreten, aber unser Θ_i ist das einzige unter diesen, vor welchem genau um 1 mehr Anfangsklammern als Endklammern stehen.

Ein nicht zu $\mathfrak{V}$ gehöriger Ausdruck $\mathfrak{a}$ von (S_2) beginnt entweder mit einem Δ_i-Zeichen (worauf ein Ausdruck folgt), oder mit einem Θ_i-Zeichen. Im letzteren Fall ist er der Form $\mathfrak{a} = \Theta_i\, \mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_2$, wo $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ eindeutig bestimmte Ausdrücke sind (siehe Fussnote 1)).

Es ergeben sich daraus unmittelbar ein-eindeutige Übersetzungen der Ausdrücke der Systeme (S_1) und (S_2) aufeinander: wird für $j_1, j_2 = 1, 2;\ j_1 \neq j_2$ ein Ausdruck von (S_{j_1}) mit (eventuell mit Striche versehenem) $\mathfrak{a}$ und der ihm entsprechende Ausdruck von (S_{j_2}) mit $t_{j_1 j_2}(\mathfrak{a})$ bezeichnet, so gilt für $i = 1, 2, \ldots$

(1) falls

$$\mathfrak{a} \in \mathfrak{V}\,,$$

dann

$$t_{j_1 j_2}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}\,;$$

(2) falls

$$\mathfrak{a} = \Delta_i\, \mathfrak{a}'\,,$$

dann

$$t_{j_1 j_2}(\mathfrak{a}) = \Delta_i\, t_{j_1 j_2}(\mathfrak{a}')\,;$$

(3) falls

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}'\, \Theta_i\, \mathfrak{a}'')\,,$$

dann

$$t_{12}(\mathfrak{a}) = \Theta_i\, t_{12}(\mathfrak{a}')\, t_{12}(\mathfrak{a}'') ;$$

(4) falls

$$\mathfrak{a} = \Theta_i\, \mathfrak{a}'\, \mathfrak{a}'',$$

dann

$$t_{21}(\mathfrak{a}) = (t_{21}(\mathfrak{a}')\, \Theta_i\, t_{21}(\mathfrak{a}'')) .$$

3. Das »Alphabet« $\mathfrak{A}$ soll als »Buchstaben« die Zeichen des Systems (S_1) (also die Elemente von $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{Z}$, ferner die Klammernzeichen, welche als Buchstaben des Alphabets fett gedruckt werden) enthalten. Die auf diesem Alphabet beruhende Wortemenge $\mathfrak{M}$ enthält jene Zeichenreihen (»Worte«), die von dem mit Λ bezeichneten leeren Wort ausgehend durch Anknüpfen der Buchstaben von $\mathfrak{A}$ entstehen. Das ist also eine »zahlenartig aufbaubare Menge«: die natürlichen Zahlen werden ja von 0 ausgehend durch »Nachfolgerbildung« d. h. durch Addieren von 1 aufgebaut; in der Wortemenge werden aber abzählbar viele »Nachfolgerfunktionen« angewandt. Ich habe[3] die Begriffe der auf zahlenartig aufbaubaren Mengen definierten verschiedenartigen rekursiven Funktionen eingeführt und ihre Zusammenhänge untersucht; hier zähle ich die bezüglichen Tatsachen für Wortemengen auf, auf die ich mich berufen werde.

1. Eine auf der Wortemenge $\mathfrak{M}$ definierte Funktion $f(x)$ heisst primitiv-rekursiv in $\mathfrak{M}$, falls sie von Λ und von den Anknüpfungsfunktionen xa_i (wo $a_i \in \mathfrak{A}$) ausgehend, durch endlich viele Substitutionen und Anwendungen des folgenden Schemas der primitiven Rekursion definiert werden kanu (wobei ${}^{-1}\Lambda = \Lambda$, und ${}^{-1}x$ für $x = a_1\, a_2 \ldots a_n$ das Wort $a_2 \ldots a_n$ bedeutet):

und für $a \in \mathfrak{A}$
$$\left.\begin{aligned} f(\Lambda) &= c \\ f(xa) &= g_a\big(x, f(x), f({}^{-1}(xa))\big) \end{aligned}\right\}, \tag{D}$$

wobei $c \in \mathfrak{A}$ und g_a für jedes a eine bereits definierte primitiv-rekursive Funktion ist. Es können dabei auch beliebig viele Parameter auftreten.

2. Mit $o(x)$ wird die »Ordnung« des Wortes x bezeichnet, wobei $o(\Lambda) = \Lambda$, und $o(x) = n$ für $x = a_1\, a_2 \ldots a_n$ ist.

3. Die natürlichen Zahlen

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \ldots$$

können etwa mit

$$\Lambda, \quad \mathbf{(}, \quad \mathbf{((}, \quad \mathbf{(((}, \ldots$$

identifiziert werden.

4. Ähnlich wie ${}^{-1}x$ kann auch x^{-1} definiert werden: $\Lambda^{-1} = \Lambda$, und x^{-1} bedeutet für $x = a_1 \ldots a_{n-1}\, a_n$ das Wort $a_1 \ldots a_{n-1}$.

5. Falls i eine natürliche Zahl ist, dann bedeutet für $o(x) \geqq i$

$$e_i(x) \quad \text{bzw.} \quad l_i(x)$$

[3] R. Péter, Über die Verallgemeinerung der Theorie der rekursiven Funktionen für abstrakte Mengen geeigneter Struktur als Definitionsbereiche, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* (eingegangen am 30-ten September 1959).

das aus den ersten i bzw. aus den letzten i Buchstaben von x bestehende Wort. (Für andere i oder x können diese Funktionen etwa als Λ definiert werden. Ähnliches gilt auch für die Folgenden.)

6. Falls i eine natürliche Zahl ist, dann bedeutet für $o(x) \geqq i$

$$^{-i}x \quad \text{bzw.} \quad x^{-i}$$

den durch Weglassen von $e_i(x)$ vom Anfang bzw. von $l_i(x)$ vom Ende von x zurückbleibenden Rest von x.

7. Die aufgezählten Funktionen (auch die Buchstaben des Alphabets als Konstanten) sind alle primitiv-rekursiv in $\mathfrak{M}$; auch alle zahlentheoretische primitiv-rekursive Funktionen lassen sich zu primitiv-rekursive Funktionen in $\mathfrak{M}$ ergänzen[4] (diese ausgedehnte Funktionen werde ich ebenso bezeichnen, wie die ursprünglichen zahlentheoretischen Funktionen). Ferner sieht man leicht, dass auch die Identitätsfunktion x und die zweistellige Anknüpfungsfunktion xy primitiv-rekursiv in $\mathfrak{M}$ sind.

8. In (D) wird $f(xa)$ mit Hilfe von $f(x)$ und $f(^{-1}(xa))$ definiert. x und $^{-1}(xa)$ gelten dabei als »unmittelbare Vorgänger« (d. h. Vorgänger nächstkleinerer Ordnung) von x. Als sämtliche Vorgänger eines Wortes werden ausser Λ seine zusammenhängende Bestandteile (»Abschnitte«) betrachtet; für diese wird auch eine zweckmässige Anordnung angegeben. Z. B. sind die Vorigänger des Wortes $x = a_1 a_2 a_3 a_4$ in dieser Reihenfolge:

$$\Lambda,\ a_1,\ a_2,\ a_1 a_2,\ a_3,\ a_2 a_3,\ a_1 a_2 a_3,\ a_4,\ a_3 a_4,\ a_2 a_3 a_4,\ a_1 a_2 a_3 a_4 .$$

Diese sind, abgesehen von x selbst, echte Vorgänger von x; die unmittelbaren Vorgänger von x sind hier $a_1 a_2 a_3$ und $a_2 a_3 a_4$.

$$y \leqq x \quad \text{bzw.} \quad y \prec x$$

gelten als kurze Bezeichnungen für die Beziehungen (die nach der bald folgenden Definition primitiv-rekursiv sind), dass y ein Vorgänger bzw. ein echter Vorgänger von x ist.

Da die natürliche Zahl n mit

$$\underbrace{((\ldots(}_{n\text{-mal}}$$

dentifiziert wurde, ist für natürliche Zahlen $x \prec y$ mit $x < y$ gleichbedeutend.

9. Einer Wortefolge $x_0, x_1, \ldots, x_n$ kann ein Wort $c_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ als für festes n in $\mathfrak{M}$ primitiv-rekursive Funktion derart zugeordnet werden, dass für $i = 0, 1, \ldots, n$ mit in $\mathfrak{M}$ primitiv-rekursiven $k_y(x)$ und long (x)

$$x_i = k_i(c_n(x_0, \ldots, x_n))$$

und

$$n = \operatorname{long}(c_n(x_0, \ldots, x_n))$$

gilt.

10. Sind nun sämtliche Vorgänger eines Wortes x in der oben genannten Reihenfolge:

$$\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{s(x)},$$

[4] Bezüglich der allgemeinen Kentnisse über zahlentheoretische rekursive Funktionen berufe ich mich auf mein Buch: R. PÉTER, Rekursive Funktionen, Budapest, Akademischer Verlag, 2-te Auflage (1957).

dann sieht man leicht, dass $s(x)$ in $\mathfrak{M}$ primitiv-rekursiv ist, und dass mit in $\mathfrak{M}$ primitiv-rekursivem $v_y(x)$ für $i = 0, 1, \ldots, s(x)$

$$\overline{x}_i = v_i(x)$$

gilt. Ist ferner für ein $x = a_1 a_2 \ldots a_n$

$$\overline{x}_i = a_{i_1+1} a_{i_1+2} \ldots a_{i_1+i_2},$$

so sieht man leicht, dass

$$i = \binom{i_1 + i_2}{2} + i_2 ,$$

und daher i eine zahlentheoretische primitiv-rekursive Funktion von i_1 und i_2 ist.

Nun kann die »Wertverlaufsfunktion« $\varphi(x)$ einer Funktion $f(x)$ durch

$$\varphi(x) = c_{s(x)}(f(\overline{x}_0), f(\overline{x}_1), \ldots, f(\overline{x}_{s(x)}))$$

definiert werden, woraus sich für $i \leqq s(x)$

$$f(\overline{x}_i) = k_i(\varphi(x)),$$

ferner

$$s(x) = \operatorname{long}(\varphi(x))$$

ergibt.

11. Wird in der Definition (D) $f(x)$ und $f({}^{-1}(xa))$ durch $\varphi(x)$ bzw. $\varphi({}^{-1}(xa))$ ersetzt, so wird aus (D) eine Wertverlaufsrekursion (D*); und ich habe bewiesen, dass auch die Anwendung von (D*) nicht von der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen von $\mathfrak{M}$ hinausführt.

12. Die charakteristische Funktion $b(x_1, \ldots, x_n)$ einer Wortbeziehung $B(x_1, \ldots, x_n)$ kann etwa durch

$$b(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \Lambda, & \text{wenn } B(x_1, \ldots, x_n) \\ (& \text{sonst} \end{cases}$$

definiert werden; und $B(x_1, \ldots, x_n)$ wird dann in $\mathfrak{M}$ primitiv-rekursiv genannt, wenn $b(x_1, \ldots, x_n)$ eine in $\mathfrak{M}$ primitive-rekursive Funktion ist. Es ist z. B. die charakteristische Funktion $z(x)$ der Beziehung »x ist der Form (((. . . («, und daher auch die Beziehung »eine natürliche Zahl zu sein« primitiv-rekursiv in $\mathfrak{M}$.

13. Aussagenlogische Verknüpfungen überführen primitiv-rekursive Beziehungen wieder in solche; ferner sind samt der Funktion $f(x)$ und der Beziehung $B(x, y)$ auch die Beziehungen

$$(Ey)\,[y \leqq f(x) \;\&\; B(x, y)] \quad \text{und} \quad (y)\,[y \leqq f(x) \rightarrow B(x, y)]$$

und auch die Funktion

$$\mu_y\,[y \leqq f(x) \;\&\; B(x, y)]$$

— welche falls es Worte $y \leqq f(x)$ mit $B(x, y)$ gibt, das erste solche y in der festgesetzten Reihenfolge der Vorgänger von $f(x)$, sonst aber Λ als Wert annimmt — primitiv-rekursiv in $\mathfrak{M}$. (Ausser den ausgeschriebenen Variablen können immer auch beliebig viele Parameter auftreten.)

14. Endlich werde ich noch benutzen, dass falls $B_i(x_1, \ldots, x_n)$ für $i = 1, 2, \ldots, r$ sich gegenseitig ausschliessende primitiv-rekursive Beziehungen

in $\mathfrak{M}$ sind, dann auch die aus in $\mathfrak{M}$ primitiv-rekursiven Funktionen $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, r, r+1)$ folgenderweise »zusammengeflickte« Funktion:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n), & \text{falls} \quad B_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_r(x_1, \ldots, x_n), & \text{falls} \quad B_r(x_1, \ldots, x_n) \\ f_{r+1}(x_1, \ldots, x_n) & \text{sonst} \end{cases}$$

primitiv-rekursiv in $\mathfrak{M}$ ist.

4. Setzen wir von nun an der Reihe nach

$$f_v(x), \ f_\Delta(x), \ f_\Theta(x), \ f_((x), \ f_)(x)$$

für die charakteristische Funktionen der Beziehungen

$$x \in \mathfrak{V}, \ x \in \mathfrak{E}, \ x \in \mathfrak{Z}, \ x = (, \ x =) \, .$$

Es ist klar, dass diese Funktionen primitiv-rekursiv in $\mathfrak{M}$ sind; z. B. kann $f_\Delta(x)$ durch folgende primitive Rekursion definiert werden:

$$f_\Delta(\Lambda) = ($$

$$f_\Delta(xv_i) = f_\Delta(x\,\Theta_i) = f_\Delta(x\,() = f_\Delta(x)) = ($$

$$f_\Delta(x\,\Delta_i) = \begin{cases} \Lambda, & \text{falls} \quad x = \Lambda \\ (& \text{sonst} \end{cases}$$

5. Seien

$$s_1(x) \text{ und } s_2(x)$$

die charakteristischen Funktionen der Beziehungen, dass x ein Ausdruck des Systems (S_1) bzw. (S_2)) ist. Ihre exakten Definitionen lauten:

$$s_1(\Lambda) = \Lambda$$

und für $a \in \mathfrak{A}$

$$s_1(xa) = \begin{cases} \Lambda, \text{ falls } f_v(xa) = \Lambda \vee (f_\Delta(e_1(x)) = \Lambda \;\&\; s_1({}^{-1}(xa)) = \Lambda) \vee \\ \quad \vee (Ey_1)(Ey_2)(Ey)\,[y_1, y_2, y \leqq x \;\&\; s_1(y_1) = s_1(y_2) = f_\Theta(y) = \Lambda \;\& \\ \quad \& \; y_1 \neq \Lambda \;\&\; y_2 \neq \Lambda \;\&\; xa = (y_1 y y_2)] \\ (\text{ sonst}; \end{cases}$$

ferner

$$s_2(\Lambda) = \Lambda$$

und für $a \in \mathfrak{A}$

$$s_2(xa) = \begin{cases} \Lambda, \text{ falls } f_v(xa) = \Lambda \vee (f_\Delta(e_1(x)) = \Lambda \;\&\; s_2({}^{-1}(xa)) = \Lambda) \vee \\ \quad \vee (f_\Theta(e_1(x)) = \Lambda \;\&\; (Ey_1)(Ey_2)\,[y_1, y_2 \leqq {}^{-1}(xa) \;\& \\ \quad \& \; s_2(y_1) = s_2(y_2) = \Lambda \;\&\; y_1 \neq \Lambda \;\&\; y_2 \neq \Lambda \;\&\; {}^{-1}(xa) = y_1 y_2]) \\ (\text{ sonst}. \end{cases}$$

Es handelt sich hier einfach um Wertverlaufsrekursionen. Das zeige ich für die Definition von $s_1(x)$; für $s_2(x)$ geht es ähnlich.

Die Existenz von $y_1, y_2, y \leqq x$ gewisser Eigenschaft ist gleichbedeutend mit der Existenz solcher natürlichen Zahlen $i_1, i_2, j \leqq s(x)$, für welche die Vorgänger $\bar{x}_{i_1}, \bar{x}_{i_2}, \bar{x}_j$ von x die gewünschte Eigenschaft besitzen. Diese sind der Reihe nach gleich

$$v_{i_1}(x),\ v_{i_2}(x),\ v_j(x)\,.$$

Ferner besteht $^{-1}(xa)$ aus genau sovielen Buchstaben wie x, daher ist die Anzahl $s(^{-1}(xa))$ der Vorgänger von $^{-1}(xa)$ auch $s(x)$. Wird die Wertverlaufsfunktion von $s_1(x)$ mit $\sigma_1(x)$ bezeichnet, so gilt daher

$$s_1(^{-1}(xa)) = k_{s(x)}\big(\sigma_1(^{-1}(xa))\big)\,;$$

ferner ist

$$s_1(y_1) = s_1(\bar{x}_{i_1}) = k_{i_1}(\sigma_1(x))\,,$$

$$s_1(y_2) = s_1(\bar{x}_{i_2}) = k_{i_2}(\sigma_1(x))\,.$$

Daher kann die Definition von $s_1(x)$ folgendermassen umformuliert werden:

$$s_1(\Lambda) = \Lambda$$

und für $a \in \mathfrak{A}$

$$s_1(xa) = \begin{cases} \Lambda, \text{ falls } f_v(xa) = \Lambda \vee (f_\Delta(e_1(x)) = \Lambda \,\&\, k_{s(x)}\big(\sigma_1(^{-1}(xa))\big) = \Lambda\big) \vee \\ \vee (E_{i_1})\,(E_{i_2})\,(Ej)\,[i_1, i_2, j \leqq s(x) \,\&\, z(i_1) = z(i_2) = z(j) = \Lambda \,\& \\ \&\, k_{i_1}(\sigma_1(x)) = k_{i_2}(\sigma_1(x)) = f_\Theta(v_j(x)) = \Lambda \,\& \\ \&\, v_{i_1}(x) \neq \Lambda \,\&\, v_{i_2}(x) \neq \Lambda \,\&\, xa = \mathbf{(}v_{i_1}(x)\, v_j(x)\, v_{i_2}(x)\mathbf{)}] \\ \mathbf{(}\ \text{sonst,} \end{cases}$$

das ist aber eine Wertverlaufsrekursion.

6. Jetzt können wir endlich die Übersetzungstransformationen untersuchen.

Für $i, j = 1, 2,\ i \neq j$ soll $t_{ij}(x)$, falls x ein Ausdruck des Systems (S_i) ist, die Übersetzung dieses Ausdrucks auf die Sprache des Systems (S_j) bedeuten: für andere Worte x sei $t_{ij}(x) = \Lambda$.

Zur Definition von $t_{12}(x)$ betrachten wir näher einen mit **(** beginnenden Ausdruck xa des Systems (S_1). Ein solcher ist der Form

$$xa = \mathbf{(}y_1\, \Theta_i\, y_2\mathbf{)}\,,$$

wobei y_1 und y_2 nicht-leere Ausdrücke des Systems (S_1), und beide Vorgänger von x sind. Es gilt

$$y_2 = {}^{-(o(y_1)+2)}x$$

und

$$y_1 = \mu_y\big[y \leqq x \,\&\, s_1(y) = \Lambda \,\&\, e_{x(y)}(^{-1}x) = y \,\&\, f_\Theta\big(l_1(e_{o(y)+2}(x))\big) = \Lambda \,\&$$

$$\&\, s_1({}^{-(o(y)+2)}x) = \Lambda\big]\,.$$

In den Weiteren sollen y_1 und y_2 immer diese in $\mathfrak{M}$ primitiv-rekursiven Funktionen von x bezeichnen.

Dann kann $t_{12}(x)$ folgenderweise definiert werden:

$$t_{12}(\Lambda) = \Lambda$$

und für $a \in \mathfrak{A}$

$$t_{12}(xa) = \begin{cases} a, \text{ falls } x = \Lambda \,\&\, f_v(a) = \Lambda \\ e_1(x)\, t_{12}({}^{-1}(xa)), \text{ falls } s_1(xa) = \Lambda \,\&\, f_\Delta(e_1(x)) = \Lambda \\ l_1(e_{o(y_1)+2}(x))\, t_{12}(y_1)\, t_{12}(y_2), \\ \quad \text{falls } s_1(xa) = \Lambda \,\&\, e_1(x) = (\\ \Lambda \text{ sonst.} \end{cases}$$

Wegen $y_1, y_2 \preceq x$ zeigt man leicht, dass es sich hier um einen Spezialfall der Wertverlaufsrekursion (D*) handelt.

Wenn nämlich

$$x = a_1 a_2 \ldots a_{s(x)}$$

ist, so ist

$$y_1 = a_2 \ldots a_{o(y_1)+1}$$

und

$$y_2 = a_{o(y_1)+3} \ldots a_{s(x)}\,;$$

diese sind aber Vorgänger $\bar{x}_{j_1}$ bzw. $\bar{x}_{j_2}$ von x, wobei

$$j_1 = \binom{o(y_1)+1}{2} + o(y_1) \quad \text{und} \quad j_2 = \binom{s(x)}{2} + \bigl(s(x) \dot{-} (o(y_1)+2)\bigr)$$

in $\mathfrak{M}$ primitiv-rekursive Funktionen von x sind. So gilt mit in $\mathfrak{M}$ primitiv-rekursiven $g_1(x)$ und $g_2(x)$

$$y_1 = \bar{x}_{g_1(x)}$$

und

$$y_2 = \bar{x}_{g_2(x)}\,.$$

Es soll nun $\tau_{12}(x)$ die Wertverlaufsfunktion von $t_{12}(x)$ bezeichnen.

Wie bereits in Nr. 5 bemerkt wurde, ist

$$s({}^{-1}(xa)) = s(x)\,,$$

also gilt

$$t_{12}({}^{-1}(xa)) = k_{s(x)}\bigl(\tau_{12}({}^{-1}(xa))\bigr)\,.$$

Ferner gilt nach den Vorherigen

$$t_{12}(y_1) = k_{g_1(x)}(\tau_{12}(x)) \quad \text{und} \quad t_{12}(y_2) = k_{g_2(x)}(\tau_{12}(x))\,.$$

Werden diese in die Definition der Funktion $t_{12}(x)$ eingesetzt, so erhält man

$$t_{12}(\Lambda) = \Lambda$$

und für $a \in \mathfrak{A}$

$$t_{12}(xa) = \begin{cases} a, \text{ falls } x = \Lambda \,\&\, f_v(a) = \Lambda \\ e_1(x)\, k_{s(x)}\bigl(\tau_{12}({}^{-1}(xa))\bigr), \text{ falls } s_1(xa) = \Lambda \,\&\, f_\Delta(e_1(x)) = \Lambda \\ l_1(e_{o(y_1)+2}(x))\, k_{g_1(x)}(\tau_{12}(x))\, k_{g_2(x)}(\tau_{12}(x)), \\ \quad \text{falls } s_1(xa) = \Lambda \,\&\, e_1(x) = (\\ \Lambda \text{ sonst,} \end{cases}$$

und das ist tatsächlich ein Spezialfall der Wertverlaufsrekursion (D*).

7. Ganz ähnlich geht auch die Untersuchung von $t_{21}(x)$.

Ein mit einem Element Θ_i der Menge $\mathfrak{Z}$ beginnender Ausdruck xa von (S_2) ist der Form

$$xa = \Theta_i z_1 z_2 ,$$

wobei z_1, z_2 nicht-leere Ausdrücke von (S_2), und beide echte Vorgänger von $^{-1}(xa)$ sind. Es gilt

$$z_2 = {}^{-(o(z_1)+1}(xa)$$

und

$$z_1 = \mu_z [z \leqq x \,\&\, s_2(z) = \Lambda \,\&\, e_{o(z)}(^{-1}x) = z \,\&\, s_2(^{-(o(z)+1}(xa)) = \Lambda] \,.$$

Mit diesen lautet die Definition von $t_{21}(x)$:

$$t_{21}(\Lambda) = \Lambda$$

und für $a \in \mathfrak{A}$

$$t_{21}(xa) = \begin{cases} a, \text{ falls } x = \Lambda \,\&\, f_v(a) = \Lambda \\ e_1(x)\, t_{21}(^{-1}(xa)), \text{ falls } s_2(xa) = \Lambda \,\&\, f_\Delta(e_1(x)) = \Lambda \\ (t_{21}(z_1)\, e_1(x)\, t_{21}(z_2)) , \\ \quad \text{falls } s_2(xa) = \Lambda \,\&\, f_\Theta(e_1(x)) = \Lambda \\ \Lambda \text{ sonst}, \end{cases}$$

Wegen $z_1, z_2 \leqq {}^{-1}(xa)$ beweist man dem Verfahren in Nr. 6 ähnlich, dass auch dies ein Spezialfall der Wertverlaufsrekursion (D*) ist.

(Eingegangen: 11. September, 1961.)

О РЕКУРСИВНОСТИ ПЕРЕВОДНЫХ ТРАНСФОРМАЦИЙ (I. СООБЩЕНИЕ)

R. PÉTER

Резюме

Как в экзактной формулировке отдельных отрасль математики, так и в программировании арифмографов, важную роль выполняет вопрос, какой язык применяется и какие языки каким образом переводятся друг на друга. Я ставил себе целью доказывать, что указанные переводные трансформации являются в альфавитном отношении способно выбранном «множестве слов» примитивными рекурсиями.

В этом первом сообщении я ограничиваюсь на следующую частную проблему:

Мы стараемся, особенно в практике применений, задавать какой-то экзактный язык насколько только возможно экономично. В таком языке «выражение» (алгебраическое, логическое или в самом общепринятом значении абстрактное выражение) является всегда центральным понятием.

В написании какого-нибудь выражения обыкновенно применяются в начинающие и закрывающие скобки. Лукашевиц заводил существенное изменение в порядок стоящих при выражении знаков однозначное бесскобочное обозначение. Выражение скобочной (S_1) и бесскобочной (S_2) системы обозначения можно взаимно и однозначно переводить друг на друга. В статье доказываю, что соответствующие переводные трансформации являются примитивными рекурсивными на одном подходящем множестве слов. (На системы, коренившиеся в других скобочных конвенциях имеют действие подобные правила; к таким, например к «полускобочной» системе обозначения Калмара я следующий раз вернусь.

ÜBER DIE »KÜRZESTE« FORM VON BOOLESCHEN FUNKTIONEN

von

RÓZSA PÉTER

1. In der Theorie der Synthese von Stromkreisen auf Grund von gegebenen Arbeitsbedingungen spielen Boolesche Funtionen eine wichtige Rolle, d. h. Funktionen, die selber, und auch ihre Variablen, nur zwei Werte (wie »wahr« und »falsch«) annehmen können. Bekanntlich können diese Funktionen mit Hilfe von Konjunktionen, Disjunktionen und Negationen von den Variablen aufgebaut werden (sogar mit wenigeren Operationen, aber dann weniger übersichtlich); man denke z. B. an ihre eindeutige Darstellbarkeit in einer ausgezeichneten disjunktiven Normalform. L. KALMÁR gab mir die Anregung zur Untersuchung der — aus technisch-ökonomischen Gründen wichtigen — kürzestmöglichen Darstellungen der Booleschen Funktionen mit Hilfe der genannten drei Operationen; wobei unter der Länge einer Formel die Anzahl der darin auftretenden Variablen verstanden wird, jede sovielmal gerechnet, wie oft sie in dem Ausdruck vorkommt. Freilich benötigt man einen möglichst einfachen Algorithmus zur Gewinnung der kürzestmöglichen Darstellung von beliebig gegebenen Booleschen Funktionen; als erster Schritt in dieser Richtung ist es daher interessant zunächst theoretisch zu untersuchen, wasfür (inwiefern rekursive) Algorithmen hier zu erwarten sind.

In vorliegender Arbeit beweise ich, dass *sowohl die minimale Länge der Formeln, die eine gegebene Boolesche Funktion F von n Variablen darstellen, als auch eine bestimmte solche Formel von minimaler Länge, in einer passenden Wortemenge als primitiv-rekursive Funktionen von F und n definiert werden können.*

2. Betreffs der Kentnisse über zahlentheoretische rekursive Funktionen berufe ich mich auf mein Buch[1], und betreffs der Kenntnisse über Wortemengen und in Wortemengen rekursive Funktionen auf meine in dieser Zeitschrift früher erscheinende Arbeit[2], worin auch die ursprüngliche Quelle[3] dieser Untersuchungen zitiert wird, und ohne Beweis all das aufgezählt wird, was davon auch in dieser Arbeit benutzt wird, mit einigen Ausnahmen, die ich hier angebe:

Auch die folgenden Funktionen sind primitiv-rekursiv in einer Wortemenge:

1) $$b_i(x)\,,$$

das falls i eine natürliche Zahl ist, den i-ten Buchstaben des Wortes x bedeutet;

---

[1] R. PÉTER, Rekursive Funktionen, Budapest, Akademischer Verlag, 2te Auflage (1957)

[2] R. PÉTER, Über die Rekursivität einiger Übersetzungs-Transformationen (I. Mitteilung), Nr. 3.

[3] R. PÉTER, Über die Verallgemeinerung der Theorie der rekursiven Funktionen für abstrakte Mengen geeigneter Struktur als Definitionsbereiche, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* (eingegangen am 30ten September 1959).

2) die Anzahl

$$h^{(b)}(x)$$

des Auftretens des Buchstaben b im Wort x;

3) $$\operatorname{subst}(x, y, z) \text{ und } \operatorname{sub}(x, y, z),$$

welche beide für $y \neq \Lambda$ das aus x dadurch entstehende Wort bezeichnen, dass in x jedes Vorkommen von y durch z ersetzt wird (von rechts nach links bzw. umgekehrt, was aber in dieser Arbeit ohne belang ist); bei subst (x, y, z) vorausgesetzt, dass die Ersetzung eines solchen y durch z kein neues Vorkommen von y in x zustandebringt; und bei sub (x, y, z) vorausgesetzt, dass $o(z) < o(y)$ ist.

Endlich werde ich noch benutzen, dass die »eingeschachtelte Rekursion«, worin für die Parameter Einsetzungen erfolgen, nicht von der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen hinausführt.

3. Eine Boolesche Funktion von n Variablen wird durch ihre Wertetabelle angegeben; daraus lässt sich aber ihre ausgezeichnete disjunktive Normalform unmittelbar entnehmen, und auch umgekehrt liest man aus einer solchen Normalform unmittelbar die Wertetabelle heraus; z. B. sicht man unmittelbar, dass die Wertetabelle

A_1	A_2	F
wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
falsch	wahr	falsch
falsch	falsch	wahr

und die ausgezeichnete disjunktive Normalform

$$F = A_1 A_2 \vee \bar{A}_1 \bar{A}_2$$

dieselbe Funktion F darstellen (wobei das Nacheinandersetzen von Formeln ihre Konjunktion bedeutet). In den Folgenden werde ich die Booleschen Funktionen durch ihre ausgezeichnete disjunktive Normalform angeben.

Ferner werde ich mich in den Folgenden auf Formeln beschränken, in welchen keine Negation einer mehrgliedrigen Formel als Teilformel vorkommt. Die Auflösung einer mehrgliedrigen Negation mit Benutzung einer de-Morgan-Identität ändert ja nichts an der Länge der betreffenden Formel, und in diesen Untersuchungen kommt es nur darauf an.

So bietet sich als passende Wortemenge die Wortemenge $\mathfrak{M}$ mit dem Alphabet

$$\mathfrak{A} = \{\mathbf{(}, \mathbf{)}, \mathbf{V}, A_1, \bar{A}_1, A_2, \bar{A}_2, \ldots\}.$$

Zur Unterscheidung von den üblich gebrauchten Klammern- und Disjunktionszeichen werden diese als Buchstaben des Alphabets (das letztere als $\mathbf{V}$) fett gedruckt. Die natürlichen Zahlen

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \ldots$$

können etwa mit

$$\Lambda, \quad (, \quad ((, \quad (((, \ldots$$

identifiziert werden.

Mit der Konvention, dass die Konjunktion »stärker bindet« als die Disjunktion, können Klammern erspart werden : zur Konjunktion »geschlossener« Formeln brauchen die Konjunktionsglieder nicht in Klammern gesetzt werden; dabei bedeutet die »Geschlossenheit« einer Formel, dass darin entweder kein **V**-Zeichen vorkommt, oder es gibt links von jedem ihrer **V**-Zeichen mehr **(**-Zeichen als **)**-Zeichen (so muss zu mindestens einer der links vom betreffenden **V** stehenden Anfangsklammern eine rechts von diesem **V** stehende Endklammer gehören; in einer Formel muss ja die Anzahl der Endklammern mit der Anzahl der Anfangsklammern übereinstimmen). Die Konjunktion geschlossener Formeln ist wieder eine geschlossene Formel.

So ist jede Formel die Disjunktion von eindeutig bestimmten geschlossenen Formeln, »Disjunktionsglieder« genannt (falls sie geschlossen ist, ist sie eine eingliedrige Disjunktion). Eine geschlossene Formel x enthält entweder keine **(**-Zeichen (und dann auch keine **V**-Zeichen: sie ist dann eine »reine Konjunktion« von unnegierten und negierten Variablen), oder kann sie in der Form

$$x = z_1(y_1 \mathbf{V}\, y_2)\, z_2$$

geschrieben werden, wo das ausgeschriebene **(**-Zeichen das von links erste **(**-Zeichen in x (und so z_1 eine reine Konjunktion) ist, und das ausgeschriebene **)**-Zeichen sein Klammernpaar (d.h. vom ausgeschriebenen **(** nach rechts gehend sind vor ihm immer mehr **(**-Zeichen als **)**-Zeichen, und wenn man das ausgeschriebene **)** erreicht, genau so viele; wonach z_2 eine geschlossene Formel ist), ferner y_1 eine geschlossene Formel ist.

§ 1.

4. Nun erweisen sich leicht die charakteristischen Funktionen (welche die Werte Λ, **(** annehmen) der Eigenschaften:

»**(** zu sein«, «**)** zu sein», »**V** zu sein«, »ein A_i zu sein«, »ein $\bar{A}_i$ zu sein«, die der Reihe nach mit

$$f_((x),\ f_)(x),\ f_{\mathbf{V}}(x),\ f_A(x),\ f_{\bar{A}}(x)$$

bezeichnet werden, als primitiv-rekursiv in $\mathfrak{M}$. Z.B. lautet die Definition von $f_((x)$:

$$f_((\Lambda) = ($$

und für $a \in \mathfrak{A}$

$$f_((xa) = \begin{cases} \Lambda, & \text{falls} \quad x = \Lambda \ \&\ a = (\\ (& \text{sonst}\,; \end{cases}$$

und von $f_A(x)$:

$$f_A(\Lambda) = ($$

$$f_A(xA_i) = \begin{cases} \Lambda, & \text{falls} \quad x = \Lambda \\ (& \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_A(x\,() = f_A(x\,)) = f_A(x\,\mathbf{V}) = f_A(x\,\bar{A}_i) = (\,.$$

5. Zur Definition der charakteristischen Funktion $f_F(x)$ der Eigenschaft »Formel zu sein« benötigt man die Hilfsfunktion x^*, welche für eine geschlossene Formel x diese Formel selbst, und für andere Formeln $\mathbf{(}x\mathbf{)}$ bedeutet. (Falls x keine Formel ist, so ist der Wert von x^* belanglos für uns.) Nach der Definition

$$x^* = \begin{cases} x, \text{ falls } \mathbf{V} \not\leqq x \vee (y)\big[y \leqq x \rightarrow \big(l_1(e_{\sigma(y)}(x)) = \mathbf{V} \rightarrow \\ \quad \rightarrow h^{())}(e_{\sigma(y)}(x)) \prec h^{(()}(e_{\sigma(y)}(x))\big)\big] \\ \mathbf{(}x\mathbf{)} \text{ sonst} \end{cases}$$

ist auch x^* primitiv-rekursiv in $\mathfrak{M}$.

Für eine Formel x ist

$$x = x^*$$

gleichbedeutend damit, dass x geschlossen ist.

Die Formeln werden nun folgendermassen aufgebaut:

1) Es wird auch eine »leere« Formel zugelassen.

2) Jedes A_i und jedes $\bar{A}_i$ ist eine Formel.

3) Sind $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ bereits nicht leere Formeln, dann sind

$$\mathfrak{f}_1 \mathbf{V} \mathfrak{f}_2 \text{ und } \mathfrak{f}_1^* \mathfrak{f}_2^*$$

auch Formeln.

Daher kann endlich $f_F(x)$ wie folgt definiert werden:

$$f_F(\Lambda) = \Lambda$$

und für $a \in \mathfrak{A}$

$$f_F(xa) = \begin{cases} \Lambda, \text{ falls } f_A(xa) = \Lambda \vee f_{\bar{A}}(xa) = \Lambda \vee \\ \vee (Ey_1)(Ey_2)\,[y_1 \leqq x \;\&\; y_2 \leqq {}^{-1}(xa) \;\& \\ \& \; y_1 \neq \Lambda \;\&\; y_2 \neq \Lambda \;\&\; f_F(y_1) = f_F(y_2) = \Lambda \;\& \\ \& \; (xa = y_1 \mathbf{V} y_2 \vee xa = y_1^* y_2^*)] \\ (\quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $f_F(xa)$ mit Hilfe von Funktionswerten $f_F(y_1)$ und $f_F(y_2)$ definiert wird, wo $y_1 \leqq x$ und $y_2 \leqq {}^{-1}(xa)$, zeigt man leicht, dass dies eine Wertverlaufsrekursion, und daher $f_F(x)$ in $\mathfrak{M}$ primitiv-rekursiv ist. Ich berufe mich dabei (und auch in den folgenden ähnlichen Fällen) auf meine frühere Arbeit,[2] worin ich solche Gedankengänge bis auf die Einzelheiten durchgeführt habe. Und dasselbe geht genau so für jede Definition dieser Arbeit, wo der Wert einer Funktion an einer Stelle mit Hilfe von ihren an Vorgängern dieser Stelle angenommenen Werte definiert wird.

6. Ich schicke noch die Definition einiger Hilfsfunktionen voraus.

(1) Sei x eine Formel, und $l(x)$ das letzte (geschlossene) Disjunktionsglied von x. Diese ergibt sich nach der Definition

$$l(x) = \begin{cases} x, \text{ falls } x = x^* \\ \mu_y\,[y \leqq x \;\&\; f_F(y) = \Lambda \;\&\; y = y^* \;\&\; l_{\sigma(y)+1}(x) = \mathbf{V}\, y] \text{ sonst} \end{cases}$$

als primitiv-rekursiv in $\mathfrak{M}$ (falls x keine Formel ist, ist der Wert $l(x)$ belanglos für uns; ähnliches gilt in den Folgenden mehrmals).

(2a) Sei $f(y)$ primitiv-rekursiv in $\mathfrak{M}$ mit $f(y) \neq \Lambda$ für $y \neq \Lambda$, und x eine Formel; dann ist $F_f^{(d)}(x)$, das aus x so entsteht, dass jedes Disjunktionsglied y von x durch $f(y)$ ersetzt wird, auch primitiv-rekursiv in $\mathfrak{M}$. Denn die Definition von $F_f^{(d)}(x)$ lautet, mit Hilfe der durch

$$h_{\mathbf{V}}(x) = \begin{cases} \mathbf{V}, & \text{falls } x \neq x^* \\ \Lambda & \text{sonst} \end{cases}$$

definierten, in $\mathfrak{M}$ primitiv-rekursiven Funktion:

$$F_f^{(d)}(\Lambda) = \Lambda$$

und für $a \in \mathfrak{A}$

$$F_f^{(d)}(xa) = F_f^{(d)}\left((xa)^{-(1+o('(xa)))}\right) h_{\mathbf{v}}(xa)\, f(l(xa))\,,$$

und man zeigt leicht, dass dies eine Wertverlaufsrekursion ist.

(2b) Noch einfacher definiert man $F_f^{(k)}(x)$, das aus der reinen Konjunktion x entsteht, wenn darin jedes Konjunktionsglied y (d.h. jeder Buchstabe y) durch $f(y)$ ersetzt wird, als primitiv-rekursive Funktion in $\mathfrak{M}$ (hier kann auch Λ beliebig unter den Werten $f(y)$ vorkommen):

$$F_f^{(k)}(\Lambda) = \Lambda$$

und für $a \in \mathfrak{A}$

$$F_f^{(k)}(xa) = F_f^{(k)}(x)\, f(a)\,.$$

Wird diese Definition so modifiziert, dass darin $f(o(xa))$ statt $f(a)$ steht, so erhält man

$$K_f(x) = f(1)\, f(2) \ldots f(o(x))$$

als mit f primitiv-rekursive Funktion in $\mathfrak{M}$. (f und damit auch K_f kann auch von Parametern abhängen; diese schreibe ich nie an die erste Argumentenstelle.)

(3) Mit einer Funktion $f(x)$ (mit beliebigen Parametern) ist auch ihre $o(y)$-te Iteration $f^{o(y)}(x)$ primitiv-rekursiv in $\mathfrak{M}$, zufolge der Definition:

$$f^{o(\Lambda)}(x) = (x)$$

und für $a \in \mathfrak{A}$

$$f^{o(ya)}(x) = f(f(^{o(y)}(x)))\,.$$

($f^{o(y)}(x)$ ist eine Funktion von x und y, welche nur von x und $o(y)$ abhängt. Ähnliche Bezeichnungen kommen hier öfters vor.)

§ 2.

7. In diesem Paragraph kommt es darauf an, die ausgezeichnete disjunktive Normalform in n Variablen einer Formel x (von höchstens n Variablen) zu definieren. Das geschieht in kleinen Schritten, mit Hilfe einer Kette von Hilfsfunktionen.

Zuert soll die Folge der Variablen von x, falls sie keine Teilfolge der Folge

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

bildet, zu einem solchen umbenannt werden.

Man zeigt leicht, dass $A_{o(x)}$ und $\bar{A}_{o(x)}$ (mit $A_o = \bar{A}_o = \Lambda$) primitiv-rekursiv in $\mathfrak{M}$ sind. Dann ist mit $f(x) = A_{o(x)}\bar{A}_{o(x)}$

$$A_1\bar{A}_1 \ldots A_{o(y)}\bar{A}_{o(y)} = K_f(y) ;$$

sei dies kurz mit $g_{o(y)}$ bezeichnet.

Wenn nun $i_{o(y)}(x)$ die kleinste natürliche Zahl $i \leqq o(x)$ bezeichnet, für welche das i-te Zeichen des Wortes x ein in $g_{o(y)}$ nicht vorkommendes A_j oder $\bar{A}_j$ ist, dann kann dies durch

$$i_{o(y)}(x) = \mu_i \left[i \leqq o(x) \,\&\, \left(f_A(b_i(x)) = \Lambda \vee f_{\bar{A}}(b_i(x)) = \Lambda\right) \,\&\, b_i(x) \not\leqq g_{o(y)}\right]$$

als in $\mathfrak{M}$ primitiv-rekursive Funktion definiert werden.

Auch

$$j_{o(y)}(x) = \mu_j \left[j \leqq o(y) \,\&\, A_j \not\leqq x \,\&\, \bar{A}_j \not\leqq x\right]$$

ist primitiv-rekursiv in $\mathfrak{M}$.

Man braucht noch eine Hilfsfunktion $\bar{x}$, welche einem A_i immer $\bar{A}_i$ zuordnet und umgekehrt (und an belanglosen Stellen als Λ definiert werden kann). Diese kann durch die

$$\bar{\Lambda} = \Lambda$$

$$\overline{xA_i} = \begin{cases} \bar{A}_i, & \text{falls } x = \Lambda \\ \Lambda & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\overline{x\bar{A}_i} = \begin{cases} A_i, & \text{falls } x = \Lambda \\ \Lambda & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\overline{x(} = \overline{x)} = \overline{x\mathbf{V}} = \Lambda$$

primitive Rekursion definiert werden.

Mit diesen ist auch

$$t_{o(y)}(x) = \begin{cases} \text{subst}\left(\text{subst}\left(x, b_{i_{o(y)}(x)}(x), A_{j_{o(y)}(x)}\right), \overline{b_{i_{o(y)}(x)}(x)}, \bar{A}_{j_{o(y)}(x)}\right), \\ \qquad \text{falls } f_A\left(b_{i_{o(y)}(x)}(x)\right) = \Lambda \\ \text{subst}\left(\text{subst}\left(x, b_{i_{o(y)}(x)}(x), \bar{A}_{j_{o(y)}(x)}\right), \overline{b_{i_{o(y)}(x)}(x)}, A_{j_{o(y)}(x)}\right), \\ \qquad \text{falls } f_{\bar{A}}\left(b_{i_{o(y)}(x)}(x)\right) = \Lambda \\ x \text{ sonst} \end{cases}$$

primitiv-rekursiv in $\mathfrak{M}$, und auch ihre Iteration $t_{o(y)}^{o(z)}(x)$.

Dann ist für eine Formel x von höchstens n Variablen

$$t'_n(x) = t_n^n(x)$$

eine solche Transformierte der Formel x, worin als Variablen eine Teilfolge der Folge

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

(negiert oder unnegiert oder beiderweise) vorkommen. In den Weiteren gehe ich von derartigen Formeln x aus.

8. Der nächste Schritt ist die Auflösung der Klammern einer solchen Formel x; so wird die nächste Transformierte bereits eine disjunktive Form sein, d.h. eine Disjunktion, deren Glieder Konjunktionen von — unnegierten oder negierten — Variablen sind.

Sei erst x eine geschlossene Formel, welche auch Klammern enthält; und sei ihre in Nr. 3 besprochene Darstellung

$$x = z_1 \mathbf{(} y_1 \mathbf{V} y_2 \mathbf{)} z_2.$$

Hier ist

$$z_1 = z_1(x) = \mu_z [z \leqq x \,\&\, f_F(z) = \Lambda \,\&\, \mathbf{(} \lneqq z \,\&\, e_{o(z)+1}(x) = z \mathbf{(}] ,$$

$$y_1 = y_1(x) = \mu_y [y \leqq x \,\&\, f_F(y) = \Lambda \,\&\, y = y^* \,\&\, e_{o(z_1 \mathbf{(} y)}(x) = z_1 \mathbf{(} y] ,$$

$$y_2 = y_2(x) = \mu_y [y \leqq x \,\&\, f_F(y) = \Lambda \,\&\, e_{o(z_1 \mathbf{(} y_1 \mathbf{V} y_2 \mathbf{)})}(x) = z_1 \mathbf{(} y_1 \mathbf{V} y_2 \mathbf{)}] ,$$

$$z_2 = z_2(x) = \mu_z [z \leqq x \,\&\, x = z_1 \mathbf{(} y_1 \mathbf{V} y_2 \mathbf{)} z]$$

(aus der Definition von z_1, y_1 und y_2 folgt schon, dass z_2 auch eine Formel, und zwar wegen der Geschlossenheit von x eine geschlossene Formel ist). $z_1(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ und $z_2(x)$ sind primitiv-rekursiv in $\mathfrak{M}$.

Die Auflösung der ausgeschriebenen Klammern von $x = z_1 \mathbf{(} y_1 \mathbf{V} y_2 \mathbf{)} z_2$ besteht darin, dass man dieses Wort infolge der Distributivität durch

$$y_1 z_1 z_2 \mathbf{V} y_2^* z_1 z_2$$

ersetzt (die Kommutativität und Assoziativität unserer Operationen wurde auch bisher stillschweigend benutzt). Im ersten Disjunktionsglied $y_1 z_1 z_2$ kommen dann höchstens um eins wenigere Klammernpaare vor, wie im ursprünglichen Wort x, und im zweiten Disjunktionsglied $y_2^* z_1 z_2$ auch höchstens um eins wenigere, falls $y_2^* = y_2$ ist, und höchstens ebensoviele sonst, wenn nähmlich $y_2^* = \mathbf{(} y_2 \mathbf{)}$ ist. Doch enthält y_2 auch im letzteren Fall um eins wenigere Disjunktionsglieder als $y_1 \mathbf{V} y_2$ in x; und wenn das Verfahren auf $\mathbf{(} y_2 \mathbf{)} z_1 z_2$ wiederholt wird, worin das erste $\mathbf{(}$-Zeichen das vor y_2 stehende $\mathbf{(}$-Zeichen ist, dann vermindert sich die Anzahl der Disjunktionsglieder im entstehenden »neuen y_2«. Nach weniger als $o(x)$ Schritten kommt man so zu einer Formel, deren sämtliche Disjunktionsglieder wenigere Klammernzeichen enthalten als x.

Sei also x erst eine geschlossene Formel, und $d'(x)$ durch

$$d'(x) = \begin{cases} x, \text{ falls } \mathbf{(} \lneqq x \\ y_1(x)\, z_1(x)\, z_2(x) \,\mathbf{V}\, y_2^*(x)\, z_1(x)\, z_2(x) \text{ sonst} \end{cases}$$

definiert. $d''(x)$ entstehe durch Anwendung von $d'(x)$ auf alle Disjunktionsglieder von x, falls x eine beliebige Formel ist. Dann ist

$$d''(x) = F_{d'}^{(d)}(x) .$$

Die $o(x)$-te Iteration von $d''(x)$ liefert eine mit x äquivalente Formel, deren Disjunktionsglieder höchstens um eins wenigere Klammernpaare enthalten, als die Disjunktionsglieder von x. Die $o(x)$-mal $o(x)$-te Iteration von $d''(x)$ liefert also bestimmt eine in $\mathfrak{M}$ primitiv-rekursive, klammernfreie Transformierte, d.h. eine disjunktive Form

$$t''(x)$$

der Formel x.

9. Jetzt nehmen wir an, das x bereits eine disjunktive Form von gewissen der Variablen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ist, und wir wollen in ihren Disjunktionsgliedern die Wiederholungen streichen. Die so transformierte Formel sei mit $t_n'''(x)$ bezeichnet. Zur Definition von $t_n'''(x)$ seien einige Hilfsfunktionen vorausgeschickt.

Erst sei für ein beliebiges Wort x das daraus durch Streichen der Wiederholungen seiner (vom Anfang des Wortes an betrachteten) Buchstaben entstehende Wort $h_1(x)$. Dies kann durch folgende primitive Rekursion definiert werden:

$$h_1(\Lambda) = \Lambda$$

und für $a \in \mathfrak{A}$

$$h_1(xa) = \begin{cases} h_1(x), & \text{falls } a \leq x \\ h_1(x)\, a & \text{sonst}. \end{cases}$$

Damit ist auch die auf eine disjunktive Form x angewandte Funktion

$$t_n'''(x) = F_{h_1}^{(d)}(x)$$

primitiv-rekursiv in $\mathfrak{M}$.

10. Nun wollen wir aus einer disjunktiven Form x jene Disjunktionsglieder streichen, in welchen sowohl ein A_i als auch $\bar{A}_i$ vorkommt.

Die durch

$$f_{A\bar{A}}^{(n)}(x) = \begin{cases} \Lambda, & \text{falls } (E_y)\,[y \leq n \,\&\, A_{o(y)} \leq x \,\&\, \bar{A}_{o(y)} \leq x] \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte (nicht unbedingt nur für $x = \Lambda$ verschwindende) Funktion ist primitiv-rekursiv in $\mathfrak{M}$, und mit ihr auch $F_{f_{A\bar{A}}^{(n)}}^{(d)}(x)$, die aus einer disjunktiven Form zwar die ungewünschten Disjunktionsglieder streicht, dafür aber ein solches Wort zustande bringt, das benachbarte, oder am Ende bzw. am Anfang des Wortes stehende $\mathbf{V}$-Zeichen enthalten kann. Diese werden entfernt, wenn in $F_{f_{A\bar{A}}^{(n)}}^{(d)}(x)$ einfach $\mathbf{V}$ für jedes Vorkommen von $\mathbf{VV}$ gesetzt wird, und auf das Ergebnis die folgenderweise als in $\mathfrak{M}$ primitiv-rekursiv definierten Funktionen $l_{\mathbf{v}}(x)$, $e_{\mathbf{v}}(x)$ angewandt werden:

$$l_{\mathbf{v}}(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } l_1(x) \neq \mathbf{V} \\ x^{-1} & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$e_{\mathbf{v}}(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } e_1(x) \neq \mathbf{V} \\ {}^{-1}x & \text{sonst}. \end{cases}$$

So ergibt sich die gewünschte Transformierte einer disjunktiven Form x als

$$t^{\mathrm{IV}}(x) = e_{\mathbf{v}}\Big(l_{\mathbf{v}}\big(\mathrm{sub}\,(F_{f_{A\bar{A}}^{(n)}}^{(d)}(x), \mathbf{VV}, \mathbf{V})\big)\Big).$$

11. Um eine *ausgezeichnete* disjunktive Form *in n Variablen* der bisher transformierten Formel x zu erhalten, hat man x zu einer solchen disjunktiven Form $t_n^{\mathrm{V}}(x)$ zu transformieren, deren jedes Glied sämtliche der Variablen $A_1, \ldots, A_n$ (unnegiert oder negiert) enthält. Ein Disjunktionsglied $\mathfrak{g}$, das ein A_i mit $1 \leq i \leq n$ nicht enthält, kann durch

$$\mathfrak{g}\, A_i \,\mathbf{V}\, \mathfrak{g}\, \bar{A}_i$$

ersetzt werden. Sei $a_n(x)$ die Formel, die aus einem Disjunktionsglied x einer durch den Bisherigen transformierten Formel entsteht, wenn auf ihm die genannte Umformung mit dem kleinstmöglichen i angewandt wird. Diese Funktion ist nach der Definition

$$a_n(x) = \begin{cases} x, \text{ falls } (i)\,[i \leqq n \rightarrow (A_i \leqq x \vee \bar{A}_i \leqq x)] \\ x A_{o(y_0)} \mathbf{V}\, x \bar{A}_{o(y_0)} \text{ sonst, wobei} \\ y_0 = \mu_y\,[y \leqq n \;\&\; A_{o(y)} \not\leqq x \;\&\; \bar{A}_{o(y)} \not\leqq x] \end{cases}$$

primitiv-rekursiv in $\mathfrak{M}$; und dasselbe gilt für ihre Iteration $a_n^{o(z)}(x)$. Und die gewünschte Transformierte eines Disjunktionsgliedes x ist $a_n^n(x)$.

Ist nun x die ganze disjunktive Form (nach den bisherigen Umformungen), dann erhält man

$$t_n^{\mathrm{V}}(x) = F^{(d)}_{a_n^n}(x)$$

als primitiv-rekursive Funktion in $\mathfrak{M}$.

12. Es soll nun die natürliche Reihenfolge der Konjunktionsglieder hergestellt werden. Das leistet zuerst für ein Disjunktionsglied x einer durch die bisherigen Schritten transformierten Formel die in $\mathfrak{M}$ primitiv-rekursive Funktion $h_3^{(n)}(x)$, die sich mit Hilfe der durch

$$f(y, x) = \begin{cases} A_{o(y)}, \text{ falls } A_{o(y)} \leqq x \\ \bar{A}_{o(y)}, \text{ falls } \bar{A}_{o(y)} \leqq x \\ \text{etwa } \Lambda \text{ sonst} \end{cases}$$

definierten Funktion als

$$h_3^{(n)}(x) = K_f(n, x)$$

ergibt, und dann, falls x die ganze disjunktive Form ist, die Transformierte

$$t_n^{\mathrm{VI}}(x) = F^{(d)}_{h_3^{(n)}}(x)\,.$$

13. Die letzte Transformierte $t^{\mathrm{VII}}(x)$ der bisher transformierten Formel x entsteht durch Streichung der Wiederholungen der Disjunktionsglieder. Diese kann durch folgende Wertverlaufsrekursion definiert werden:

$$t^{\mathrm{VII}}(\Lambda) = \Lambda$$

und für $a \in \mathfrak{A}$

$$t^{\mathrm{VII}}(xa) = \begin{cases} t^{\mathrm{VII}}\left((xa)^{-(1+o(l(xa)))}\right), \text{ falls } l(xa) \leqq (xa)^{-(1+o(l(xa)))} \\ t^{\mathrm{VII}}\left((xa)^{-(1+o(l(xa)))}\right) h_{\mathbf{v}}(xa)\, l(xa) \text{ sonst}. \end{cases}$$

14. Nach Nr. 7—13 erhält man die ausgezeichnete disjunktive Normalform in n Variablen, $d_n(x)$, einer Formel x von höchstens n Variablen durch die Definition

$$d_n(x) = t^{\mathrm{VII}}\left(t_n^{\mathrm{VI}}\left(t_n^{\mathrm{V}}\left(t_n^{\mathrm{IV}}\left(t_n^{\mathrm{III}}\left(t''\left(t'_n(x)\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$

als in $\mathfrak{M}$ primitiv-rekursive Funktion von x und n.

§ 3.

15. Jetzt sollen die von

$$A_1, \bar{A}_1, A_2, \bar{A}_2, \ldots, A_n, \bar{A}_n$$

aufgebauten Formeln der Länge m geordnet werden. Ihre Anzahl soll mit $\alpha(m, n)$ bezeichnet werden, und die r-te Formel in unserer Anordnung mit $f(r, m, n)$. Die eben aufgezeichnete Folge gibt zugleich die Anordnung solcher Formeln der Länge 1 an; daher ist

$$\alpha(1, n) = 2n,$$

und für $1 \leqq r \leqq 2n$

$$f(r, 1, n) = \begin{cases} \bar{A}_{\left[\frac{r}{2}\right]}, & \text{falls } 2/r \\ A_{\left[\frac{r+1}{2}\right]} & \text{sonst}. \end{cases}$$

Falls nun die Reihenfolge der Formeln kleinerer Länge als m bereits angegeben ist, dann soll die Reihenfolge der Formeln der Länge m (diese entstehen aus je zwei Formeln kleinerer Länge durch Disjunktion oder Konjunktion) die folgende sein:

Der Reihe nach für $i = 1, 2, \ldots, m - 1$ sollen von den beiden Gliedern aller Paare

$$(f(1, i, n), f(1, m - i, n)), (f(1, i, n), f(2, m - i, n)), \ldots$$

$$\ldots, (f(1, i, n), f(\alpha(m - i, n), m - i, n)); \ldots; (f(\alpha(i, n), i, n), f(1, m - i, n)), \ldots$$

$$\ldots, (f(\alpha(i, n), i, n), f(\alpha(m - i, n), m - i, n))$$

der Reihe nach erst die Disjunktionen gebildet werden, dann die Konjunktionen.

So ergibt sich für $m > 1$ für die zahlentheoretische Funktion $\alpha(m, n)$

$$\alpha(m, n) = 2 \sum_{i=1}^{m \dot{-} 1} \alpha(i, n)\, \alpha(m \dot{-} i, n),$$

und dies gibt mit

$$\alpha(1, n) = 2n$$

und etwa

$$\alpha(0, n) = 1$$

eine zahlentheoretische Wertverlaufsrekursion für $\alpha(m, n)$. Daher ist $\alpha(m, n)$ eine primitiv-rekursive zahlentheoretische Funktion; diese kann zu einer primitiv-rekursiven Funktion in $\mathfrak{M}$ erweitert werden.

16. Die Formel $f(r, m, n)$ wird nach der gegebenen Anordnung aus einer Formel der Länge i_0 und aus einer Formel der Länge $m - i_0$ aufgebaut, wobei

$$i_0 = \mu_i \left[i \leqq m \dot{-} 1 \;\&\; 2 \sum_{j=1}^{i} \alpha(j, n)\, \alpha(m \dot{-} j, n) \geqq r \right]$$

ist; und genauer ist $f(r, m, n)$ die r_0-te unter den Formeln, die aus einer Formel der Länge i_0 und aus einer Formel der Länge $m \dot{-} i_0$ aufgebaut werden, wobei

$$r_0 = r \dot{-} 2 \sum_{j=1}^{i_0 \dot{-} 1} \alpha(j, n)\, \alpha(m \dot{-} j, n)$$

ist. Noch näher entsteht $f(r, m, n)$ aus den beiden genannten Formeln durch Disjunktion oder durch Konjunktion, je nachdem

$$r_0 \leqq \alpha(i_0, n)\, \alpha(m \dot{-} i_0, n) \quad \text{oder} \quad r_0 > \alpha(i_0, n)\, \alpha(m \dot{-} i_0, n)$$

ist; im ersten Fall ist $f(r, m, n)$ die r_0-te unter den Disjunktionen, im zweiten Fall ist sie die r_0'-te unter den Konjunktionen der genannten Art, wobei

$$r_0' = r_0 \dot{-} \alpha(i_0, n)\, \alpha(m \dot{-} i_0, n)$$

ist. Und zwar ist

$$f(r, m, n) = f(r_1\, i_0, n)\, \mathbf{V}\, f(r_2, m \dot{-} i_0, n)$$

oder

$$f(r, m, n) = f^*(r_1', i_0, n)\, f^*(r_2', m \dot{-} i_0, n)\,,$$

wobei

$$r_1 = \mu_r\, [r \leqq \alpha(i_0, n)\ \&\ r\, \alpha(m \dot{-} i_0, n) \geqq r_0]\,,$$

$$r_1' = \mu_r\, [r \leqq \alpha(i_0, n)\ \&\ r\, \alpha(m \dot{-} i_0, n) \geqq r_0']\,,$$

$$r_2 = r_0 \dot{-} (r_1 \dot{-} 1)\, \alpha(m \dot{-} i_0, n)\,,$$

$$r_2' = r_2' \dot{-} (r_1' \dot{-} 1)\, \alpha(m \dot{-} i_0, n)\,.$$

Nach diesen Definitionen sind $i_0, r_0, r_0', r_1, r_1', r_2, r_2'$ zahlentheoretische primitiv-rekursive Funktionen. Mit diesen ergibt sich folgende Definition für $f(r, m, n)$:

$$f(r, 0, n) = \Lambda$$

$$f(r, 1, n) = \begin{cases} \bar{A}_{\left[\frac{r}{2}\right]}\,, & \text{falls } 2/r \\ A_{\left[\frac{r+1}{2}\right]} & \text{sonst} \end{cases}$$

und für $m > 1$

$$f(r, m, n) = \begin{cases} f(r_1, i_0, n)\, \mathbf{V}\, f(r_2, m \dot{-} i_0, n)\,, \\ \text{falls } r_0 \leqq \alpha(i_0, n)\, \alpha(m \dot{-} i_0, n) \\ f^*(r_1', i_0, n)\, f^*(r_2', m - i_0, n) \text{ sonst}\,. \end{cases}$$

Diese Definition kann (etwa mit $f(x, y, z) = \Lambda$ falls x, y oder z keine natürliche Zahl ist) auf die ganze Menge $\mathfrak{M}$ erweitert werden. Sie ist eine sogenannte eingeschachtelte Rekursion (da für den Parameter r Einsetzungen erfolgen) und zugleich eine Wertverlaufsrekursion (da sowohl i_0, als auch $m \dot{-} i_0$ Vorgänger von m sind); diese lassen sich aber auf primitive Rekursion in $\mathfrak{M}$ zurückführen.

§ 4.

17. Ist nun x eine beliebige Formel von n Variablen (x kann auch eine ausgezeichnete disjunktive Normalform, also eine Art der Angabe der Wertetabelle von x sein), dann kann man die Länge einer kürzesten mit x äquivalenten Formel, d.h. die minimale Länge $\lambda(x, n)$, wodurch x ausgedrückt werden kann, durch

$$\lambda(x, n) = \mu_m \left[m \leqq o(x) \mathbin{\&} (Er) \left[r \leqq \alpha(m, n) \mathbin{\&} d_n(x) = d_n(f(r, m, n))\right]\right]$$

als in $\mathfrak{M}$ primitiv-rekursive Funktion definieren.

Eine bestimmte mit x äquivalente kürzeste Formel erhält man in

$$f(r', \lambda(x, n), n),$$

wobei

$$r' = \mu_r \left[r \leqq \alpha(\lambda(x, n), n) \mathbin{\&} d_n(x) = d_n\left(f(r, \lambda(x, n), n)\right)\right],$$

als primitiv-rekursive Funktion in $\mathfrak{M}$.

§ 5.

18. Der Beweis kann auch so geführt werden, dass darin die Wertetabellen der Formeln unmittelbar — ohne Berufung auf die ausgezeichnete disjunktive Normalform der Formel — zur Anwendung kommen.[4] Dadurch wird die Beweisführung etwas kürzer, aber das Alphabet $\mathfrak{A}$ muss zu

$$\mathfrak{A}' = \{(,), \mathbf{V}, \uparrow, \downarrow, A_1, \bar{A}_1, A_2, \bar{A}_2, \ldots\}$$

erweitert werden, wo $\uparrow$ und $\downarrow$ die Zeichen für »wahr« bzw. »falsch« sind. Selbstverständlich sind in der so erhaltenen Wortemenge $\mathfrak{M}'$ auch die charakteristischen Funktionen $f_\uparrow(x)$ und $f_\downarrow(x)$ der Eigenschaften »$\uparrow$ zu sein« bzw. »$\downarrow$ zu sein« primitiv-rekursiv; und alle bisher als in $\mathfrak{M}$ primitiv-rekursiv erkannten Funktionen sind auch in $\mathfrak{M}'$ primitiv-rekursiv, oder können zu in $\mathfrak{M}'$ primitiv-rekursive Funktionen sinngemäss erweitert werden (diese werden in ihrer erweiterten Form genau so bezeichnet werden wie vorher). So lautet z.B. die erweiterte Definition von $f_A(x)$:

$$f_A(\Lambda) = ($$

$$f_A(xA_i) = \begin{cases} \Lambda, & \text{falls } x = \Lambda \\ (& \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_A(x\,() = f_A(x)) = f_A(x\mathbf{V}) = f_A(x\uparrow) = f_A(x\downarrow) = f_A(x\bar{A}_i) = (;$$

---

[4] Das war bereits bei der Axiomatisierung des Aussagenkalküls eine Vereinfachungsidee von KALMÁR: s. L. KALMÁR, Über die Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls, *Acta Sci. Math. Szeged* 4 (1935) S. 222—243.

und von $\overline{x}$:

$$\bar{\Lambda} = \Delta$$

$$\overline{xA_i} = \begin{cases} \bar{A}_i, & \text{falls } x = \Lambda \\ \Lambda & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\overline{x\bar{A}_i} = \begin{cases} A_i, & \text{falls } x = \Lambda \\ \Lambda & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\overline{x\uparrow} = \begin{cases} \downarrow, & \text{falls } x = \Lambda \\ \Lambda & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\overline{x\downarrow} = \begin{cases} \uparrow, & \text{falls } x = \Lambda \\ \Lambda & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\overline{x\,(} = \overline{x\,)} = \overline{x\,\mathbf{V}} = \Lambda\,.$$

19. Für die Folge der Variablen $A_1, \ldots, A_n$, aus welchen die in Aufbau einer Formel von höchstens n Variablen teilnehmenden Variablen gewählt werden, können die aus $\uparrow$ und $\downarrow$ gebildeten n-gliedrigen Folgen eingesetzt werden (ihre Anzahl ist 2^n). Man erhält die übliche Reihenfolge der letzteren Folgen, indem man, von $\uparrow\uparrow\ldots\uparrow$ ausgehend, von einer solchen Folge x, welche mindestens ein $\uparrow$-Glied enthält, auf die nächste so übergeht, dass man von rechts nach links gehend das erste $\uparrow$-Glied von x durch $\downarrow$, und alle rechts davon stehenden Glieder durch $\uparrow$ ersetzt. Dann erhält man $h_4(x)$, wo $h_4(x)$ durch folgende primitive Rekursion definiert werden kann:

$$h_4(\Lambda) = \Lambda$$

und für $a \in \mathfrak{A}'$

$$h_4(xa) = \begin{cases} x\downarrow, & \text{falls } a = \uparrow \\ h_4(x)\uparrow, & \text{falls } a = \downarrow \\ \Lambda & \text{sonst}. \end{cases}$$

Damit kann für $o(y) \leqq 2^n$ die $o(y)$-te n-gliedrige Folge $f^{(n)}_{o(y)}$ der Elemente $\uparrow$ und $\downarrow$ (kurz: die $o(y)$-te Argumentenfolge) durch die folgende primitive Rekursion definiert werden:

$$f^{(n)}_{o(\Lambda)} = \Lambda$$

und für $a \in \mathfrak{A}'$

$$f^{(n)}_{o(ya)} = \begin{cases} \text{sonst } (n, (, \uparrow), & \text{falls } y = \Lambda \\ h_4(f^{(n)}_{o(y)}) & \text{sonst}; \end{cases}$$

für $o(y) > 2^n$ sind die Werte dieser Funktion (die sich periodisch wiederholen) belanglos für uns (ebenso wie ihre Werte wenn n keine natürliche Zahl ist).

20. Es soll nun der Wert $w^{(n)}_i(x)$ einer aus gewissen der Variablen A_1, $A_2, \ldots, A_n$ gebildeten Formel x an der Stelle $f^{(n)}_i$ (d.h. wenn man für $A_1, \ldots, A_n$ der Reihe nach die Buchstaben von $f^{(n)}_i$ einsetzt) angegeben werden.

Dazu braucht man erst die Definition der Formel $e_i^{(n)}(x)$, welche durch diese Einsetzung aus x entsteht. Diese erhält man mit Hilfe der durch die folgende primitive Rekursion definierten Hilfsfunktion $h_{i,o(y)}^{(n)}(x)$:

$$h_{i,o(\Lambda)}^{(n)}(x) = x$$

und für $a \in \mathfrak{A}'$

$$h_{i,o(ya)}^{(n)}(x) = \text{subst}\big(\text{subst}\,(h_{i,o(y)}^{(n)}(x),\, A_{o(ya)},\, b_{o(ya)}\,(f_i^{(n)})),\, \overline{A}_{o(ya)},\, \overline{b_{o(ya)}(f_i^{(n)})}\big),$$

als

$$e_i^{(n)}(x) = h_{i,n}^{(n)}(x)\,.$$

So entsteht ein Wort, das aus Zeichen $\uparrow$ und $\downarrow$ durch (unbezeichneten) Konjunktionen und mit $\mathbf{V}$ bezeichneten Disjunktionen mit unseren Klammernkonventionen aufgebaut wird. Sei nun x ein derartiges Wort. Wird darin sukzessiv jedes Vorkommen

von $\uparrow\,\uparrow$	durch $\uparrow$
von $\uparrow\,\downarrow$	durch $\downarrow$
von $\downarrow\,\uparrow$	durch $\downarrow$
von $\downarrow\,\downarrow$	durch $\downarrow$
von $\uparrow\mathbf{V}\uparrow$	durch $\uparrow$
von $\uparrow\mathbf{V}\downarrow$	durch $\uparrow$
von $\downarrow\mathbf{V}\uparrow$	durch $\uparrow$
von $\downarrow\mathbf{V}\downarrow$	durch $\downarrow$
von $(\uparrow)$	durch $\uparrow$
von $(\downarrow)$	durch $\downarrow$

ersetzt, so ergibt die $o(x)$-te Iteration dieses — die Länge des Wortes vermindernde — Verfahrens ein einziges Zeichen $\uparrow$ oder $\downarrow$, als den Wert der Formel x.

Daher ergibt sich $w_i^{(n)}(x)$ als die $o(x)$-te Iteration der Funktion

$$\text{sub}\,(\text{sub}\,(\text{sub}\,(\text{sub}\,(\text{sub}\,(\text{sub}\,(\text{sub}\,(\text{sub}\,(\text{sub}\,(\text{sub}\,(x,\, \uparrow\,\uparrow,\, \uparrow),\, \uparrow\,\downarrow,\, \downarrow),$$
$$\downarrow\,\uparrow,\, \downarrow),\, \downarrow\,\downarrow,\, \downarrow),\, \uparrow\mathbf{V}\uparrow,\, \uparrow),\, \uparrow\mathbf{V}\downarrow,\, \uparrow),\, \downarrow\mathbf{V}\uparrow,\, \uparrow),\, \downarrow\mathbf{V}\downarrow,\, \downarrow),$$
$$(\uparrow),\, \uparrow),\, (\downarrow),\, \downarrow),$$

also als in $\mathfrak{M}'$ primitiv-rekursive Funktion.

21. Sei nun x eine Formel von n Variablen. (Falls die Wertetabelle dieser Formel gegeben ist, so liefert z.B. die daraus unmittelbar herauslesbare ausgezeichnete disjunktive Normalform die Formel, von der wir ausgehen.) Dann bedeutet $t_n'(x)$ eine Äquivalente von x, worin gerade die Variablen A_1, $A_2, \ldots, A_n$ vorkommen. So erhält man (mit der in Nr. 13 eingeführten Funktion $f(r, m, n)$)

$$\lambda(x, n) = \mu_m\big[m \leqq o(x)\ \&\ (Er)\,[r \leqq \alpha(m, n)\ \&$$
$$\&\ (i)\,[i \leqq 2^n \rightarrow w_i^{(n)}\,(t_n'(x)) = w_i^{(n)}\,(f(r, m, n))]\big]\,.$$

und eine bestimmte mit x äquivalente kürzeste Formel liefert

$$f(r', \lambda(x, n), n),$$

wobei

$$r' = \mu_r \left[r \leqq \alpha(\lambda(x, n), n) \ \& \ (i) \left[i \leqq 2^n \rightarrow w_i^{(n)}(t'_n(x)) = w_i^{(n)}(f(r, \lambda(x, n), n)) \right] \right].$$

(Eingegangen: 11. September, 1961.)

О НАИБОЛЕЕ КРАТКОМ ВИДЕ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

R. PÉTER

Резюме

В теории синтеза электрических сетей, на основе данных условий работы, булевые функции, т. е. такие функции, которые могут сами а также их переменные принять только две величины («правильную» и «неправильную») играют важную роль.

Известно, что эти функции могут быть построены из переменных при помощи конъюнкции, дизъюнкции и отрицания (даже и меньшими операциями, но в этом случае менее обозримым способом). Напомним, например, их меченую дизъюнктивную нормальную форму. L. KALMÁR обращает внимание на то, что с точки зрения экономичности важно производить булевые функции при помощи указанных трёх операций насколько возможно кратким способом в тех случаях, где под длиной одной формулы подразумевается число появляющихся в нем переменных, учитывая каждое переменное согласно многократности его наличия. Для возможно короткого произведения, произвольно заданных булевых функций требовалось бы, конечно, по возможности простой альгорифм; и поэтому было бы интересным первым шагом в этом направлении сперва теоретически исследовать, какие (и в каком смысле рекурсивные) альгорифмы можно здесь ожидать.

В этой статье автор доказывает, даже двумя способами, что минимальная длина таких формул, которые производят данную булевую функцию F n-переменных а также определенная формула минимальной длины, могут быть определены как примитивно-рекурсивные функции от F и n в одном подходяще выбранном «множестве слов».

О СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ

O. KIS

1. В работе мы пользуемся следующими обозначениями. C есть множество вещественных, непрерывных и 2π— периодических на $(-\infty, +\infty)$ функций. Если $f \in C$, то ее норма

$$\|f\| = \max_x |f(x)|$$

и модуль непрерывности

$$\omega(f, t) = \sup_{\substack{-\infty < x < +\infty \\ 0 \leq h \leq t}} |f(x+h) - f(x)| \qquad (0 \leqq t < +\infty)\,.$$

Пусть $\omega(t)$ — такой модуль непрерывности. $C(\omega)$ означает подмножество тех функций f пространства C, для которых выполняется условие

$$\omega(f, t) \leqq c(f)\, \omega(t)\,,$$

где $c(f)$ зависящее лишь от f положительное число.

Пусть

$$0 \leqq x_{0,n} < x_{1,n} < \ldots < x_{2n,n} < 2\pi \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Обозначим через X матрицу узлов интерполирования

$$\begin{array}{ccccc} & & x_{0,0} & & \\ & x_{0,1}, & x_{1,1}, & x_{2,1} & \\ x_{0,2}, & x_{1,2}, & x_{2,2}, & x_{3,2}, & x_{4,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Тригонометрические многочлены n-ого порядка $l_{i,n}(X, x)$, удовлетворяющие условиям

$$l_{i,n}(X, x_{k,n}) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k\,, \\ 0, & \text{если } i \neq k\,, \end{cases} \quad (i, k = 0, 1, \ldots, 2n\,;\ n = 0, 1, 2, \ldots)$$

являются фундаментальными многочленами тригонометрического интерполирования по матрице X. Постоянные Лебега

$$M_n(X) = \max_x \sum_{i=0}^{2n} |l_{i,n}(X, x)|\,.$$

Наконец, тригонометрический интерполяционный многочлен порядка n, соответствующий некоторой функции $f \in C$ и матрице узлов X

$$L_n(f, X, x) = \sum_{i=0}^{2n} f(x_{i,n})\, l_{i,n}(X, x)\,.$$

Чтобы упростить запись, часть индексов и переменных часто будет опускаться.

2. Хорошо известно, что последовательность интерполяционных много членов $L_n(f, X)$ равномерно сходится к функции f, ес ли

$$\lim_{n\to\infty} M_n(X)\,\omega\left(f, \frac{1}{n}\right) = 0\,.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n(f, X)\| = 0$$

для всех функций f пространства $C(\omega)$, если

$$\lim_{n\to\infty} M_n(X)\,\omega\left(\frac{1}{n}\right) = 0\,. \tag{2.1}$$

В связи с этим С. М. Лозинский в работе[1] [1] опубликовал без доказательств ряд результатов, в том числе следующие:

а) Если

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n > 0\,,$$

то по любой матрице X найдется $f \in C(\omega)$ такая, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \|f - L_n(f, X)\| > 0\,.$$

б) Если

$$\lim_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n = 0 \tag{2.2}$$

и

$$\underline{\lim_{t=+0}}\, \frac{\omega[t\,\omega(t)]}{\omega(t)} > 0\,, \tag{2.3}$$

то условие (2.1) не только достаточно, но и необходимо для того, чтобы $L_n(f, X)$ равномерно сходились к f для любой $f \in C(\omega)$.

в) Если имеет место (2.2), но

$$\underline{\lim_{t=+0}}\, \frac{\omega[t\,\omega(t)]}{\omega(t)} = 0\,, \tag{2.4}$$

[1] Числа в квадратных скобках являются номерами работ, фигурирующих в списке цитированной литературы в конце статьи.

то найдутся матрицы X и Y такие, что $M_n(X) = M_n(Y)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$; $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - L_n(f, X)\| = 0$ для любой $f \in C(\omega)$; существует такая $f \in C(\omega)$, что $\lim\limits_{n\to\infty} \| L_n(f, Y)\| = +\infty$; т. е. не существует условия, выраженного только через $\omega(t)$ и $M_n(X)$, необходимого и достаточного для того, чтобы $L_n(f, X)$ равномерно сходились к f для любой $f \in C(\omega)$.

Аналогичные результаты справедливы и в случае интерполирования посредством обыкновенных многочленов, только в (2.3) и (2.4) следует писать $\omega(t^2)$ вместо $\omega\,[t\omega(t)]$.

В связи с Лагранжевым интерполированием для наиболее важного частного случая $\omega(t) = t^\alpha$ $(0 < \alpha \leqq 1)$, когда $C(\omega)$ тождественно классу функций $\mathrm{Lip}\,\alpha$, P. Erdős и P. Turán в работе [2] доказали, что порядок достаточного условия (2.1) равномерной сходимости $L_n(f, X)$ к f для всех $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ в некотором смысле не может быть улучшен, и нашли точное в некотором смысле необходимое условие равномерной сходимости $L_n(f, X)$ к f для всех $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$.

3. В настоящей работе методом Erdős-а и Turán-а доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Если*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \omega\left(\frac{1}{n\, M_n(X)}\right) M_n(X) > 0\,, \tag{3.1}$$

то для некоторой $f \in C(\omega)$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \|f - L_n(f, X)\| > 0\,. \tag{3.2}$$

Теорема 2. *Если модуль непрерывности $\omega(t)$ и числовая последовательность M_n таковы, что*

$$\lim_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n = 0\,,$$

$$M_n \geqq M_n(Y) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,,$$

где Y матрица равноотстоящих узлов, и

$$\lim_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n\, M_n}\right) M_n = 0\,, \tag{3.3}$$

то существует матрица узлов X, для которой

$$M_n(X) = M_n \qquad (n \geqq 1) \tag{3.4}$$

и $L_n(f, X)$ равномерно сходятся к f для любой $f \in C(\omega)$.

Аналогичные результаты справедливы для интерполяции посредством обычных многочленов, только в (3.1) и (3.3) следует писать $n^2 M_n$ вместо $n M_n$ и Y означает матрицу узлов Чебышева.

В **14** доказывается, что второй результат С. М. Лозинского является следствием теоремы 1. Если в условии теоремы a) заменить наибольший предел на наименьший, то этот результат также следует из теоремы 1.

Частным случаем теорем является следующий тригонометрический аналог одного из результатов ERDŐS-а и TURÁN-а: если

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, M_n(X)\, n^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} > 0 \qquad (0 < \alpha < 1), \tag{3.5}$$

то для некоторой 2π-периодической $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ имеет место (3.2), если же

$$\lim_{n\to\infty} M_n n^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} = 0 \qquad (0 < \alpha < 1) \tag{3.6}$$

или $\alpha = 1$, то X можно выбрать так, что имеет место (3.4) и $L_n(f, X)$ равномерно сходятся к f для всякой 2π-периодической $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$. Аналогичный результат справедлив для интерполяции посредством обычных многочленов, только в (3.5) и (3.6) следует писать $\dfrac{2\alpha}{1-\alpha}$ вместо $\dfrac{\alpha}{1-\alpha}$.

Вопрос о неулучшаемости достаточного условия (2.1) равномерной сходимости $L_n(f, X)$ к f для любой $f \in C(\omega)$ мы собираемся исследовать в другой работе.

4. Приступая к доказательству теоремы 1, прежде всего покажем, что

$$x_i - x_{i-1} > \frac{1}{n M_n} \; (i = 0, 1, 2, \ldots, 2n+1;\, x_{-1} = x_{2n} - 2\pi,\, x_{2n+1} = x_0 + 2\pi). \tag{4.1}$$

В силу определения фундаментальных многочленов и теоремы о среднем

$$\frac{1}{x_i - x_{i-1}} = \frac{l_i(x_i) - l_i(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = l_i'(y_i) \qquad (x_{i-1} < y_i < x_i;\, l_{2n+1} = l_0).$$

Отсюда, из неравенства С. Н. Бернштейна

$$|l_i'(x)| \leq n\, \|l_i(x)\|$$

и очевидного неравенства

$$\|l_i(x)\| < M_n$$

следует:

$$\frac{1}{x_i - x_{i-1}} < n M_n,$$

что эквивалентно (4.1).

5. Продолжим доказательство несколько видоизмененным «методом скользящего горба» Лебега.

Обозначим через z_n точку отрезка $[0, 2\pi)$, в которой функция Лебега $\sum\limits_{i=0}^{2n} |l_i(x)|$ принимает свое наибольшее значение M_n. Пусть $g_n(x)$ есть непрерывная 2π-периодической функция, линейная между каждой парой соседних узлов и принимающая в узлах значения

$$g_n(x_i) = \operatorname{sign} l_i(z_n) \quad (i = -1, 0, 1, \ldots, 2n+1;\, l_{-1} = l_{2n}).$$

Нам потребуются некоторые свойства функций $g_n(x)$. Очевидно,

$$|g_n(x)| \leq 1 \tag{5.1}$$

и

$$g_n \in \mathrm{Lip}\, 1 \, .$$

Отсюда следует, что

$$g_n \in C(\omega) \, , \tag{5.2}$$

так как согласно одной из лемм С. М. Лозинского всегда

$$\mathrm{Lip}\, 1 \subset C(\omega) \, .$$

Эту лемму при $T = 2\pi$ можно получить из потребующегося нам в дальнейшем неравенства

$$t \leq 2 \frac{T}{\omega(T)} \omega(t) \qquad (t \leq T) \, , \tag{5.3}$$

доказательство которого можно найти, например, на стр. 111 монографии [3].)

Используя (4.1), получаем:

$$|g_n(x+t) - g_n(x)| < 2nM_n t \, . \tag{5.4}$$

Наконец,

$$L_n(g_n, z_n) = \sum_{i=0}^{2n} g_n(x_i)\, l_i(z_n) = \sum_{i=0}^{2n} l_i(z_n) \operatorname{sign} l_i(z_n) = \sum_{i=0}^{2n} |l_i(z_n)| = M_n \, . \tag{5.5}$$

Если при некотором m

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|g_m - L_n(g_m)\| > 0 \, ,$$

то в силу (5.2) теорема 1 доказана. Поэтому можно считать, что при любом m

$$\lim_{n\to\infty} \|g_m - L_n(g_m)\| = 0 \, . \tag{5.6}$$

6. Пусть подпоследовательность n_i удовлетворяет следующим условиям:

$$n_i > 2n_{i-1} \qquad (i > 1) \, , \tag{6.1}$$

$$\omega\left(\frac{1}{n_i M_{n_i}}\right) M_{n_i} > c_1 \tag{6.2}$$

(это возможно в силу условия (3.1), c_k обозначают положительные постоянные),

$$M_{n_1} > 2, \ M_{n_i} > 2^i M_{n_{i-1}} \qquad (i > 1) \tag{6.3}$$

(это возможно, так как в силу теоремы С. Н. Бернштейна последовательность M_n всегда стремится к бесконечности) и

$$|g_{n_i} - L_n(g_{n_i})| < \frac{1}{2}, \ \text{если} \quad n \geq n_{i+1} \tag{6.4}$$

(это возможно в силу (5.6)).

Пусть

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_{n_i}(x)}{M_{n_i}}$$

(согласно (5.1) и (6.3) ряд сходится). Докажем, что

$$f \in C(\omega) .$$

Очевидно

$$|f(x+t) - f(x)| \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{M_{n_i}} |g_{n_i}(x+t) - g_{n_i}(x)| . \tag{6.5}$$

При фиксированном t обозначим через j наименьший индекс, для которого

$$n_j M_{n_j} t \geqq 1 , \tag{6.6}$$

и оценим сначала первые $j-1$ члена правой части неравенства (6.5) (предполагая, что $j \geqq 2$).

Используя неравенства (5.4) и (6.1), получаем:

$$\frac{1}{M_{n_i}} |g_{n_i}(x+t) - g_{n_i}(x)| < 2 n_i t < 2^{2+i-j} n_{j-1} t .$$

Так как в силу (5.3) и (6.2)

$$t \leqq \frac{2\omega(t)}{n_{j-1} M_{n_{j-1}} \omega\left(\dfrac{1}{n_{j-1} M_{n_{j-1}}}\right)} < \frac{2\omega(t)}{c_1 n_{j-1}} ,$$

то

$$\sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{M_{n_i}} | g_{n_i}(x+t) - g_{n_i}(x) | < \sum_{i=1}^{j-1} 2^{3+i-j} \frac{1}{c_1} \omega(t) < \frac{8 - 2^{4-j}}{c_1} \omega(t) . \tag{6.7}$$

Оценим теперь j-ый член суммы. На основании (5.1)

$$\frac{1}{M_{n_j}} | g_{n_j}(x+t) - g_{n_j}(x) | \leqq \frac{2}{M_{n_j}} . \tag{6.8}$$

Принимая во внимание (6.2) и тот факт, что модуль непрерывности $\omega(t)$ всегда является неубывающей функцией, получаем:

$$\frac{2}{M_{n_j}} < \frac{2}{c_1} \omega\left(\frac{1}{n_j M_{n_j}}\right) \leqq \frac{2}{c_1} \omega(t) . \tag{6.9}$$

Оценим, наконец, остальные члены суммы. Так как в силу (6.3)

$$M_{n_i} > 2^i M_{n_j} ,$$

то, используя (5.1) и (6.9), имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{1}{M_{n_i}} | g_{n_i}(x+t) - g_{n_i}(x) | &\leqq \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{2}{M_{n_i}} < \\ < \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{2^{1-i}}{M_{n_j}} &< \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{2^{1-i}}{c_1} \omega(t) = \frac{2^{1-j}}{c_1} \omega(t) . \end{aligned} \tag{6.10}$$

Резюмируя (6.5) и (6.7) — (6.10) получаем:

$$|f(x+t) - f(x)| < \frac{10}{c_1}\omega(t),$$

что и требовалось доказать.

7. Докажем теперь, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \| f - L_n(f) \| > 0. \tag{7.1}$$

Очевидно,

$$f(z_{n_k}) - L_{n_k}(f, z_{n_k}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{M_{n_i}} [g_{n_i}(z_{n_k}) - L_{n_k}(g_{n_i}, z_{n_k})].$$

Оценим стоящую справа сумму.

В силу (6.3) и (6.4)

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{M_{n_i}} | g_{n_i}(z_{n_k}) - L_{n_k}(g_{n_i}, z_{n_k}) | < \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} 2^{-i} < \frac{1}{2}.$$

Согласно (5.5)

$$\frac{1}{M_{n_k}} L_{n_k}(g_{n_k}, z_{n_k}) = 1.$$

В то же время на основании (5.1) и (6.3)

$$\left| \frac{g_{n_k}(z_{n_k})}{M_{n_k}} \right| < 2^{-k}.$$

Наконец, в виду неравенства

$$|L_n(g)| \leqq M_n \|g\|,$$

(5.1) и (6.3)

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{M_{n_i}} |g_{n_i}(z_{n_k}) - L_{n_k}(g_{n_i}, z_{n_k})| \leqq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1+M_{n_k}}{M_{n_i}} < \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{1-i} = 2^{1-k}.$$

Резюмируя сказанное, имеем:

$$f(z_{n_k}) - L_{n_k}(f, z_{n_k}) < -\frac{1}{2} + 3 \cdot 2^{-k}.$$

Отсюда следует (7.1). Доказательство теоремы 1 завершено.

8. Приступаем к доказательству теоремы 2. Пусть

$$y_i = \frac{2\pi i}{2n+1} \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2n)$$

и

$$x_0 = \frac{2\pi(1-e_n)}{2n+1} \qquad (0 < e_n \leqq 1),$$

$$x_i = y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n).$$

В дальнейшем обычно будем предполагать, что $e_n < 1$. Если $e_n = 1$, то соответствующие утверждения очевидны. Будем считать также, что $n \geqq 1$.

Легко видеть, что

$$l_0(x) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \frac{\sin \frac{x_0}{2}}{\sin \frac{2n+1}{2} x_0} \tag{8.1}$$

и

$$l_i(x) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} (x - y_i)}{(2n+1) \sin \frac{x - y_i}{2}} \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \frac{\sin \frac{y_i}{2}}{\sin \frac{y_i - x_0}{2}} \tag{8.2}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, 2n) .$$

Докажем, что, если согласно условию теоремы

$$M_n \geqq M_n(Y) ,$$

то при некотором e_n согласно утверждению теоремы

$$M_n(X) = M_n . \tag{8.3}$$

Если $e_n = 1$, то

$$M_n(X) = M_n(Y) .$$

Так как

$$|l_1(0)| = \frac{\sin \frac{x_0}{2}}{\sin \frac{y_1 - x_0}{2}} = \frac{\sin \frac{\pi(1-e_n)}{2n+1}}{\sin \frac{\pi e_n}{2n+1}} ,$$

то $| l_1(0) |$ и, тем более, $M_n(X)$ стремится к бесконечности, если $e_n \to 0$ (n фиксировано). Легко видеть, что $M_n(X)$ непрерывно зависит от e_n. Поэтому в силу теоремы Больцано при некотором e_n действительно имеет место (8.3).

9. Положим $n \geqq 2$. В дальнейшем нам потребуется неравенство

$$\sum_{i=2}^{2n} | l_i(x) | < c_2 \ln n . \tag{9.1}$$

Чтобы доказать его, заметим сначала, что

$$\frac{\sin \frac{y_i}{2}}{\sin \frac{y_i - x_0}{2}} < \frac{\sin \frac{y_2}{2}}{\sin \frac{y_1}{2}} < 2 \qquad (i \geqq 2) . \tag{9.2}$$

Пусть теперь

$$\frac{\pi}{2n+1} \leqq x \leqq 2\pi - \frac{\pi}{2n+1}. \tag{9.3}$$

Тогда

$$\frac{\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|}{\sin\frac{x}{2}} < \frac{\sin\frac{3\pi}{2(2n+1)}}{\sin\frac{\pi}{2(2n+1)}} < 3. \tag{9.4}$$

Как известно,

$$\sum_{i=0}^{2n}\left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-y_i)}{(2n+1)\sin\frac{x-y_i}{2}}\right| < c_3 \ln n. \tag{9.5}$$

Отсюда, из (9.2), (9.4) и (8.2) следует:

$$\sum_{i=2}^{2n} |l_i(x)| < 6\, c_3 \ln n.$$

Итак, в случае (9.3) (9.1) доказано.

Пусть теперь

$$0 \leqq x < \frac{\pi}{2n+1} \quad \text{или} \quad 2\pi - \frac{\pi}{2n+1} < x < 2\pi. \tag{9.6}$$

Тогда

$$\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| < \sin\frac{3\pi}{2(2n+1)} < \frac{3\pi}{2(2n+1)}, \tag{9.7}$$

$$\left|\sin\frac{x-y_i}{2}\right| \geqq \begin{cases} \sin\frac{2i-1}{2n+1}\,\frac{\pi}{2} \geqq \frac{2i-1}{2n+1}, & \text{если } i = 1, 2, \ldots, n, \\ \sin\frac{4n-2i+1}{2n+1}\,\frac{\pi}{2} \geqq \frac{4n-2i+1}{2n+1}, & \\ & \text{если } i = n+1, n+2, \ldots, 2n. \end{cases} \tag{9.8}$$

В силу неравенства

$$\left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-y_i)}{(2n+1)\sin\frac{x}{2}}\right| \leqq 1, \tag{9.9}$$

(9.2), (9.7), (9.8) и (8.2)

$$\sum_{i=2}^{2n} |l_i(x)| < 6\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1} = O(\ln n).$$

Таким образом, (9.1) доказано и в случае (9.6).

10. Можно считать, что при достаточно больших n

$$M_n > 2\,c_2 \ln n\,. \tag{10.1}$$

Действительно, если для бесконечной подпоследовательности n_i

$$M_{n_i} \leqq 2\,c_2 \ln n_i$$

и согласно условию теоремы

$$\lim_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n = 0\,,$$

то

$$\lim_{i\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n_i}\right) M_{n_i} = 0$$

и, следовательно, для всякой $f \in C(\omega)$ в соответствии с утверждением теоремы

$$\lim_{i\to\infty} \| f - L_{n_i}(f) \| = 0\,.$$

Можно предположить также, что $e_n < \frac{1}{2}$. Действительно, пусть $e_n \geqq \frac{1}{2}$. Тогда в силу (8.1)

$$| l_0(x) | < (2\,n+1) \frac{\frac{x_0}{2}}{\frac{2\,n+1}{\pi}\,x_0} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Кроме того

$$\frac{\sin\frac{y_1}{2}}{\sin\frac{y_1 - x_0}{2}} \leq \frac{\sin\frac{y_1}{2}}{\sin\frac{y_1}{4}} < 2\,. \tag{10.2}$$

Если еще имеет место (9.3), то в силу (8.2), (9.4), (10.2) и неравенства

$$\left| \frac{\sin\frac{2\,n+1}{2}(x-y_1)}{(2\,n+1)\sin\frac{x-y_1}{2}} \right| \leqq 1 \tag{10.3}$$

выполняется соотношение

$$| l_1(x) | < 6\,,$$

а если имеет место (9.6), то на основании (8.2), (9.9), (9.7), (9.8) и (10.2)

$$| l_1(x) | < 3\,\pi\,.$$

Мы видим, что $l_0(x)$ и $l_1(x)$ ограничены. При достаточно больших n ввиду (9.1) это противоречит (10.1), а небольшие значения n не влияют на сходимость интерполяционного процесса.

11. В дальнейшем нам потребуется также неравенство

$$| l_0(x) + l_1(x) | < c_4\,. \tag{11.1}$$

Чтобы доказать его, заметим, что

$$l_0(x)+l_1(x)=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\,\frac{\sin\frac{x_0}{2}}{\sin\frac{2n+1}{2}x_0}+$$

$$+\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-y_1)}{(2n+1)\sin\frac{x-y_1}{2}}\,\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,\frac{\sin\frac{y_1}{2}}{\sin\frac{y_1-x_0}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\left[\frac{\sin\frac{x_0}{2}-\sin\frac{y_1}{2}}{\sin\frac{2n+1}{2}x_0}+\sin\frac{y_1}{2}\left(\frac{1}{\sin\frac{2n+1}{2}x_0}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{(2n+1)\sin\frac{y_1-x_0}{2}}\right)\right]+\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-y_1)}{(2n+1)\sin\frac{x-y_1}{2}}\times$$

$$\times\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}-\sin\frac{x-y_1}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,\frac{\sin\frac{y_1}{2}}{\sin\frac{y_1-x_0}{2}}.$$

Оценим встречающиеся в правой части равенства величины.

$$\sin\frac{y_1}{2}-\sin\frac{x_0}{2}=\sin\frac{\pi}{2n+1}-\sin\frac{\pi(1-e_n)}{2n+1}<\frac{\pi e_n}{2n+1}.$$

$$\sin\frac{2n+1}{2}x_0=\sin\pi(1-e_n)=\sin\pi e_n>2e_n.$$

$$\sin\frac{y_1}{2}=\sin\frac{\pi}{2n+1}<\frac{\pi}{2n+1}.$$

$$\frac{1}{\sin\frac{2n+1}{2}x_0}-\frac{1}{(2n+1)\sin\frac{y_1-x_0}{2}}=\frac{1}{\sin\pi e_n}-\frac{1}{(2n+1)\sin\frac{\pi e_n}{2n+1}}=$$

$$=\frac{(2n+1)\sin\frac{\pi e_n}{2n+1}-\sin\pi e_n}{(2n+1)\sin\pi e_n\sin\frac{\pi e_n}{2n+1}}<\frac{\pi e_n-\left(\pi e_n-\frac{1}{6}\pi^3e_n^3\right)}{4e_n^2}=\frac{\pi^3 e_n}{24}<\frac{\pi^3}{48}.$$

$$\left|\sin\frac{x-x_0}{2}-\sin\frac{x-y_1}{2}\right|<\frac{y_1-x_0}{2}=\frac{\pi e_n}{2n+1}.$$

$$\sin\frac{y_1-x_0}{2}=\sin\frac{\pi e_n}{2n+1}>\frac{2e_n}{2n+1}.$$

Наконец, в случае (9.3)

$$\sin\frac{x}{2}\geqq\sin\frac{\pi}{2(2n+1)}>\frac{1}{2n+1},$$

а в случае (9.6)

$$\left|\sin\frac{x-y_1}{2}\right|>\sin\frac{\pi}{2(2n+1)}>\frac{1}{2n+1}.$$

Принимая во внимание (9.9) и (10.3), завершаем доказательство неравенства (11.1):

$$|l_0(x)+l_1(x)|<(2n+1)\left[\frac{\pi e_n}{2n+1}\,\frac{1}{2e_n}+\frac{\pi}{2n+1}\,\frac{\pi^3}{48}\right]+$$
$$+\frac{\pi e_n}{2n+1}(2n+1)\frac{\pi}{2n+1}\,\frac{2n+1}{2e_n}=c_4.$$

12. Докажем, что для достаточно больших n

$$y_1-x_0<\frac{c_5}{nM_n}. \tag{12.1}$$

Прежде всего заметим, что

$$|l_0(x)|=\left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right|\,\frac{\sin\frac{\pi(1-e_n)}{2n+1}}{\sin\pi e_n}<(2n+1)\frac{\frac{\pi}{2n+1}}{2e_n}=\frac{\pi}{2e_n}. \tag{12.2}$$

Отсюда и из (11.1) следует неравенство

$$|l_1(x)|<\frac{\pi}{2e_n}+c_4.$$

В силу (9.1) и (10.1)

$$\sum_{i=2}^{2n}|l_i(x)|<\frac{1}{2}M_n.$$

Поэтому в некоторой точке z_n

$$|l_0(z_n)|+|l_1(z_n)|>\frac{1}{2}M_n.$$

Следовательно,

$$\frac{\pi}{e_n} + c_4 > \frac{1}{2} M_n ,$$

$$e_n < \frac{\pi}{\frac{1}{2} M_n - c_4} ,$$

$$y_1 - x_0 = \frac{2\pi e_n}{2n+1} < \frac{2\pi^2}{\left(\frac{1}{2} M_n - c_4\right)(2n+1)} < \frac{c_5}{nM_n} ,$$

что и требовалось доказать.

13. Теперь мы можем завершить доказательство теоремы 2.

Пусть $f \in C(\omega)$. Обозначим через $m-1$ целую часть числа $\sqrt{n}$, а через $D_m(x)$ тригонометрический многочлен m-ого порядка, наименее уклоняющийся от f.

Так как

$$f - L_n(f) = f - D_m + L_n(D_m - f)$$

и по теореме Вейерштрасса

$$\lim_{m\to\infty} \|f - D_m\| = 0 ,$$

то для того, чтобы доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n(f)\| = 0 ,$$

нам надо показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(D_m - f)\| = 0 .$$

Так как

$$L_n(D_m - f) = \sum_{i=0}^{2n} [D_m(x_i) - f(x_i)]\, l_i(x) ,$$

по теореме Джексона

$$D_m(x_i) - f(x_i) = O\left(\omega\left(\frac{1}{m}\right)\right),$$

в силу (9.1) и определения m

$$\sum_{i=2}^{2n} |l_i(x)| < c_2 \ln n < 2 c_2 \ln m$$

и согласно одному из условий теоремы

$$\lim_{m\to\infty} \omega\left(\frac{1}{m}\right) \ln m = 0 ,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{i=2}^{2n} [D_m(x_i) - f(x_i)]\, l_i(x) \right\| = 0$$

и нам остается доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{i=0}^{1}[D_m(x_i)-f(x_i)]\,l_i(x)\right\|=0\,. \tag{13.1}$$

Заметим, что

$$\sum_{i=0}^{1}[D_m(x_i)-f(x_i)]\,l_i(x)=[D_m(x_0)-f(x_0)]\,[l_0(x)+l_1(x)]+ \tag{13.2}$$
$$+[D_m(x_1)-D_m(x_0)+f(x_0)-f(x_1)]\,l_1(x)\,.$$

Так как $D_m(x_0)$ сходится к $f(x_0)$ и согласно (11.1) сумма $l_0(x)+l_1(x)$ ограничена, то

$$\lim_{n\to\infty}\|[D_m(x_0)-f(x_0)]\,[l_0(x)+l_1(x)]\|=0\,. \tag{13.3}$$

С помощью (12.1) получаем:

$$|f(x_1)-f(x_0)|\leqq\omega\left(f,\frac{c_5}{nM_n}\right)<(c_5+1)\,\omega\left(f,\frac{1}{nM_n}\right)\leqq(c_5+1)\,c(f)\,\omega\left(\frac{1}{nM_n}\right).$$

Так как очевидно

$$|l_1(x)|<M_n$$

и в силу одного из условий теоремы

$$\lim_{n\to\infty}M_n\,\omega\left(\frac{1}{nM_n}\right)=0\,,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\|[f(x_0)-f(x_1)]\,l_1(x)\|=0. \tag{13.4}$$

По теореме о среднем

$$D_m(x_1)-D_m(x_0)=(x_1-x_0)\,D'_m(z)\qquad (x_0<z<x_1)$$

а в силу неравенства С. Н. Бернштейна

$$|D'_m(x)|\leqq m\,\|D_m\|\,.$$

Но $\|D_m\|$ не превосходит некоторой, зависящей лишь от f постоянной. Принимая во внимание (12.1) и определение m, имеем:

$$D_m(x_1)-D_m(x_0)=O\left(\frac{m}{nM_n}\right)=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}\,M_n}\right).$$

Следовательно,

$$[D_m(x_1)-D_m(x_0)]\,l_1(x)=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{13.5}$$

Из (13.2) — (13.5) следует (13.1), что завершает доказательство теоремы 2.

14. Предположим, что выполняется условие

$$\varliminf_{n\to\infty}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n>0\,.$$

Тогда для любой X

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \omega\left(\frac{1}{nM_n}\right)\ln nM_n > 0$$

и, так как по теореме С. М. Бернштейна

$$M_n > c_6 \ln n\,,$$

то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \omega\left(\frac{1}{nM_n}\right) M_n > 0\,, \tag{14.1}$$

т. е. выполняется условие теоремы 1. Поэтому выполняется и ее утверждение.

Чтобы доказать, что второй результат С. М. Лозинского также является следствием теоремы 1 достаточно показать, что (14.1) является следствием неравенств

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \omega\left(\frac{1}{n}\right) M_n > 0 \tag{14.2}$$

и

$$\lim_{t=+0} \frac{\omega[t\,\omega(t)]}{\omega(t)} > 0\,. \tag{14.3}$$

Предположим сначала, что среди значений n, удовлетворяющих в силу (14.2) условию

$$\omega\left(\frac{1}{n}\right) M_n > c_7\,,$$

бесконечно много удовлетворяют и условию

$$M_n\,\omega\left(\frac{1}{n}\right) \leqq 1\,.$$

Так как в силу (14.3) можно считать, что

$$\omega\left[\frac{1}{n}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] > c_8\,\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

то

$$M_n\,\omega\left(\frac{1}{nM_n}\right) \geqq M_n\,\omega\left[\frac{1}{n}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] > M_n c_8 \omega\left(\frac{1}{n}\right) > c_7 c_8\,,$$

т. е. действительно выполняется (14.1).

Предположим теперь, что для бесконечной последовательности значений n

$$M_n\,\omega\left(\frac{1}{n}\right) > 1\,.$$

Тогда

$$\omega\left[\frac{1}{n}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \omega\left[\frac{1}{nM_n}\,M_n\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] \leqq 2\,M_n\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\omega\left(\frac{1}{nM_n}\right),$$

следовательно

$$M_n \, \omega\left(\frac{1}{nM_n}\right) \geqq \frac{1}{2} \, \frac{\omega\left[\frac{1}{n}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]}{\omega\left(\frac{1}{n}\right)} > \frac{1}{2} c_8 ,$$

т. е. (14.1) имеет место и в этом случае.

(Поступила 18-ого августа 1961 г.)

БИБЛИОГРАФИЯ

[1] Лозинский, С. М.: "Пространства $\tilde{C}_\omega$ и $\tilde{C}^*_\omega$ и сходимость интерполяционных процессов в них". *ДАН* **59** (1948), 1389—1392.

[2] Erdős, P.—Turán, P.: „On the role of the Lebesgue functions in the theory of the Lagrange interpolation". *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **6** (1955), 47—65.

[3] Тиман, А. Ф.: *Теория приближения функций действительного переменного.* Москва Физматгиз, 1960.

ON THE CONVERGENCE OF INTERPOLATION PROCEDURES ON CERTAIN FUNCTION SPACES

O. KIS

Abstract

Let be $\omega(t)$ the continuity module of a function, 2π-periodical and continuous in $(-\infty, +\infty)$; $C(\omega)$ the set of 2π-periodical and continuous functions with continuity module of order of magnitude $O((\omega/t))$. X denotes the matrix of arbitrary fundamental points of the trigonometric interpolation, $M_n(X)$ the respective Lebesgue-constants, $L_n(f, X, x)$ the trigonometric interpolation polynomials of order not greater than n of the function $f(x)$ and of X. If

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \omega\left(\frac{1}{nM_n(X)}\right) M_n(X) > 0 , \tag{1}$$

then there exists a $f \in C(\omega)$ such that

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \max |f(x) - L_n(f, X, x)| > 0 \cdot$$

If for $\omega(t)$ and the sequence of numbers M_n

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n = 0,$$

$$M_n \geqq M_n(Y)$$

are true (where Y denotes the matrix of the equidistant fundamental points) and

$$\lim_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{nM_n}\right) M_n = 0\,, \tag{2}$$

then there exists an X for which

$$M_n(X) = M_n \qquad (n \geq 1)$$

furthermore, if only $f \in C(\omega)$ then

$$\lim_{n\to\infty} \max_x |f(x) - L_n(f, X, x)| = 0\,.$$

Similar theorems are true concerning the Lagrange-interpolation, only that in (1) and (2) $n\,M_n$ must be replaced by $n^2 M_n$, and Y denotes the matrix of the Chebyshev fundamental points.

ÜBER EIN GRUPPENTHEORETISCHES PROBLEM

von

I. KÖRNYEI[1]

Für eine beliebige G und für einen festen Exponenten n bezeichne G^n die durch sämtliche Elemente $g^n (g \in G)$ erzeugte (offenbar vollinvariante) Untergruppe von G. Ferner bezeichne p stets eine Primzahl, I den Ring der ganzen rationalen Zahlen und (m, n) den grössten gemeinsamen Teiler von m und n.

Wir brauchen jetz einige Klassen von *periodischen* Abelschen Gruppen, für welche die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

1) mit G gehört jede Untergruppe von G zu $\mathcal{K}$.
2) wenn jede p-Komponente einer periodischen Abelschen Gruppe G zu $\mathcal{K}$ gehört, so gilt auch $G \in \mathcal{K}$.

Die folgenden periodischen Gruppen liefern für eine diese zweien Bedingungen erfüllende Klasse ein Beispiel: die Abelschen bzw. die zyklischen bzw. die elementaren Abelschen Gruppen, ferner die kommutativen p-Gruppen bzw. die Abelschen Gruppen ohne Element mit unendlicher Höhe bzw. die als direktes Produkt von endlichvielen endlichen zyklischen Gruppen darstellbaren Gruppen und die Einheitsgruppe selbst.

Nun ergibt sich der folgende:

Satz 1.[2] *Bestehen $d = (m, n)$, $G^m \in \mathcal{K}$ und $G^n \in \mathcal{K}$ für eine beliebige Gruppe G, so gilt auch $G^d \in \mathcal{K}$.*

Aus dieser Satz folgt es mit vollständiger Induktion:

Wenn $(m_1, \ldots, m_r) = d$ ist und $G^{m_1}, \ldots, G^{m_r}$ aus $\mathcal{K}$ sind, so gehört auch G^d zur Klasse $\mathcal{K}$.

Beweis. Diejenigen Elemente $g^d \in G$, jür die $\left(O(g^d), \frac{m}{d}\right) = 1$ erfüllt ist, gehören zu G^m, denn es gibt Zahlen $u_1, v_1 \in I$ mit $O(g^d)\, u_1 + \frac{m}{d} v_1 = 1$.

Woraus wirklich $g^d = g^{d \cdot 1} = g^{mv_1} \in G^m$ folgt. ($O(g)$ bezeichne die Ordnung von g.) Ferner erzeugen diese Elementen g^d mit $\left(O(g^d), \frac{m}{d}\right) = 1$ in G^m

[1] Eötvös L. University, Department of Mathematics, Budapest.

[2] Es ist noch einmal zu beobachten, dass jede Gruppe aus $\mathcal{K}$ kommutativ und periodisch (ohne Element mit unendlicher Ordnung) ist. Ursprünglich hat mein Kollege F. Szász dass Problem Untersucht [2], ob G^d zyklisch zu sein braucht, wenn $d = (m, n)$ und G^m bzw. G^n zyklisch sind? Eine Berichtigung einer Ungenauigkeit auf Seite 83 von [2] und weitere Bemerkungen sind in einer neuen Arbeit von F. Szász im Druck [3].

eine Untergruppe A, für die wegen der Bedingung 1) offenbar $A \in \mathcal{K}$ gilt. Diejenige Elementen $g^d \in G$, für die jeder Primteiler von $O(g^d)$ auch ein Teiler von $\frac{m}{d}$ ist, haben aber zu $\frac{n}{d}$ teilerfremde Ordnungen. Diese gehören also zu G^n und erzeugen eine Untergruppe B von G^n. Wegen der Bedingungen 1) gehört auch B zur Klasse $\mathcal{K}$. A und B haben nur das Einheitselement gemeinsam, und das direkte Produkt $P = A \otimes B$ liegt in G^d. P ist kommutativ und jede p-Komponente, als eine Untergruppe von A bzw. B, gehört zur Klasse $\mathcal{K}$. Auch P gehört also wegen der zweiten Bedingung zur Klasse $\mathcal{K}$. Es gilt $P \subseteq G^d$, und wir werden auch $G^d \subseteq P$ beweisen. $O(g^d)$ ist nämlich für ein beliebiges $g \in G$ in der Gestalt $O(g^d) = k \cdot l$ zerlegbar, wobei $\left(k, \frac{m}{d}\right) = 1$ und jeder Primteiler p von l auch ein Teiler von $\frac{m}{d}$ ist. Dann existieren wegen $(k, l) = 1$ Zahlen $u_2, v_2 \in I$ mit $ku_2 + lv_2 = 1$, woraus sich sofort $g^d = g^{d \cdot 1} = (g^{du_2})^k \cdot \cdot (g^{dv_2})^l$ mit $(g^{du_2})^k \in B$ und $(g^{dv_2})^l \in A$ ergibt. Also gelten $g^d \in A \otimes B$, $G^d = = P \in \mathcal{K}$, womit Satz 1 bewiesen ist.

Jetz werden wir einen neuen einfachen Beweis bezüglich des nichtperiodischen Falls der Dlabschen Verallgemeinerung [1] des Satzes von F. SZÁSZ mitteilen.

Satz 2. *Wenn für eine beliebige Gruppe G G^m und G^n unendliche zyklische Gruppen sind, so ist für $d = (m, n)$ auch G^d eine unendliche zyklische Gruppe.*

Wie Satz 1, gibt es auch hier eine ähnliche Folgerung: *Wenn $G^{m_1}, \ldots, G^{m_r}$ unendliche zyklische Gruppen sind, und $(m_1, \ldots, m_r) = d$ ist, dann ist auch G^d eine unendliche zyklische Gruppe.*

Beweis. Bestehen $G^m = \{a\}$, $G^n = \{b\}$ und $O(a) = O(b) = \infty$, so erhält man $b^{-1}ab = a^j$ mit ganzrationalem j, weil G^m eine vollinvariante Untergruppe von G ist. Hiernach ergibt sich wegen $a^n \in \{b\}$ sofort $a^{jn} = (b^{-1}ab)^n = b^{-1}a^n b = a^n$, also $jn = n$, $j = 1$ und $ab = ba$. Für $d = (m, n)$ gilt offenbar $G^d \supseteq G^m \cdot G^n$. Da $d = mm_1 + nn_1$ mit Zahlen $m_1, n_1 \in I$ lösbar ist, gilt $g^d = (g^{m_1})^m (g^{n_1})^n$, woraus auch $G^d = G^m \cdot G^n$ folgt. Daher ist $G^d = \{a, b\}$ gewiss kommutativ.

G^d ist torsionsfrei. Wegen ihrer Kommutativität existiert nämlich ihre maximale periodische Untergruppe G_1 und $G_1^{\frac{n}{d}}$ liegt in G^n, sie ist periodisch, und so enthält sie nur das Einheitselement. Ähnliches gilt für $G_1^{\frac{m}{d}}$. Da es $\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) = 1$ gilt, enthält G_1 wegen des Satzes 1 (Enstehe die Klasse nur aus der Einheitsgruppe) nur das Einheitselement.

Die Faktorgruppen G^d/G^m ist aber wegen $G^d/G^m \cong G^n/G^n \cap G^m$ zyklisch und sie kann durch eine Nebenklasse $\bar{g} = g \cdot G^m$ erzeugt werden. Sei $g \in G$ ein festgewählter Vertreter aus der Nebenklasse $\bar{g}$, und k die Ordnung von $\bar{g}$ in G^d/G^m. Dann bestehen $k / \frac{m}{d}$ und $g^k = a^i \in \{a\} = G^m$ $(i \in I)$. Für $s = (k, i)$, $k = k's$ und $i = i's$ erhält man $(g^{k'}a^{-i'})^s = e$ und wegen der Torsionsfreiheit ist offenbar auch $g^{k'} = a^{i'}$ richtig, was wegen $O(\bar{g}) = k$ nur im Falle $k = k'$ und $s = 1$, möglich ist. Es gibt also Zahlen $u_3, v_3 \in I$ mit $iu_3 + kv_3 = 1$, woraus auch $(u_3, O(\bar{g})) = 1$ folgt. Mit $\bar{g}$ erzeugt auch $(\bar{g})^{u_3}$ die Faktorgruppe G^d/G^m, weil $(u_3, k) = 1$ ist. Daher hat ein beliebiges Element x von G^d die Gestalt $x = g_0^{w_1} a^{w_2}$, wobei $w_1 = 0, 1, \ldots, k-1$ und w_2 ganzration al ist, wenn g_0 ein festgewähltes Element von der Nebenklasse $(\bar{g})^{u_3}$ bezeichnet. Es sei $g_0 = g^{u_3} a^{v_3}$. Dann gilt es aber: $g_0^k = (g^{u_3} a^{v_3})^k = (g^k)^{u_3} a^{kv_3} = a^{iu_3 + kv_3} = a$. Folglich besteht $G^d = \{g_0\}$, womit Satz 2 bewiesen ist.

(Eingegangen: 17. Oktober, 1961.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Dlab, W.: „On cyclic groups". *Czechoslovak Math. Journ.* **10** (85) (1960) 244—254.

[2] Szász, F.: „Über Gruppen, deren sämtliche nichttriviale Potenzen zyklische Untergruppen der Gruppe sind". *Acta Sci. Math. Szeged* **17** (1956) 83—84.

[3] Szász, F.: „Bemerkungen zu meiner Arbeit: „Über Gruppen, deren sämtliche nichttriviale Potenzen zyklische Untergruppen der Gruppe sind"." *Acta Sci. Math. Szeged* (im Druck).

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ТЕОРИИ ГРУПП

Резюме

I. KÖRNYEI

Пусть $\mathcal{K}$ класс абелевых периодических групп, имеющий следующие свойства:

1. Если $G \in \mathcal{K}$, то все подгруппи G тоже принадлежат к классу $\mathcal{K}$.

2. Если все p-компоненты коммутативной группи G принадлежат $\mathcal{K}$, то G тоже принадлежит к классу $\mathcal{K}$.

Доказывается следующая

Теорема. *Если G группа, m и n положительные целые числа; $G^m \in \mathcal{K}$, $G^n \in \mathcal{K}$, то $G^d \in \mathcal{K}$, где d есть наибольший общий делитель чисел m и n.*

Эта теорема верна и в том случае, когда $\mathcal{K}$ класс бесконечных цикличексих групп.

ON THE PROBLEM OF MIKUSIŃSKI'S LOGARITHM

by

L. MÁTÉ

A very important question in the application of MIKUSIŃSKI's operational calculus is, to settle the question, whether a certain operator is logarithm or not. This problem was solved by MIKUSIŃSKI [1] for S^{α} and by WLOKA [4] for $e^{\gamma s}$. In this paper there is given a neccessary and sufficient condition for an operator, to be a logarithm of a certain type. We shall give also conditions, sufficient only, which can be easily applied.

Concerning to the used definitions and theorems, we refer to MIKUSIŃSKI's book [1]. However, we give some of the most important notations and notions as follows.

Notations. N1. A Greek letter means a real number and a Roman letter means an operator. N2. Product is always the structure product, generated from the convolution. N3. C is the ring of continuous functions in $[0, \infty)$ with the convolution product and with the topology generated by the quasi-uniform convergence. (It is called C-convergence). N4. If $f, g \in C$, then we shall write

$$\|f\| \leqq \|g\|$$

if and only if

$$\sup_{t<t_0} |f(t)| \leqq \sup_{t<t_0} |g(t)|$$

for every t_0.

Definition of the exponential function. The exponential function $\exp(-\lambda\omega)$ is an operational function which satisfies the differential equation[1]

$$x'(\lambda) + \omega\, x(\lambda) = 0 \qquad x(0) = 1 \tag{1}$$

for $\lambda > 0$.

Definition of the logarithm. The operator ω is called a logarithm, if

$$\exp(-\lambda\omega)$$

exists.

Definition of bounded logarithm. We say, that a logarithm ω is bounded, if the exponential function $\exp(-\lambda\omega)$ is bounded in the following sense:

[1] We remember [1] that this equation has at most one solution and so the definition is correct.

There exists $f \in C$ that $f \exp(-\lambda\omega) \in C$ for every $\lambda \geqq 0$ and

$$\|f \exp(-\lambda\omega\| \leqq \|f\| .$$

We remark, that even from

$$\|f \exp(-\lambda\omega)\| \leqq e^{\beta\lambda} \|f\| \qquad \beta > 0 \tag{2}$$

follows, that the logarithm $\omega + \beta$ is bounded.

In this paper, we are going to give a characterization of the bounded logarithms.

Examples. I. If $a \in C$ then

$$\exp(-\lambda a) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\lambda^k a^k}{k!}$$

and if $f \in C$ then (1) will be in the form of the integro-differential equation

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} x(\lambda, t) + \int_0^t a(t-\tau)\, x(\lambda, \tau)\, d\tau = 0 \qquad x(0, t) = f .$$

II. The operator S is a logarithm. If $f \in C$ than

$$f \exp(-\lambda S) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad t - \lambda < 0 \\ f(t-\lambda) & \text{if} \quad t - \lambda \geqq 0 . \end{cases} \tag{3}$$

If $f, f' \in C$ and $f(0) = 0$ then (1) is in the form of the partial differential equation

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} x(\lambda, t) + \frac{\partial}{\partial t} x(\lambda, t) = 0 \qquad \begin{aligned} x(0, t) &= f \\ x(\lambda, 0) &= 0 . \end{aligned}$$

III. The operator e^{-S} is also a logarithm. If $f \in C$, then (1) will be in the form of the difference-differential equation

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} x(\lambda, t) + x(\lambda, t-1) = 0 \qquad x(0) = f$$

(where

$$x(\lambda, t-1) \equiv 0 \quad \text{if} \quad t - 1 < 0)$$

S is bounded logarithm and e^{-S} satisfies (2) as will be seen in corollary 1 and 2.

Lemma. *If $\{\omega_n\}$ is a sequence of logarithms, $\lim\limits_n \omega_n = \omega$ and there exists a continuous function $M(\lambda, t)$ that*

$$\sup_{\lambda < \lambda_0} \|f \exp(-\lambda\omega_n)\| < \|M(\lambda_0)\| \tag{4}$$

then ω is also a logarithm and

$$\lim_n \exp(-\lambda\omega_n) = \exp(-\lambda\omega) . \tag{5}$$

Proof. Let $g \in C$ and $\{g\,\omega_n\}$ be C-convergent. Then

$$f^2 g \exp(-\lambda\omega_n) - f^2 g \exp(-\lambda\omega_m) =$$

$$(6) \qquad = \int_0^\lambda \frac{d}{d\mu}\{gf \exp(-[\lambda-\mu]\,\omega_m)\cdot f\exp(-\mu\omega_n)\}\,d\mu =$$

$$= \int_0^\lambda (\omega_m - \omega_n)\,g\cdot f\exp(-[\lambda-\mu]\,\omega_m)\cdot f\exp(-\mu\omega_n)\,d\mu$$

and from (4) and (6)

$$\sup_{\lambda<\lambda_0} \|f^2 g\exp(-\lambda\omega_n) - f^2 g\exp(-\lambda\omega_m)\| \leq \|\omega_m g - \omega_n g\|\,\lambda_0\, t^2\,\|M(\lambda_0)\|^2$$

hence $\{f^2 g \exp(-\lambda\omega_n)\}$ C-converges uniformly in $[0, \lambda_0]$. So (5) holds.

Theorem 1. *If* $\exp(-\lambda\omega)$ *is bounded then*

$$(*) \qquad \left(\frac{\alpha}{\omega+\alpha}\right)^k f \in C \quad \text{and} \quad \left\|\left(\frac{\alpha}{\omega+\alpha}\right)^k f\right\| \leq \|f\| \qquad \alpha > 0,\ k = 1, 2, \ldots$$

holds.

Proof.

$$\|\int_n^m e^{-\alpha\lambda} f\exp(-\lambda\omega)\,d\lambda)\| \leq \|f\| \int_n^m e^{-\alpha\lambda}\,d\lambda.$$

So

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\lambda} f\exp(-\omega\lambda)\,d\lambda$$

exists and

$$(7) \qquad \|\alpha\int_0^\infty e^{-\alpha\lambda} f\exp(-\lambda\omega)\,d\lambda\| \leq \|f\|.$$

The equation

$$(8) \qquad (\omega+\alpha)\int_0^m e^{-\alpha\lambda} f\exp(-\omega\lambda)\,d\lambda = \int_0^m (\omega+\alpha)\,e^{-\alpha\lambda} f\exp(-\omega\lambda)\,d\lambda$$

hold, because of the continuity of the product. The right hand side of (8) can be written in the form

$$-\int_0^m \frac{d}{d\lambda}[e^{-\alpha\lambda} f\exp(-\omega\lambda)]\,d\lambda$$

from which follows

$$(9) \qquad \alpha\int_0^\infty e^{-\alpha\lambda}\exp(-\omega\lambda)\,d\lambda = \frac{\alpha}{\omega+\alpha}.$$

From the identity

$$\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{\omega+\beta} - \frac{1}{\omega+\alpha}\right) = \frac{1}{\omega+\alpha}\cdot\frac{1}{\omega+\beta}$$

and from (9) follows that

$$-\frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\omega+\alpha}=\frac{1}{(\omega+\alpha)^2}$$

and by the use of induction we get

$$(-1)^k\frac{\alpha^k}{k!}\frac{d^k}{d\alpha^k}\frac{1}{\omega+\alpha}=\frac{\alpha^k}{(\omega+\alpha)^{k+1}}. \tag{10}$$

From the identities

$$(-1)^k\frac{d^k}{d\alpha^k}\left(\frac{1}{\omega+\alpha}f\right)=\int\limits_0^\infty e^{-\alpha\lambda}\lambda^k f\exp(-\omega\lambda)\,d\lambda,$$

$$\frac{\alpha^k}{k!}\int\limits_0^\infty e^{-\alpha\lambda}\lambda^k\,d\lambda=1 \tag{11}$$

and from (10) follows

$$(-1)^{k-1}\frac{\alpha^k}{(k-1)!}\int\limits_0^\infty e^{-\alpha\lambda}\lambda^{k-1}f\exp(-\omega\lambda)\,d\lambda=\left(\frac{\alpha}{\omega+\alpha}\right)^k f. \tag{12}$$

From (12) and (11) we get (*).

Theorem 2. *If (*) is true, then ω is logarithm and*

$$\|f\exp(-\omega\lambda)\|\leq\|f\|.$$

Proof. I.

$$\boxed{\frac{\alpha\omega}{\omega+\alpha}\ \text{is a logarithm for every}\ \alpha>0.}$$

If $\frac{\alpha\omega}{\omega+\alpha}\in C$, then

$$f\exp\left(-\frac{\alpha\omega}{\omega+\alpha}\lambda\right)=e^{-\alpha\lambda}\sum_{k=0}^\infty\frac{\alpha^k\lambda^k}{k!}\left(\frac{\alpha}{\omega+\alpha}\right)^k f$$

since in this case the power series of the exponential function is convergent. We show, that this is alwys true if (*) is satisfied. Let

$$\varphi_n=\varphi_n(\alpha,\lambda)=e^{-\alpha\lambda}\sum_{k=n}^{n}\frac{\alpha^k\lambda^k}{k!}\left(\frac{\alpha}{\omega+\alpha}\right)^k. \tag{13}$$

With the notation (13)

$$\|(\varphi_n-\varphi_m)f\|\leq\|f\|\sum_{k=n}^{m}\frac{\alpha^k\lambda^k}{k!}$$

and

(14) $$\|\varphi_n f\| \leqq \|f\|$$

so

$$\lim_n \varphi_n f = \varphi f$$

uniformly in every finite $[0, \lambda]$. Here

$$\varphi = \varphi(\alpha, \lambda) = e^{-\alpha\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k \lambda^k}{k!} \left(\frac{\alpha}{\omega + \alpha}\right)^k .$$

Since

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} \varphi(\alpha, \lambda) = -\alpha\varphi(\alpha, \lambda) + \frac{\alpha^2}{\omega + \alpha} \varphi(\alpha, \lambda) = -\frac{\alpha\omega}{\omega + \alpha} \varphi(\alpha, \lambda)$$

and

$$\varphi(\alpha, 0) = 1$$

thus the statement I is proved.

II. $$\boxed{\lim_{\alpha \to \infty} \frac{\alpha\omega}{\omega + \alpha} = \omega}$$

It is easy to verify, that

$$\left\| \frac{\alpha\omega}{\omega + \alpha} f \cdot g \right\| \leqq t \|\omega g\| \, \|f\| .$$

Thus

$$\left\| \left(\frac{\alpha\omega}{\omega + \alpha} - \omega\right) f \cdot g^2 \right\| = \left\| \frac{\omega^2}{\alpha + \omega} f g^2 \right\| \leqq \frac{t}{\alpha} \|\omega^2 g^2\| \, \|f\| .$$

III. $$\boxed{\left\| f \cdot \exp\left(-\frac{\alpha\omega}{\omega + \alpha}\lambda\right) \right\| \leqq \|f\|}$$

This is an immediate consequence of (14).

The theorem follows from I, II and III considering the Lemma. And now, we give two conditions only sufficient conditions for to be a logarithm of bounded type.

Corollary 1. *If* $\frac{1}{\omega} \in C$, *then* $\frac{\alpha}{\omega + \alpha} \in C$ *too. If in addition*

$$\frac{1}{\omega} \geqq 0 ; \quad \frac{\alpha}{\omega + \alpha} \geqq 0 \quad \textit{for every } \alpha > 0$$

then (*) *is satisfied.*

Proof. If $\frac{1}{\omega} \in C$, then

$$\frac{\alpha}{\omega+\alpha} = \frac{\frac{\alpha}{\omega}}{1+\frac{\alpha}{\omega}} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\alpha^k}{\omega^k} \in C .$$

If

$$\frac{1}{\omega} > 0 ; \quad \frac{\alpha}{\omega+\alpha} > 0 \tag{15}$$

then

$$\frac{\alpha}{\omega+\alpha}\,\frac{1}{\omega} \leq \frac{\alpha}{\omega+\alpha}\,\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega+\alpha} = \frac{1}{1+\frac{\alpha}{\omega}}\left(\frac{\alpha}{\omega}+1\right)\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega} . \tag{16}$$

Because of (15), from (16) follows

$$\left\| \frac{\alpha}{\omega+\alpha}\,\frac{1}{\omega} \right\| \leq \left\| \frac{1}{\omega} \right\| .$$

From the inequality

$$\left(\frac{\alpha}{\omega+\alpha}\right)^k \frac{1}{\omega} = \left(\frac{\alpha}{\omega+\alpha}\right)^{k-1} \left(\frac{\alpha}{\omega+\alpha}\,\frac{1}{\omega}\right) \leq \left(\frac{\alpha}{\omega+\alpha}\right)^{k-1} \frac{1}{\omega}$$

by induction follows, that

$$\left\| \left(\frac{\alpha}{\omega+\alpha}\right)^k \frac{1}{\omega} \right\| < \left\| \frac{1}{\omega} \right\| .$$

The second condition (Corollary 2) based on the following lemma.

Lemma 2. Let be C_0 a closed linear subspace of C, ω be a bounded logarithm and

$$e^{-\lambda\omega}\, C_0 \subseteq C_0 . \tag{17}$$

Then

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha}{(\alpha+1)^{k+1}}\, e^{-k\omega} f \in C_0 \tag{18}$$

for every $f \in C_0$ and $\alpha > 0$.

Proof. From the boundedness of ω follows, that

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} (-1)^k \frac{\alpha}{(\alpha+1)^{k+1}}\, e^{-k\omega} f \right\| \leq \|f\| \sum_{k=n}^{m} \frac{\alpha}{(\alpha+1)^{k+1}} \qquad \text{for } \alpha > 0 \tag{19}$$

and from (17) follows

$$(20) \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\alpha}{(\alpha+1)^{k+1}} e^{-k\omega} f \in C_0 .$$

From (19) and (20) follows (18).

Corollary 2. If ω is bounded logarithm and (17) is valid, then $e^{-\omega}+1$ is also a logarithm of bounded type.

Proof. If $f \in C_0$ then

$$(21) \qquad \frac{\alpha}{e^{-\omega}+1+\alpha} f = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha}{(\alpha+1)^{k+1}} e^{-k\omega} f$$

and

$$(22) \qquad \left\| \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha}{(\alpha+1)^{k+1}} e^{-k\omega} f \right\| \leqq \|f\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha}{(\alpha+1)^{k+1}} = \|f\| .$$

From (21) and (22) follows, that the condition (*) is satisfied for $k=1$. From lemma 2 follows, that

$$\left(\frac{\alpha}{e^{-\omega}+1+\alpha}\right)^k f \in C_0 \qquad k = 1, 2, \ldots$$

and from (21) and (22)

$$(23) \qquad \left\| \left(\frac{\alpha}{e^{-\omega}+1+\alpha}\right)^k f \right\| =$$

$$= \left\| \frac{\alpha}{e^{-\omega}+1+\alpha} \left(\frac{\alpha}{e^{-\omega}+1+\alpha}\right)^{k-1} f \right\| \leqq \left\| \left(\frac{\alpha}{e^{-\omega}+1+\alpha}\right)^{k-1} f \right\| .$$

From the inequality (23) follows, that

$$\left\| \left(\frac{\alpha}{e^{-\omega}+1+\alpha}\right)^k f \right\|$$

is a monoton decreasing function of k and so, condition (*) of theorem 1 is valid for every k. Q. E. D.

(Received December 27, 1961.)

REFERENCES

[1] Mikusiński, J.: *Operational Calculus*. Pergamon Press, 1959.

[2] Hille, E.—Phillips, R.: *Functional Analysis and Semi-Groups*. 1957.

[3] Fenyő, E.: „Sur la notion du logarithme d'un opérateur". *Bull. Soc. Math. R. P. R.* **3** (1959) 131.

[4] Wloka, J.: „Über die Anwendung der Operatorenrechnung". *J. Reine Angew. Math.* **202** (1959) 107.

О ПРОБЛЕМЕ ЛОГАРИФМОВ МИКУСИНСКОГО

L. MÁTÉ

Резюме

Неравенство (*) является необходимым и достаточным условием того, чтобы уравнение (1) имело такое $\exp(-\lambda\omega)$ решение, которое удовлетворяет следующим условиям:

а) Если $f \in C$, тогда $f \exp(-\lambda\omega) \in C$ для всех положительных λ.

б) $$\sup_{\lambda>0} \sup_{t<t_0} |f \exp(-\lambda\omega)| \leqq \sup_{t<t_0} |f| .$$

В следствиях 1 и 2 автор дает легко применяемые достаточные условия для выполнения (*).

ÜBER DIE ANALOGA DER GANZEN RATIONALEN FUNKTIONEN IN VERALLGEMEINERTEN KLASSEN VON FUNKTIONEN EINER KOMPLEXEN VERÄNDERLICHEN, II.[1]

von

K. SZILÁRD

§ 3. Die Klasse der K-quasikonformen Funktionen

Der Termin »quasikonforme Funktion« wurde von A. J. LOHWATER [1] vorgeschlagen für eindeutige Funktionen $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ für welche die partiellen Ableitungen u_x, u_y, v_x, v_y im Inneren des Definitionsbereiches von $f(z)$ existieren und stetig sind und der Bedingung

$$u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2 \leqq 2\, K_1(u_x\, v_y - v_x\, u_y)\,, \tag{1}$$

wo $K_1 \geqq 1$ eine reelle Konstante ist, genügen. Es wird vorausgesetzt, dass die Funktionaldeterminante $J(z) = u_x v_y - v_x u_y$ nichtnegativ ist (s. auch KÜNZI [2]). Die geometrische Bedeutung der Konstante K_1 ist folgende. Es sei $z_0 = x_0 + iy_0$ ein Punkt der z-Ebene in welchem $J(z) \neq 0$ ist. Ist $\varrho > 0$ genügend klein, so ist das Bild eines Kreises mit dem Mittelpunkt z_0 und Radius ϱ bei der Abbildung $z \to w$ eine Jordansche Kurve. Vergrössert man diese Jordansche Kurve im Verhältniss $1 : {}^1/_\varrho$ so strebt sie, wenn $\varrho \to 0$ gegen eine Ellipse deren Gleichung (bei geeigneter Wahl eines rechtwinkligen Koordinatensystems X, Y) in der Form

$$\frac{v_x^2 + v_y^2}{|J(z)|} X^2 - \frac{u_x\, v_x + u_y\, v_y}{|J(z)|} 2\, XY + \frac{u_x^2 + u_y^2}{|J(z)|} Y^2 = |J(z)| \tag{2}$$

geschrieben werden kann. (Die partiellen Ableitungen u_x usw. sind im Punkte $z_0 = x_0 + iy_0$ genommen. Man sagt: Der »unendlich kleine Kreis« um z_0 in der z-Ebene wird auf eine »unendlich kleine Ellipse« um w_0 in der w-Ebene abgebildet.) Man verifiziert leicht, dass die Summe der Koeffizienten von X^2 und Y^2 gleich $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$ ist, (a und b sind die Längen der grossen und der kleinen Halbachse der Ellipse (2)), also

$$\frac{u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2}{|u_x\, v_y - v_x\, u_y|} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}\,.$$

Nehmen wir an, dass die Funktion $w = f(z)$ so beschaffen ist, dass für alle Punkte z ihres Definitionsbereiches, mit $J(z) \neq 0$ das erhaltene Achsenverhältniss a/b nicht grösser, als eine reelle Konstante K ist,

$$\frac{a}{b} \leqq K\,. \tag{2'}$$

[1] Den Anfang s.: diese Zeitschrift, Jahrg. VI. 1961. S. 375–380.

Natürlich ist $K \geqq 1$. Solche Funktionen $f(z)$ existieren, zum Beispiel für eine beliebige analytische Funktion ist $K = 1$. Aus der gleichmässigen Beschränktheit der (von z abhängigen) Grösse a/b folgt die gleichmässige Beschränktheit der Grösse $a/b + b/a$ und umgekehrt. Die Ungleichung (1) besagt also, dass $a/b + b/a$ für die Funktion $w = f(z)$ eine obere Schranke $2K_1$ besitzt (oder aber $J(z) = 0$ ist; in diesem Falle verschwinden alle vier partiellen Ableitungen erster Ordnung von u und v). Für die Charakterisierung der quasikonformen Funktionen bedient man sich nicht der Grösse K_1 sondern der Grösse K. Um die Rolle letzteren hervorzuheben wurden die schlichten Abbildungen $z \rightarrow w = f(z)$ (wo also für die Funktion $f(z)$ die Ungleichung (2') erfüllt ist) »K-quasikonforme Abbildungen« genannt (vergl. GRÖTZSCH [3]). Dementsprechend nennen wir die Funktionen $w = f(z)$ welche der Bedingung (2') genügen »K-quasikonforme Funktionen« (wobei also nur die Eindeutigkeit, nicht mehr aber die Schlichtheit gefordert wird, sie braucht auch in der Umgebung eines Punktes z in welchem $J(z) = 0$ ist, nicht erfüllt zu sein).

Wir wollen nun zeigen, dass die Analoga der ganzen rationalen Funktionen in der Klasse der K-quasikonformen Funktionen auch in Bezug auf Wachstum ähnliche Eigenschaften wie die der ganzen rationalen Funktionen haben, indem wir folgenden Satz beweisen.

Satz 3. *Die Funktion $w = f(z)$ sei K-quasikonform in jedem im Endlichen gelegenen Punkte wenigstens ausserhalb eines Kreises Γ_0 der z-Ebene (zum Beispiel, sie sei K-quasikonform in der ganzen endlichen z-Ebene) und ausserdem sei $\lim\limits_{|z| \to \infty} |f(z)| = \infty$ gleichmässig. Dann existieren eine natürliche Zahl n, und drei (von der Funktion $f(z)$ abhängige) positive Konstanten C_1, C_2 und R_0 so, dass für alle $R > R_0$ die Ungleichungen*

$$\operatorname*{Max}_{|z|=R} |f(z)| \geqq C_1 R^{n/K} \quad \text{und} \quad \operatorname*{Min}_{|z|=R} |f(z)| \leqq C_2 R^{nK}$$

gelten.

Dem Beweise dieses Satzes sollen einige Betrachtungen über stetige und über K-quasikonforme Funktionen vorausgeschickt werden. Es ist leicht einzusehen, dass der Satz 1 auch für Funktionen ausgesprochen werden kann, die ausserhalb eines gewissen Kreises Γ_0 der z-Ebene definiert und dort stetig und eindeutig sind. (Der Beweis des Satzes 1 kann für diesen Fall wörtlich wiederholt werden.) Es ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir den Kreis Γ_0 als einen Kreis mit dem Mittelpunkt $z = 0$ und mit einem Radius R_0 annehmen, ausserhalb dessen und auf der Kreislinie $|z| = R_0$ selbst $f(z) \neq 0$ und ausserdem, dass $f(z)$ für $|z| \geqq R_0$ stetig und eindeutig ist.

Der Beweis des Satzes 3 wird durch folgenden Hilfssatz erleichtert:

Hilfssatz 5. *Es existieren ein Kreis $|z| = R_{00} \geqq R_0$ und eine natürliche Zahl n so, dass für $|z| \geqq R_{00}$ eine eindeutige K-quasikonforme Funktion $F(z)$ definiert werden kann für welche die Gleichung*

$$[F(z)]^n = f(z)$$

gilt und wobei $F(z)$ schlicht ist. ($f(z)$ ist die K-quasikonforme Funktion, die die Bedingungen des Satzes 3 erfüllt.)

Beweis. Es seien z_1 und z_2 zwei beliebige Punkte des Gebietes $|z| > R_0$. Da $f(z_1) \neq 0$, so kann man für jede beliebige natürliche Zahl n in einer genügend kleinen Umgebung von z_1 n stetige eindeutige Funktionen $F_\nu(z)$ ($\nu=1,2,\ldots,n$) definieren, so dass dort $[F_\nu(z)]^n = f(z)$ ist. Diese n Funktionen sind K-quasikonform. Es ist nämlich bekannt, dass falls $G(\zeta)$ in einer gewissen Umgebung eines jeden Punktes ζ_0 eines Gebietes $\mathfrak{G}$ der ζ-Ebene als eindeutige analytische Funktion von ζ definiert werden kann und $\zeta = g(z)$ eine K-quasikonforme Funktion von z ist, wobei die Funktionswerte $g(z)$ in das Gebiet $\mathfrak{G}$ fallen, dass dann die Funktion von z, $w = G[g(z)]$ in der Umgebung eines jeden Punktes ihres Definitionsbereiches auch K-quasikonform ist (s. z. B. Künzi [2], S. 14.). (Die Rolle von $G(\zeta)$ spielt hier eine der n-Funktionen $\sqrt[n]{\zeta}$ in der Umgebung eines Punktes $\zeta_0 \neq 0$). Nehmen wir in einem kleinen Kreise um z_1 als Mittelpunkt eine beliebige, doch ein für allemal festgelegte dieser Funktionen $F_\nu(z)$ und bezeichnen sie durch $F(z)$ (d.h. ohne Index). Die natürliche Zahl n wählen wir mit Hilfe des Satzes 2 aus. Dieser Satz ist, auch mit der Modifikation, dass $f(z)$ wenigstens ausserhalb eines Kreises der z-Ebene der Klasse P angehöre auf K-quasikonforme Funktionen anwendbar, da es gezeigt werden kann, dass die Bedingungen 1, 2 und 3 aus § 2 für sie erfüllt sind (hierauf deutet auch Lohwater in seiner Arbeit [1], S. 336 hin). Laut Satz 2 und Hilfssatz 1 (in ihrer negativer Form) gilt für alle geschlossenen Jordanschen Kurven γ, die den Kreis $|z| \leqq R_0$ in ihren Innengebieten enthalten, die Gleichung

$$\mathrm{Var}_\gamma \arg f(z) = 2\pi n\,,$$

wo n eine natürliche Zahl ist. Für diese Zahl n zeigen wir die Richtigkeit unserer Behauptung. Verbinden wir den Punkt z_1 (den wir nun als Ausgangspunkt für die Bestimmung der Funktion $F(z)$ wählen) durch eine Kurve j im Gebiete $|z| > R_0$ mit dem Punkte z_2. In einem kleinen Kreise mit dem Rande zusammen um z_1 als Mittelpunkt ist $[F(z)]^n = f(z)$. Es gibt auf der Kurve j einen »letzten« Punkt (wenn man auf j aus dem Punkte z_1 ausgeht) der noch diesem Kreise angehört. In einem anderen kleinen Kreise um diesen »letzten« Punkt gibt es auch n Funktionen deren n-te Potenzen mit $f(z)$ zusammenfallen; eine von ihnen ist die stetige Fortsetzung der vorhin definierten $F(z)$. In der bekannten Weise können wir durch eine endliche Kette von kleinen Kreisen, deren Mittelpunkte auf der Kurve j liegen und die sich teilweise (nämlich die Nachbarkreise) überdecken, schliesslich bis zu einem Kreise um z_2 als Mittelpunkt gelangen und den Definitionsbereich von $F(z)$ auf den Bereich, der gleich der Summe der benutzten Kreise (als Punktmengen) ist, erweitern. Die so erhaltene Funktion ist in der Umgebung von z_2 eindeutig bestimmt, das heisst, sie hängt nicht von der benutzten Kurve j ab. Es seien nämlich j_1 und j_2 zwei (nicht notwendig einfache) Kurven, welche im Gebiete $|z| > R_0$ verlaufen, im Punkte z_1 anfangen und in z_2 enden. Durch »$-j_2$« sei die in umgekehrter Richtung durchlaufene Kurve j_2 bezeichnet und dementsprechend durch $j_1 - j_2$ die aus j_1 und $-j_2$ zusammengesetzte geschlossene (im Allgemeinen sich mehrfach überschneidende) Kurve. Bekanntlich ist

$$\mathrm{Var}_{j_1-j_2} \arg z = 2k\pi\,,$$

wo k eine ganze Zahl ist (positiv, negativ, oder 0).

Es kann gezeigt werden, dass aus der Gültigkeit von

$$\mathrm{Var}_\gamma \arg f(z) = 2\pi n\,,$$

mit

$$\mathrm{Var}_\gamma \arg z = 2\pi$$

folgt, dass für

$$\mathrm{Var}_{\gamma_1} \arg z = 2k\pi$$

die Gleichung

$$\mathrm{Var}_{\gamma_1} \arg f(z) = 2\,kn\,\pi$$

gültig ist, sobald die Kurven γ und γ_1 mit der Kreisscheibe $|z| \leqq R_0$ keinen Punkt gemeinsam haben. Es ist also

$$\operatorname*{Var}_{j_1-j_2} \arg f(z) = 2\,kn\,\pi$$

und

$$\operatorname*{Var}_{j_1-j_2} \arg F(z) = 2\,k\,\pi\,.$$

In jedem Falle kehrt also der Punkt $F(z)$, nachdem z die Kurve $j_1 - j_2$ durchgelaufen hat, in ihre Anfangslage $F(z_1)$ zurück (hängt doch $|F(z)|$ nur von z ab). Das bedeutet aber, dass der Wert von $F(z_2)$ derselbe ist, einerlei ob z auf der Kurve j_1, oder aber auf der Kurve j_2 von z_1 bis z_2 gelangte. Also ist die oben definierte Funktion $F(z)$ im Gebiete $|z| > R_0$ eindeutig.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $F(z)$ auch schlicht ist. Um diese Eigenschaft von $F(z)$ (wenigstens für genügend grosse $|z|$-Werte) nachzuweisen machen wir von der Gleichung

$$\mathrm{Var}_\gamma \arg F(z) = 2\,\pi$$

Gebrauch (γ ist die auch vorhin gebrauchte Jordansche Kurve, die in ihrem Innengebiete den Kreis $|z| \leqq R_0$ enthält. Diese Gleichung folgt aus der Gleichheit $[F(z)]^n = f(z)$).

Wir können nämlich einen Kreis mit einem Radius R_{00} um den Nullpunkt der z-Ebene finden, so dass sobald $|z| \geqq R_{00}$, die Werte $|F(z)| > \max\limits_{|z|=R_0} |F(z)|$ sind. (Ist doch $\lim\limits_{|z|\to\infty} |F(z)| = \infty$ gleichmässig.) Betrachten wir einen Punkt z_0 mit $|z_0| \geqq R_{00}$ und es sei $F(z_0) = w_0$. Aus $|w_0| > \max\limits_{|z|=R_0} |F(z)|$ folgt leicht, dass

$$\mathrm{Var}_{\Gamma_0} \arg [F(z) - w_0] = 0$$

ist. Ausserdem ist, wenn Γ_1 ein Kreis um $z = 0$ mit einem genügend grossen Radius ist, laut Satz 2

$$\mathrm{Var}_{\Gamma_1} \arg [F(z) - w_0] = 2\,\pi\,.$$

Das bedeutet, dass in dem Kreisring, der durch die Kreise Γ_0 und Γ_1 bestimmt wird, der Wert w_0 durch die Funktion $F(z)$ genau einmal angenommen wird (Hilfssatz 4). Beschränken wir uns auf die Punkte z, für welche $|z| \geqq R_{00}$ ist, so können wir somit behaupten, dass die entsprechenden Werte $w = F(z)$ durch die Funktion $F(z)$ genau einmal angenommen werden, d.h., dass die Abbildung $z \to F(z)$ im Aussengebiete des Kreises mit dem Radius R_{00} (und auf dieser Kreislinie selbst) schlicht ist. Damit ist der Hilfssatz 5 bewiesen. Wir wollen nunmehr statt R_{00} das Zeichen R_0 benutzen, d.h. wir wollen nachträglich auch annehmen, dass der Kreis $|z| \leqq R_0$ so gewählt wurde, dass in dem abgeschlossenen Gebiete $|z| \geqq R_0$ die Abbildung $z \to F(z)$ schlicht ist.

Bei dem Beweise des Satzes 3 machen wir von dem von AHLFORS und BEURLING eingeführten Begriffe der »*Extremallänge einer Kurvenfamilie*« Gebrauch [4]. Es seien hier die bekannte Definition der Extremallänge einer Kurvenfamilie und ihre im Folgenden zu gebrauchenden Eigenschaften angeführt. Es sollen gewisse rektifizierbare Kurven c im Gebiete $\mathfrak{G}$ der z-Ebene liegen. Die Menge dieser Kurven bezeichnen wir als die Kurvenfamilie $\{c\}$. Das Gebiet $\mathfrak{G}$ sei so beschaffen, und es sei $\varrho(z)$ eine solche in $\mathfrak{G}$ definierte, reelle, nichtnegative Funktion von $z = x + iy$, dass das im Lebesgueschen Sinne genommene Integral

$$A_\varrho = \iint_{\mathfrak{G}} \varrho^2 \, dx \, dy$$

existiert. Es soll ausserdem für jede Kurve c das Kurvenintegral nach der Bogenlänge s als Parameter

$$C_\varrho(c) = \int_c \varrho(z) \, ds$$

existieren. Wir betrachten alle Funktionen $\varrho(z)$ der verlangten Art, für welche noch die Bedingung

$$C_\varrho(c) \geqq 1$$

erfüllt ist. Wir nennen das stets vorhandene Infimum

$$\operatorname{Inf}_\varrho A_\varrho$$

den »*Modul*« der Kurvenfamilie $\{c\}$ und bezeichnen es durch $M\{c\}$. Ist $M\{c\} \neq 0$, so nennen wir die Grösse $1/M\{c\} = L\{c\}$ »*die Extremallänge der Kurvenfamilie* $\{c\}$«. Wenn $M\{c\} = 0$, so sagen wir, die Extremallänge $L\{c\}$ sei unendlich. Es wird bewiesen, dass die Zahl $L\{c\}$ von dem Gebiete $\mathfrak{G}$, in welches die Kurvenfamilie $\{c\}$ eingebettet ist, unabhängig ist, so, dass man von der Extremallänge (bzw. Modul) einer Kurvenfamilie ohne Bezugnahme auf das Gebiet $\mathfrak{G}$ sprechen kann. Die Zahl $L\{c\}$ ist eine konforme Invariante der Kurvenfamilie $\{c\}$, das heisst, wird das Gebiet $\mathfrak{G}$ konform und schlicht auf ein Gebiet $\mathfrak{G}'$ abgebildet, wobei die Kurvenfamilie $\{c\}$ in eine Kurvenfamilie $\{c'\}$ in $\mathfrak{G}'$ übergeht, so wird $L\{c\} = L\{c'\}$. Wir werden im Folgenden die Verallgemeinerung dieser Eigenschaft der Extremallänge für quasikonforme Abbildungen gebrauchen.

Hilfssatz 6. *Ist die im Gebiete $\mathfrak{G}$ definierte schlichte Abbildungsfunktion $w = f(z)$ eine K-quasikonforme Funktion, wobei durch die Abbildung $z \rightarrow w$ die Kurvenfamilie $\{c\}$ in eine Kurvenfamilie $\{c'\}$ in der w-Ebene übergeht, so gelten die Ungleichungen*

$$\frac{L\{c\}}{K} \leqq L\{c'\} \leqq K \cdot L\{c\}. \tag{3}$$

Der Beweis dieser Ungleichungen findet sich in der Arbeit von A. PFLUGER [5]. (Es ist zu bemerken, dass PFLUGER sich einer anderen, von J. HERSCH [6] stammenden Definition der Extremallänge bedient, die von der Rektifizierbarkeit der Kurven c keinen Gebrauch macht, uns genügt hier die ursprüngliche Definition von AHLFORS und BEURLING [4], für welche der Beweis der Ungleichungen (3) ebenso durchgeführt wird, wie für die HERSCH'sche Definition.)

Im Folgenden werden wir noch zwei leicht zu beweisende Hilfssätze über Extremallängen von Kurvenfamilien gebrauchen. (Betreffs der Beweismethoden sei auf die Arbeit von J. HERSCH [6] hingewiesen.)

Hilfssatz 7. *Das Gebiet* $\mathfrak{G}$ *sei ein echter Teil des Gebietes* $\mathfrak{G}_1$ *die Kurvenfamilie* $\{c\}$ *soll das Gebiet* $\mathfrak{G}$, *die Kurvenfamilie* $\{c_1\}$ *soll das Gebiet* $\mathfrak{G}_1$ *lückenlos ausfüllen und* $\{c\}$ *sei eine Teilmenge von* $\{c_1\}$. *Das Infimum* $\operatorname*{Inf}_{\varrho_1} \iint\limits_{\mathfrak{G}_1} \varrho_1^2 dxdy < \infty$ *für alle Funktionen* $\varrho_1(x, y)$, *die zur Bestimmung von* $M\{c_1\}$ *zulässig sind, soll durch eine überall in* $\mathfrak{G}_1$ *stetige und positive Funktion* $\varrho_1(x, y)$ *verwirklicht werden. Dann ist*

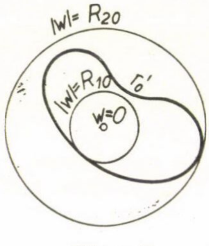
$$L\{c\} > L\{c_1\}.$$

Hilfssatz 8. *Die Extremallänge der Familie der aller glatten Jordanschen Kurven* γ, *die im Kreisringe* $0 < R_1 \leq |z| \leq R_2$ *verlaufen und den Kreis* $|z| = R_1$ *in ihren (abgeschlossenen) Innengebieten erhalten, ist:*

$$L\{c\} = \frac{2\pi}{\log(R_2/R_1)}.$$

Wir können nunmehr zum Beweise des Satzes 3 übergehen.

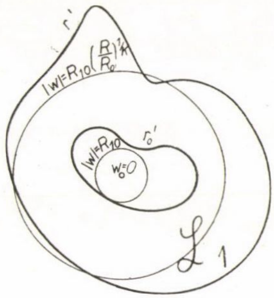
Es sei $w = f(z)$ eine Funktion, die den Voraussetzungen des Satzes 3 genüge leistet, und es sei $F(z) = \sqrt[n]{f(z)}$ die K-quasikonforme Funktion, die das Gebiet $|z| \geq R_0$ der z-Ebene auf ein Gebiet der w-Ebene schlicht abbildet. Durch Γ_0' soll die Jordansche Kurve in der w-Ebene, in die der Kreis $|z| = R_0$ bei der Abbildung $z \to w = F(z)$ transformiert wird, bezeichnet werden, und hierbei wird das Äussere des Kreises $|z| = R_0$ (d.h. das Gebiet $|z| > R_0$) auf das Äussere von Γ_0' in der w-Ebene abgebildet. Da für $|z| \geqq R_0$ immer $f(z) \neq 0$ ist, so wird der Punkt $w = 0$ im Innengebiete von Γ_0' liegen. $|w| \leqq R_{10}$ sei der grösste Kreis um $w = 0$, als Mittelpunkt dessen sämtliche Punkte zum abgeschlossenen Innengebiet von Γ_0' gehören, und $|w| \leq R_{20}$ sei der kleinste Kreis um $w = 0$ der alle Punkte von Γ_0' enthält (Fig. 2.).



Figur 2.

Nun betrachten wir einen Kreisring $R_0 \leq |z| \leq R$ in der z-Ebene. Das Bild dieses Kreisringes bei der Abbildung $z \to w = F(z)$ ist ein zweifach zusammenhängender Bereich $\mathfrak{L}_1$, der durch die Jordanschen Kurven Γ_0' und Γ', das Bild von $|z| = R$, begrenzt wird. In der w-Ebene fixieren wir den Kreisring $R_{10} \leq |w| \leq R_{10}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{1/K}$ und vergleichen ihn mit dem Bereiche $\mathfrak{L}_1$ (Fig. 3.).

$\{c\}$ sei die Familie aller geschlossenen glatten Jordanschen Kurven in der z-Ebene, die im Kreisringe $R_0 \leqq |z| \leqq R$ verlaufen und den Kreis $|z| < R_0$ in ihren Innengebieten enthalten. Die Kurven c der Familie $\{c\}$ füllen diesen Kreisring lückenlos aus. Die Bilder c' der Kurven c bei der Abbildung



Figur 3.

$z \to w = F(z)$ sind glatte Jordansche Kurven, die ihrerseits den Bereich $\mathfrak{L}_1$ lückenlos ausfüllen und die Kurve Γ_0' (also auch den Kreis $|w| = R_{10}$) in ihren Innengebieten enthalten. Nach Hilfssatz 8 ist

$$L\{c\} = \frac{2\pi}{\log(R/R_0)}$$

und nach Hilfssatz 6 gelten für die Extremallänge $L\{c'\}$ der Kurvenfamilie $\{c'\}$ die Ungleichungen:

$$\frac{1}{K}\,\frac{2\pi}{\log(R/R_0)} \leqq L\{c'\} \leqq K\,\frac{2\pi}{\log(R/R_0)}$$

(4) oder

$$\frac{2\pi}{\log\left[\left(\frac{R}{R_0}\right)^K\right]} \leqq L\{c'\} \leqq \frac{2\pi}{\log\left[(R/R_0)^{\frac{1}{K}}\right]}\,.$$

Mit Hilfe des Hilfssatzes 7 können wir nun zeigen, dass es nicht vorkommen kann, dass

$$\max_{|z|=R} |F(z)| < R_{10}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{1}{K}} \tag{5}$$

sei. Denn, wäre diese Ungleichung erfüllt, so würde das bedeuten, dass der Bereich $\mathfrak{L}_1$ ein echter Teil des Kreisringes $R_{10} \leqq |w| \leqq R_{10}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{1}{K}}$ ist und somit nach Hilfssatz 7 die Ungleichung

$$L\{c'\} > \frac{2\pi}{\log\left[\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{1}{K}}\right]} \tag{6}$$

gilt. (Die Voraussetzungen des Hilfssatzes 7 sind bei der Annahme (5) erfüllt, insbesondere wird das Infimum des Integrals $\iint\limits_{(R_0 \le |z| \le R)} \varrho^2 \, dx \, dy$ für einen Kreisring $R_0 \leqq |z| \leqq R$ durch die zulässige Funktion $\varrho = \dfrac{1}{2\pi |z|}$ verwirklicht.) Die erhaltene Ungleichung (6) steht aber im Widerspruch mit den (stets gültigen) Ungleichungen (4), es muss also für alle $R > R_0$

$$\operatorname*{Max}_{|z|=R} |F(z)| \geqq \frac{R_{10}}{R_0^{1/K}} \cdot R^{\frac{1}{K}} = \text{Const} \cdot R^{\frac{1}{K}}$$

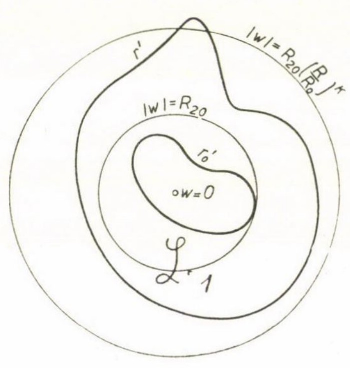
sein. Wenn man berücksichtigt, dass $|F(z)|^n = |f(z)|$ ist, so bedeutet dies, dass

$$\operatorname*{Max}_{|z|=R} |f(z)| \geqq C_1 R^{\frac{n}{K}} \tag{7}$$

wo C_1 eine Konstante ist. Damit ist die erste Ungleichung des Satzes 3 bewiesen.

Der Beweis der zweiten Ungleichung wird nach der gleichen Methode vollzogen, und zwar: Wir fixieren in der w-Ebene den Kreis mit dem Radius $R_{20}\left(\dfrac{R}{R_0}\right)^K$ und vergleichen den Kreisring $R_{20} \leqq |w| \leqq R_{20}\left(\dfrac{R}{R_0}\right)^K$ mit dem zweifach zusammenhängenden Bereiche $\mathfrak{L}_1$ (S. Fig. 4.). Wiederum folgt aus dem Hilfssatz 7, dass es nicht vorkommen kann, dass

$$\operatorname*{Min}_{|z|=R} |F(z)| > R_{20}\left(\frac{R}{R_0}\right)^K \tag{8}$$



Figur 4.

sei. Denn, wäre diese Ungleichung erfüllt, so würde dies bedeuten, dass der Kreisring $R_{20} \leqq |w| \leqq R_{20}\left(\dfrac{R}{R_0}\right)^K$ in echter Teil des Bereiches $\mathfrak{L}_1$ ist, die Menge aller glatten Jordanschen Kurven in diesem Kreisring, die den Kreis $|w| < R_{20}$ in ihren Innengebieten enthalten, wäre ein echter Teil der Menge aller Bildkurven c' (der Kurvenfamilie $\{c'\}$), und nachdem man verifiziert hat, dass sämtliche Voraussetzungen des Hilfssatzes 7 erfüllt sind (vorausgesetzt, dass die Ungleichung (8) gilt), würde man zu dem Ergebnis

$$L\{c'\} < \frac{2\pi}{\log\left[\left(\frac{R}{R_0}\right)^K\right]}$$

kommen, was mit den Ungleichungen (4) im Widerspruch steht. Es ist also für alle $R > R_0$

$$\operatorname*{Min}_{|z|=R} |F(z)| \leqq R_{20} \left(\frac{R}{R_0}\right)^K = \text{Const} \cdot R^K .$$

Wirderum folgt aus $|F(z)|^n = |f(z)|$, dass

$$\operatorname*{Min}_{|z|=R} |f(z)| \leqq C_2 R^{nK}$$

(wo C_2 eine Konstante ist)

Damit ist die Behauptung des Satzes 3 bewiesen.

Dieser Satz ist auf Klassen von komplexwertigen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, deren Realteil und Imaginärteil $u(x, y)$ und $v(x, y)$ (wo $z = x + iy$) einem gewissen System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typus genügen, anwendbar. Solche Funktionsklassen wurden von M. A. Lawrentjew [7], B. W. Schabat [8], L. Bers [9] und auch von anderen Verfassern untersucht (s. den Bericht von Künzi [10]). Unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen betreffs dieser Systeme kann man zeigen, dass ihre Lösungen $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ K-quasikonforme Funktionen sind. L. Bers kam auf die Idee, die Analoga von rationalen Funktionen in solchen Funktionsklassen zu betrachten, und hat bekannte Sätze der Funktionentheorie auf sie übertragen [9].

Es ist noch zu bemerken, dass die Exponenten n/K und nK in der Formulierung des Satzes 3 die »besten« sind (wenn man *alle* K-quasikonformen Funktionen, die die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllen, in Betracht zieht). Dies kann man aus folgenden Beispielen ersehen:

a) $f(z) = R^K \cdot e^{i\varphi}$; $(z = Re^{i\varphi})$ ist eine K-quasikonforme Funktion, die den Voraussetzungen des Satzes 3 genüge leistet. $\operatorname*{Min}_{|z|=R} |f(z)| = R^K$ (also $n = 1$. Natürlich ist gleichzeitig auch $\operatorname*{Max}_{|z|=R} |f(z)| = R^K$).

b) $f(z) = R^{1/K} \cdot e^{i\varphi}$; $(z = Re^{i\varphi})$ ist auch eine K-quasikonforme Funktion, auf welche der Satz 3 anwendbar ist und

$$\operatorname*{Max}_{|z|=R} |f(z)| = R^{\frac{1}{K}} \quad \left(\text{auch} \quad \operatorname*{Min}_{|z|=R} |f(z)| = R^{\frac{1}{K}}\right).$$

Man kann folgendermassen einsehen, dass z. B. $f(z) = R^K e^{i\varphi}$ eine K-quasikonforme Funktion von $z = Re^{i\varphi}$ ist. Wegen der zentralen Symmetrie der Abbildung $z \to R^K e^{i\varphi}$ können wir uns auf die Untersuchung der Umgebung eines Punktes $z = R \neq 0$ beschränken und in diesem Punkte das

Verhältnis der beiden Grössen

$$\left|\frac{df}{dz}\right|_{\varphi=0} \quad \text{und} \quad \left|\frac{df}{dz}\right|_{R=\text{Const}} \quad \text{bilden}$$

(die dann respektive gleich der grossen und der kleinen Halbachse der Ellipse (2) sind). Nun ist $\left|\frac{df}{dz}\right|_{\varphi=0} = \frac{d}{dR} R^{\mathrm{K}} = \mathrm{K} R^{\mathrm{K}-1}$

und

$$\left|\frac{df}{dz}\right|_{R=\text{Const}} = \lim_{\varphi\to 0}\left|\frac{R^{\mathrm{K}} e^{i\varphi} - R^{\mathrm{K}}}{Re^{i\varphi} - R}\right| = R^{\mathrm{K}-1}$$

woraus

$$\left|\frac{df}{dz}\right|_{\varphi=0} \Big/ \left|\frac{df}{dz}\right|_{R=\text{Const}} = K$$

folgt.

(Eingegangen: 5. Januar, 1962.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Lohwater, A. J.: „The Boundary Behaviour of a Quasi-Conformal Mapping." *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, **5** (1956) 335–342.

[2] Künzi, H. P.: „Quasikonforme Abbildungen". *Suomalaisen Tiedeakatemian Toimituksia*, Sarja A, I. Mathematica 249/2 (1958).

[3] Grötzsch, H.: „Über die Verzerrung bei schlichten nichtkonformen Abbildungen und über eine damit zusammenhängende Erweiterung des Picardschen Satzes". *Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften. Math. Phys. Klasse*, **80** (1928) 503–507.

[4] Ahlfors, L.—Beurling, A.: „Conformal invariants and function-theoretic null-sets." *Acta Math.* **83** (1950) 101–129.

[5] Pfluger, A.: „Extremallängen und Kapazität". *Comment. Math. Helv.* **29** (1955) 120–131.

[6] Hersch, J.: „Longueurs extrémales et théorie des fonctions". *Comment. Math. Helv.*, **29** (1955) 301–337.

[7] Лаврентьев, М. А.: „Общая задача теории квазиконформных отображений плоских областей". Матем. сб. **21** (1947) 285–320. (Übersetzung ins Ungarische: *A Magyar Tud. Akad. III. Osztályának Közleményei* **11** (1961) 179–223.)

[8] Шабат, Б. В.: „Об обобщенных решениях одной системы уравнений в частных производных", Матем. сб. **17** (59) (1945) 193–210.

[9] Bers, L.: „Partial differential equations and generalized analytic functions". *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U. S. A.* **36** (1950) 130–136.

[10] Künzi, H. P.: *Quasikonforme Abbildungen*. Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1960.

ОБ АНАЛОГАХ ЦЕЛЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ОБОБЩЕННЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО, II.

K. SZILÁRD

Резюме

Начало статьи см. в этом журнале, том VI., 1961, стр. 375—380.

Доказывается теорема 3: Пусть $w = f(z)$ является K-квазиконформной функцией (т. е., если $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, тогда существуют непрерывные частные производные u_x, u_y, v_x, v_y в области определения от $f(z)$, где $z = x + iy$ и отображение $z \to w$ K-квазиконформно с возможным исключением изолированных точек z) и пусть она определена для всех конечных значений z, где $|z| \geq \text{Const}$. Если $\lim\limits_{|z| \to \infty} |f(z)| = \infty$ равномерно, тогда существуют натуральное число n и три положительные постоянные C_1, C_2 и R_0 (зависящие от функции $f(z)$) такие, что для всех $R > R_0$ имеют место неравенства

$$\operatorname*{Max}_{|z|=R} |f(z)| \geq C_1 R^{n/K} \quad \text{и} \quad \operatorname*{Min}_{|z|=R} |f(z)| \leq C_2 R^{nK}.$$

В доказательстве автор пользуется свойствами «экстремальной длины» семейства кривых, введенной Альфорсом и Бёирлингом [4].

INFORMATIONSTHEORETISCHE KONVERGENZBEGRIFFE IM RAUM DER WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNGEN

von

I. CSISZÁR

Einleitung

Von Ju. W. LINNIK stammt der Gedanke, Grenzverteilungssätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Hilfe von informationstheoretischen Begriffen zu beweisen [1]. A. RÉNYI hat bemerkt (s. [2], [3]), dass das Wesen solcher Beweise darin besteht, dass man die Folge der relativen Informationen der betrachteten Verteilungen P_n bezüglich der Grenzverteilung P untersucht, und zeigt, dass diese Folge konvergent ist. Daraus schliesst man auf die Konvergenz der Verteilungen P_n gegen P. Dabei ist der Grenzwert der Folge der relativen Informationen immer gleich 0.

Darum scheint es zweckmässig zu sein, die Informationskonvergenz der Verteilungen zu definieren, und zwar durch die Konvergenz gegen 0 der relativen Informationen, und im allgemeinen zu untersuchen, ob die im gebräuchlichen Sinne genommene Konvergenz der Verteilungen aus der Informationskonvergenz folgt. Es werden in dieser Arbeit zwei Arte der Informationskonvergenz definiert, die als totale bzw. fast totale Informationskonvergenz bezeichnet werden. Es wird gezeigt, dass die fast totale Informationskonvergenz der gleichmässigen Konvergenz der Wahrscheinlichkeitsmasse äquivalent ist; um so mehr folgt die gleichmässige Konvergenz der Masse aus der totalen Informationskonvergenz (Satz 3). Dieser Satz kann als eine allgemeine Begründung der Anwendbarkeit der Informationstheorie für den Beweis von Grenzverteilungssätzen angesehen werden. Es wird auch auf eine Möglichkeit hingewiesen, die gleichmässige Konvergenz einer Verteilungsfolge auch dann informationstheoretisch beweisen zu können, wenn die Grenzverteilung im voraus nicht bekannt ist (Satz 4). Diese Sätze werden mit Hilfe von einem auch an sich interessanten Lemma bewiesen, das sich auf die Stabilitätsfrage der Jensenschen Ungleichung bezieht.

Zum Abschluss wird untersucht, ob die definierten informationstheoretischen Konvergenzbegriffe aus einer Topologie herleitbar sind. Als ein Nebenresultat ergibt sich, dass sich die sogenannte J-Divergenz der Ordnung $\alpha \geq 1$ mit keiner, im Intervalle $[0, +\infty]$ definierten, im Ursprung stetigen Funktion $f(u)$ so transformieren lässt, dass $f(J_\alpha(P, Q))$ eine Entfernung im Raum der Verteilungen sei, selbst wenn die Menge der in Betracht kommenden Verteilungen bedeutend beschränkt wird.

§ 1. Die relative Information der Ordnung α und die zugehörigen Konvergenzbegriffe im Raum der Verteilungen

Wir benützen den von A. RÉNYI eingeführten Begriff der Information der Ordnung α ([2], [3]).

Für zwei endliche Verteilungen $P = (p_1, \ldots, p_n)$, $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ ist die relative Information von P bezüglich Q der Ordnung α $(\alpha > 0)$ durch

$$(1) \quad \begin{aligned} I_\alpha(P \| Q) &= \frac{1}{\alpha - 1} \log \sum_{k=1}^{n} p_k^\alpha q_k^{1-\alpha} \qquad (\alpha \neq 1) \\ I_1(P \| Q) &= \lim_{\alpha \to 1} I_\alpha(P \| Q) = \sum_{k=1}^{n} p_k \log \frac{p_k}{q_k} \end{aligned}$$

definiert.[1]

Falls P und Q zwei beliebige, auf einem messbaren Raum (X, S) gegebene Verteilungen (Wahrscheinlichkeitsmasse) sind, so setzen wir für $\alpha > 0$

$$(2) \quad \begin{aligned} I_\alpha(P \| Q) &= \frac{1}{\alpha - 1} \log \int p^\alpha(x) q^{1-\alpha}(x) \, d\lambda(x) \qquad (\alpha \neq 1) \\ I_1(P \| Q) &= \int p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} \, d\lambda(x) \end{aligned}$$

wo λ ein solches (σ-endliches) Mass ist, dass P und Q beide absolut stetig in bezug auf λ sind und $p(x)$ bzw. $q(x)$ die Radon-Nikodymschen Ableitungen von P bzw. Q bezüglich λ bedeuten.[2] (Das Zeichen $\int$ ohne Angabe des Integrationsbereiches bedeutet das Integral über dem ganzen Raum X). Es ist leicht zu sehen, dass ein solches λ immer existiert und dass der Wert des Integrals von der Wahl von λ unabhängig ist.

Im folgenden wählen wir, falls es sich um eine abzählbare Menge von Verteilungen (Wahrscheinlichkeitsmassen) handeln wird, das σ-endliche Mass λ immer so, dass alle gegebene Verteilungen absolut stetig in bezug auf λ seien. (Das ist bekanntlicherweise immer möglich, z.B. falls die gegebenen Verteilungen $P_1, P_2, \ldots$ sind, kann man $\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} P_n$ setzen). Die Verteilungen werden mit P, Q, R bezeichnet (falls nötig, mit Indizes) und ihre Dichtefunktionen, d.h. die Radon-Nikodymschen Ableitungen bezüglich λ mit $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ (mit den entsprechenden Indizes).

Wir möchten die Bemerkung machen, dass aus der Definition von $I_\alpha(P \| Q)$ folgt, dass $I_\alpha(P \| Q)$ im Falle $\alpha \geqq 1$ nur dann endlich sein kann, falls $P \ll Q$ ist. Für $0 < \alpha < 1$ ist jedoch $I_\alpha(P \| Q)$ immer endlich, mit Ausnahme des Falles $P \perp Q$.

Die Definition (2) ist eine natürliche Verallgemeinerung von (1). Wenn wir nämlich für eine Darstellung $\mathscr{A}$ von X in der Form $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ($A_i \in S$;

[1] Es ist nur eine Frage der Wahl der Einheit der Information, mit welcher Basiszahl hier der Logarithmus zu nehmen ist. Es ist in der Informationstheorie gebräuchlich, den Logarithmus mit der Basis 2 zu benützen. Für unsere Zwecke ist es jedoch nützlicher, den natürlichen Logarithmus zu nehmen. Also wird das log in dieser Arbeit immer den Logarithmus mit der Basis e bedeuten.

[2] Im Falle $q = 0$ wird unter $p \log \frac{p}{q}$ und $p^\alpha q^{1-\alpha}$ $(\alpha > 1)$ 0 bzw. $+\infty$ verstanden, je nachdem ob $p = 0$ bzw. $p > 0$ ist.

$A_i \cap A_j = 0$ für $i \neq j$) $P_{\mathcal{A}} = (P(A_1), \ldots, P(A_n))$, $Q_{\mathcal{A}} = (Q(A_1), \ldots, Q(A_n))$ setzen, gilt

(3) $$I_\alpha(P \| Q) = \sup_{\mathcal{A}} I_\alpha(P_{\mathcal{A}} \| Q_{\mathcal{A}}) .$$

Diese Tatsache ist für $\alpha = 1$ wohlbekannt, vgl. z. B. A. PÉREZ [4] und auch G. KALLIANPUR [5]; für den allgemeinen Fall kann sie ähnlicherweise bewiesen werden, z. B. ergibt Satz 5 der Arbeit [5], mit $f(u) = -u^\alpha$ für $0 < \alpha < 1$ bzw. $f(u) = u^\alpha$ für $\alpha > 1$, dass für $0 < \alpha < 1$

$$\sup_{\mathcal{A}} \left(-\sum P^\alpha(A_k)\, Q^{1-\alpha}(A_k)\right) = -\int \left(\frac{dP_1}{dQ}\right)^\alpha dQ$$

bzw. für $\alpha > 1$

$$\sup_{\mathcal{A}} \sum P^\alpha(A_k)\, Q^{1-\alpha}(A_k) = \begin{cases} +\infty & \text{falls } P \ll Q \text{ nicht gilt} \\ \displaystyle\int \left(\frac{dP}{dQ}\right)^\alpha dQ & \text{falls } P \ll Q \end{cases}$$

gilt, wobei P_1 die in bezug auf Q absolut stetige Komponente von P ist. Diese Relationen sind mit (3) gleichbedeutend.

Die relative Information $I_\alpha(P \| Q)$ ist ein informationstheoretisches Mass der Verschiedenheit der Verteilungen P und Q. Sie ist immer nichtnegativ und $I_\alpha(P \| Q) = 0$ besteht nur im Falle $P = Q$, was ein Spezialfall der Ungleichung (6) ist.

Darum ist die folgende Definition natürlich:

Definition 1. Eine Verteilungsfolge $\{P_n\}$ konvergiert in Information der Ordnung α gegen die Verteilung P, falls

(4) $$\lim_{n \to \infty} I_\alpha(P_n \| P) = 0$$

ist. Dieser Konvergenzbegriff wird die totale Informationskonvergenz der Ordnung α genannt.

Falls $X' \in S$ eine Teilmenge von X mit $P(X') > 0$ ist, kann die relative Information von P bezüglich Q auf X' durch

(5) $$I_\alpha(P \| Q\,;X') = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - 1} \log \dfrac{1}{P(X')} \displaystyle\int_{X'} p^\alpha(x)\, q^{1-\alpha}(x)\, d\lambda(x) & \text{für } \alpha \neq 1 \\ \dfrac{1}{P(X')} \displaystyle\int_{X'} p(x) \log \dfrac{p(x)}{q(x)}\, d\lambda(x) & \text{für } \alpha = 1 \end{cases}$$

definiert werden. Es ist natürlich $I_\alpha(P \| Q; X) = I_\alpha(P \| Q)$. (Auf X' sind P und Q im allgemeinen unvollständige Verteilungen; Gleichung (5) entsteht durch die Anwendung der Definition der relativen Information — Informationsgewinn — für unvollständige Verteilungen, gegeben von A. RÉNYI, s. [2], [3].)

Es besteht immer

(6) $$I_\alpha(P \| Q\,;X') \geqq \log \frac{P(X')}{Q(X')}$$

mit der Gleichheit nur im Falle $Q = cP$ auf X' $\left(\text{wobei } c = \dfrac{Q(X')}{P(X')} \text{ ist}\right)$ was eine Folge der Jensenschen Ungleichung ist. In der Tat, da die Funktion $u^{1-\alpha}$ für $0 < \alpha < 1$ konkav, für $\alpha > 1$ konvex ist, erhalten wir mit der Bezeichnung $X'' = X' \cap \{x : p(x) > 0\}$

$$
\begin{aligned}
(7) \quad & \frac{1}{P(X')} \int_{X'} p^\alpha q^{1-\alpha}\, d\lambda = \frac{1}{\int_{X''} p\, d\lambda} \int_{X''} \left(\frac{q}{p}\right)^{1-\alpha} p\, d\lambda \leqq \\
& \leqq \left(\frac{\int_{X''} q\, d\lambda}{\int_{X''} p\, d\lambda}\right)^{1-\alpha} \leqq \left(\frac{Q(X')}{P(X')}\right)^{1-\alpha} = \left(\frac{P(X')}{Q(X')}\right)^{\alpha-1} \quad \text{für} \quad 0 < \alpha < 1
\end{aligned}
$$

und ähnlicherweise

$$
(8) \qquad \frac{1}{P(X')} \int_{X'} p^\alpha q^{1-\alpha}\, d\lambda \geqq \left(\frac{P(X')}{Q(X')}\right)^{\alpha-1} \qquad \text{für } \alpha > 1 .
$$

Endlich gilt, da die Funktion $-\log u$ konvex ist,

$$
\begin{aligned}
(9) \quad & \frac{1}{P(X')} \int_{X'} p \log \frac{p}{q}\, d\lambda = \frac{1}{\int_{X''} p\, d\lambda} \int_{X''} \left(-\log \frac{q}{p}\right) p\, d\lambda \geqq \\
& \geqq -\log \frac{\int_{X''} q\, d\lambda}{\int_{X''} p\, d\lambda} \geqq -\log \frac{Q(X')}{P(X')} = \log \frac{P(X')}{Q(X')} .
\end{aligned}
$$

In (7), (8), (9) bestehen die Gleichheiten nur dann, falls erstens auf X'' $q = cp$ (mit konstantem c) und zweitens auf $X' - X''$ $q = 0$ ist (fast überall bezüglich λ), also falls auf X' $Q = cP$ gilt.

Die Ungleichungen (7), (8), (9) geben nach der Definition von $I_\alpha(P \| Q ; X')$ — Gleichung (5) — gerade (6), und man sieht auch, dass die Gleihheit in (6) nur dann besteht, falls auf X' $Q = cP$ gilt, mit $c = \frac{Q(X')}{P(X')}$.

Es seinen nun $P_1, P_2, \ldots$ Verteilungen auf (X, S), $X_1, X_2, \ldots$ Teilmengen von X $(X_n \in S)$ mit $P_n(X_n) \to 1$ für $n \to \infty$. Dann ist aus (6) ersichtlich, dass

$$
(10) \qquad \varliminf_{n \to \infty} I_\alpha(P_n \| Q ; X_n) \geqq 0 ,
$$

für beliebige Verteilung Q auf (X, S).

Definition 2. Wir sagen, dass eine Folge $\{P_n\}$ der auf (X, S) gegebenen Verteilungen in Information der Ordnung α im fast totalen Sinne gegen die Verteilung P strebt, falls eine solche Folge $\{X_n\}$ der Teilmengen von X $(X_n \in S)$ gegeben werden kann, dass

$$
(11) \qquad \lim_{n \to \infty} P_n(X_n) = 1
$$

$$
(12) \qquad \lim_{n \to \infty} I_\alpha(P_n \| P ; X_n) = 0
$$

gilt.

Bemerkung 1. Aus (11) und (12) folgt nach (6) auch

$$
(13) \qquad \lim_{n \to \infty} P(X_n) = 1 .
$$

Dagegen können (12) und (13) bestehen, ohne dass (11) gilt. Es sei z.B. $X = [0, 1]$, P das Lebesguesche Mass, und Q sei durch $Q(A) = P(A)$ für $A \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $Q(\{1\}) = \frac{1}{2}$ definiert. Setzen wir $X_n = \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$, $P_n = Q$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Dann gilt

$$P(X_n) = 1 - \frac{1}{n} \to 1 \qquad \text{für } n \to \infty \quad \text{und}$$

$$I_\alpha(P_n \| P\,; X_n) = I_\alpha\left(P_n \| P\,; \left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

dagegen ist

$$\lim_{n \to \infty} P_n(X_n) = \frac{1}{2} \neq 1\,.$$

Bemerkung 2. Falls (11) und (12) bestehen, dann gilt für die durch $Q_n(A) = \dfrac{P_n(A \cap X_n)}{P_n(X_n)}$ definierte Verteilungsfolge $\{Q_n\}$

$$I_\alpha(Q_n \| P) \to 0, \quad \sup_{A \in S} |Q_n(A) - P_n(A)| \to 0 \qquad (n \to \infty) \tag{14}$$

wie es leicht nachzuweisen ist.

Also lässt sich zu jeder im Sinne der fast totalen Informationskonvergenz der Ordnung α konvergenten Verteilungsfolge $\{P_n\}$ eine im Sinne der totalen Informationskonvergenz derselben Ordnung gegen dieselbe Grenzverteilung strebende Verteilungsfolge $\{Q_n\}$ finden, für die $\sup_{A \in S} |Q_n(A) - P_n(A)| \to 0$ $(n \to \infty)$ gilt. Darum könnte man vermuten, dass man einen schwächeren Konvergenzbegriff erhalten kann, als den der fast totalen Informationskonvergenz, indem man anstatt (11) und (12) nur die Existenz einer Verteilungsfolge $\{Q_n\}$ mit den Eigenschaften (14) voraussetzt. In der Wirklichkeit ist aber der dadurch erhaltene Konvergenzbegriff dem fast totalen äquivalent, wie es im folgenden Paragraphen gezeigt wird.

Bemerkung 3. Es ist nicht ganz trivial, dass eine Verteilungsfolge $\{P_n\}$ im Sinne der Definition 2 (oder gerade im Sinne der Definition 1) nicht gegen zwei verschiedene Verteilungen konvergieren kann. Dass diese Behauptung doch richtig ist, folgt am einfachsten aus § 2 Satz 3.

Der Einfachheit halber wird in den folgenden das Integral in der Definition von $I_\alpha(P\|Q)$ bzw. $I_\alpha(P\|Q;\, X')$ mit $\mathcal{J}_\alpha(P, Q)$ bzw. $\mathcal{J}_\alpha(P, Q;\, X')$ bezeichnet,[3] also

$$\mathcal{J}_\alpha(P, Q\,;\, X') = \begin{cases} \displaystyle\int_{X'} p^\alpha q^{1-\alpha}\, d\lambda & \text{für } \alpha \neq 1 \\ \displaystyle\int_{X'} p \log \frac{p}{q}\, d\lambda & \text{für } \alpha = 1 \end{cases} \qquad \mathcal{J}_\alpha(P, Q) = \mathcal{J}_\alpha(P, Q\,;\, X)\,. \tag{15}$$

[3] Hier ist $\mathcal{J}_\alpha(P, Q) = e^{(\alpha-1)I_\alpha(P\|Q)}$ $(\alpha \neq 1)$ aber $\mathcal{J}_1(P, Q) = I_1(P \| Q)$; man darf also nicht erwarten, dass die zur Vereinfachung der Berechnungen eingeführten Grössen $\mathcal{J}_\alpha(P, Q)$ bzw. $\mathcal{J}_\alpha(P, Q;\, X')$ so ein einheitliches Verhalten zeigen, wie die Informationen selbst. Man kann aber immer von den Integralen zu den Informationen selbst zurückkehren.

Mit dieser Bezeichnung kann die totale bzw. fast totale Informationskonvergenz der Ordnung α einer Verteilungsfolge $\{P_n\}$ gegen die Verteilung P durch

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_\alpha(P_n, P) = \mathcal{I}_\alpha(P, P) = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha \neq 1 \\ 0 & \text{für } \alpha = 1 \end{cases} \tag{4'}$$

bzw. durch (11) und

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_\alpha(P_n, P\,; X_n) = \mathcal{I}_\alpha(P, P) \tag{12'}$$

charakterisiert werden.

Im Falle $0 < \alpha < 1$ bedeutet die fast totale Informationskonvergenz keine Verallgemeinerung des Begriffes der totalen Informationskonvergenz. In der Tat, da für $0 < \alpha < 1$ nach (6)

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\alpha(P_n, P; X - X_n) &= \int\limits_{X-X_n} p_n^\alpha\, p^{1-\alpha}\, d\lambda \leq P_n(X - X_n)\left(\frac{P_n(X - X_n)}{P(X - X_n)}\right)^{\alpha-1} = \\ &= P_n^\alpha(X - X_n)\, P^{1-\alpha}(X - X_n) \end{aligned} \tag{16}$$

besteht (streng genommen ist die Ungleichung (6) nur im Falle $P_n(X - X_n) \neq 0$ anwendbar, aber (16) ist trivialerweise auch für $P_n(X - X_n) = 0$ gültig), folgt aus (11) $\mathcal{I}_\alpha(P_n, P; X - X_n) \to 0$ für $n \to \infty$.

Also falls (11) und (12′) bestehen, gilt wegen

$$\mathcal{I}_\alpha(P_n, P) = \mathcal{I}_\alpha(P_n, P\,; X_n) + \mathcal{I}_\alpha(P_n, P\,; X - X_n)$$

auch (4′). Das bedeutet, dass im Falle $0 < \alpha < 1$ die totale und fast totale Informationskonvergenz der Ordnung α miteinander äquivalent sind. Im Falle $\alpha \geqq 1$ ist jedoch dies nicht mehr der Fall; eine Folge $\{P_n\}$ kann in Information der Ordnung α im fast totalen Sinne sogar dann gegen eine Grenzverteilung P streben, wenn $I_\alpha(P_n, P) = +\infty$ für $n = 1, 2, \ldots$ ist.

Ein Beispiel: es sei wieder $X = [0,1]$, P das Lebesguesche Mass, und P_n sei durch $P_n(A) = P(A)$ für $A \subset \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$, $P_n(\{1\}) = \frac{1}{n}$ definiert. Dann ist für $X_n = \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(X_n) = 1$ und $I_\alpha(P_n \| P; X_n) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, dagegen ist im Falle $\alpha \geqq 1$ $I_\alpha(P_n \| P) = +\infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

§ 2. Die Informationskonvergenz und die anderen Konvergenzbegriffe im Raum der Verteilungen

Bekanntlicherweise gibt es verschiedene Konvergenzbegriffe im Raume der Verteilungen, die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung benützt werden.

Die sogenannte schwache Konvergenz wird im allgemeinen folgendermassen definiert:

$$P_n \Rightarrow P \text{ falls } \int f(x)\, dP_n(x) \to \int f(x)\, dP(x) \tag{a}$$

für jede beschränkte, stetige Funktion $f(x)$ auf X (diese Definition hat natürlich nur dann einen Sinn, wenn in X eine Topologie — oder wenigstens eine verallgemeinerte Topologie, s. [6] — gegeben ist).

In den praktisch vorkommenden Fällen ist (a) mit

(a′) $P_n(E) \to P(E)$ für jede Stetigkeitsmenge E des Masses P äquivalent (eine Menge A heisst eine Stetigkeitsmenge des Masses μ, falls das μ-Mass der Grenze von A gleich 0 ist).

Ein etwas stärkerer Konvergenzbegriff ergibt sich, falls in (a) die Relation $\int f(x)dP_n(x) \to \int f(x)dP(x)$ für jede beschränkte messbare Funktion $f(x)$ auf (X, S) erfordert wird. Diese Konvergenzart, die auch manchmal schwache Konvergenz genannt wird, kann auch durch

(b) $$P_n(E) \to P(E) \quad \text{für jedes} \quad E \in S$$

definiert werden.

Ein noch stärkeres Konvergenztyp ist die gleichmässige Konvergenz der Masse aller Mengen $E \in S$:

(c) $$\sup_{E \in S} |P_n(E) - P(E)| \to 0 .$$

Ein scheinbar vierter Konvergenzbegriff ist derjenige erzeugt durch den Abstand[4]

(17) $$\varrho(P, Q) = |P - Q|(X) .$$

Dieser ist aber der gleichmässigen Konvergenz äquivalent, da wegen

$$(P - Q)(X) = P(X) - Q(X) = 0$$

$$\sup_{E \in S} (P - Q)(E) = (P - Q)^+(X) = (P - Q)^-(X) = \sup_{E \in S} (Q - P)(E)$$

gilt, also besteht besteht die folgende Relation (auf welche mich J. Fischer aufmerksam machte):

(18) $$\begin{aligned} \sup_{E \in S} |P(E) - Q(E)| &= (P - Q)^+(X) = (P - Q)^-(X) = \\ &= \frac{1}{2}[(P-Q)^+(X) + (P - Q)^-(X)] = \frac{1}{2}|P - Q|(X) . \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass (c) mit

(c′) $$\varrho(P_n, P) = |P_n - P|(X) \to 0$$

gleichwertig ist. Da ferner $|P - Q|(X) = \int |p - q| d\lambda$ ist, erhalten wir auch, dass die gleichmässige Konvergenz der Masse der L_1-Konvergenz ihrer Dichtefunktionen äquivalent ist, also der Relation

(c″) $$\int |p_n - p| d\lambda \to 0 .$$

In diesem Paragraphen wird gezeigt, dass die in § 1 definierte fast totale Informationskonvergenz (beliebiger Ordnung) der gleichmässigen Konvergenz der Verteilungen äquivalent ist, und um so mehr folgt aus der totalen Informationskonvergenz die gleichmässige Konvergenz der Verteilungen.

[4] Für eine vollständig additive Mengenfunktion ϑ auf (X, S) wird mit ϑ^+, ϑ^- bzw. $|\vartheta|$ die obere, untere, bzw. Totalvariation von ϑ bezeichnet. Diese sind bekanntlicherweise Masse auf (X, S), $\vartheta = \vartheta^+ - \vartheta^-$, $|\vartheta| = \vartheta^+ + \vartheta^-$. (Siehe z. B. [7].)

Wir brauchen das folgende Lemma, das auch an sich interessant ist.

Lemma. *Es sei $f(u)$ eine von unten streng konvexe Funktion, definiert im (endlichen oder unendlichen) Intervall $[a, b]$. Es bezeichne $g(x)$ eine auf einem messbaren Raum (X, S) definierte messbare Funktion mit Werten im Intervalle $[a, b]$, und μ ein Wahrscheinlichkeitsmass auf (X, S).*

Dann kann zu jedem $a < A < b$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ eine solche, nur von f, A und ε_1 abhängende positive Zahl η gewählt werden, dass aus

$$\int g(x)\,d\mu(x) = A + \delta_1, \quad \int f(g(x))\,d\mu(x) = f(A) + \delta_2 \tag{19}$$

mit

$$\delta_2 - D\delta_1 \leqq \eta\varepsilon_2 \tag{20}$$

die Ungleichung

$$\mu\{x : |g(x) - A| > \varepsilon_1\} < \varepsilon_2 \tag{21}$$

folgt, wobei D eine zwischen der rechtseitigen und linksseitigen Ableitung von $f(u)$ im Punkte $u = A$ liegende, sonst aber beliebige reelle Zahl ist. (Falls $f'(A)$ existiert, ist also $D = f'(A)$.)

Falls $f(u)$ in der ε_1-Umgebung von A zweimal differenzierbar ist und hier $f''(u) \geqq \alpha > 0$ gilt, so kann man $\eta = \dfrac{\alpha}{2}\varepsilon_1^2$ setzen, also besteht dann im Falle (19) *und*

$$\delta_2 - f'(A)\,\delta_1 \leqq \frac{\alpha}{2}\varepsilon_1^2\,\varepsilon_2 \tag{20'}$$

die Ungleichung (21).

Bemerkung. Die Behauptung des Lemmas kann folgendermassen interpretiert werden: falls in der Jensenschen Ungleichung $\int f(g(x))\,d\mu(x) \geqq \geqq f(\int g(x)\,d\mu(x))$ annähernd die Gleichheit besteht, so ist $g(x)$ einer Konstanten nahe, im Sinne des zur Konvergenz im Masse gehörenden Abstandsbegriffes.

Beweis des Lemmas. Bezeichnen wir den Graph der Funktion $v = f(u)$ mit G. Die Abbildung $Tx = (g(x), f(g(x)))$ definiert eine Massenverteilung μT^{-1} auf der Kurve G. Für die Koordinaten u_s, v_s des Schwerpunktes S dieser Massenverteilung gilt nach (19)

$$u_s = A + \delta_1 \quad v_s = f(A) + \delta_2\,. \tag{22}$$

Bezeichnen wir (s. Abb. 1) den Punkt $(A, f(A))$ mit P und die durch P mit der Richtungstangente D gezogene Gerade mit e. Dann liegt die Kurve G wegen ihrer Konvexität über der Geraden e, die zwischen der rechtseitigen und linksseitigen Tangente von G im Punkte P liegt. (Falls G im Punkte P eine Tangente hat, so muss e natürlich mit dieser identisch sein).

Es sei h eine mit e parallele Sehne von G, so dass für die Abszissen u_1, u_2 der Endpunkten von h

$$A - \varepsilon_1 \leqq u_1 < A < u_2 \leqq A + \varepsilon_1 \tag{23}$$

gilt. Der vertikal gemessene Abstand von h und e sei mit η bezeichnet.

Ist m das Gewicht (uT^{-1}-Mass) des über der Sehne h liegenden Teiles der Kurve G, und ist $m > 0$, so liegt der Schwerpunkt S von G sicherlich über derjenigen mit e parallelen Geraden f, deren vertikaler Abstand von e $m\eta$ ist (ausgenützt, dass das Gewicht der ganzen Kurve G $\mu T^{-1}(G) = \mu(X) = 1$ ist). Der vertikale Abstand des Schwerpunktes S von der Geraden e ist aber nach (22) gleich $\delta_2 - D\delta_1$. Es gilt also

$$\delta_2 - D\delta_1 > m\eta \qquad \text{(falls } m > 0\text{)}$$

infolge dessen muss im Falle $\delta_2 - D\,\delta_1 \leqq \eta\varepsilon_2$ unbedingt

$$m = \mu\{x : g(x) < u_1 \quad \text{oder} \quad g(x) > u_2\} < \varepsilon_2 \tag{24}$$

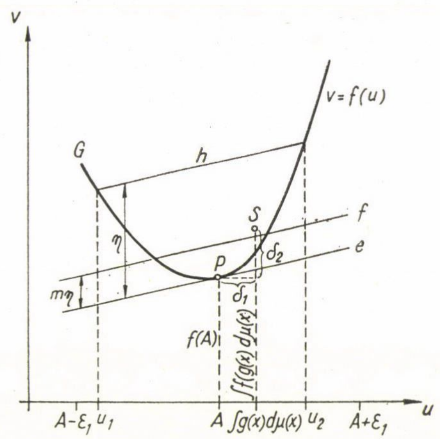


Abb. 1.

sein. Diese Ungleichung besteht trivialerweise auch im Falle $m = 0$. Das zeigt schon die Richtigkeit der ersten Behauptung des Lemmas, mit der obigen Wahl von η, da wegen (23)

$$\mu\{x : |g(x) - A| > \varepsilon_1\} \leqq \mu\{x : g(x) < u_1 \quad \text{oder} \quad g(x) > u_2\} = m$$

ist.

Gilt nun im Intervall $(A - \varepsilon_1, A + \varepsilon_1)$ $f''(u) \geqq a > 0$, so kann die Sehne h mit der Eigenschaft (23) so gezogen werden, dass ihr vertikaler Abstand vom Punkte P gleich $\frac{a}{2}\varepsilon_1^2$ sei. Um das zu zeigen, bestimmen wir die Zahlen b und c so, dass die Parabel $v = \frac{a}{2}u^2 + bu + c$ die Gerade e im Punkte P berühre. Dann liegt diese Parabel in $[A - \varepsilon_1, A + \varepsilon_1]$ unter der Kurve G, da im Inneren dieses Intervalls $v''(u) = a \leqq f''(u)$ und im Punkte $u = A$ $v(A) = f(A)$, $v'(A) = D = f'(A)$ ist. Verschieben wir die Gerade e um $\frac{a}{2}\varepsilon_1^2$ nach oben. Eine einfache Berechnung zeigt, dass die verschobene Gerade e' die Parabel $v = \frac{a}{2}u^2 + bu + c$ in den Punkten mit den Abszissen $A - \varepsilon_1$

bzw. $A + \varepsilon_1$ schneidet. Daraus folgt – da die Parabel in $[A - \varepsilon_1, A + \varepsilon_1]$ unter der Kurve G liegt – dass $h = e'$ die Bedingung (23) erfüllt.

Das bedeutet, dass man jetzt in der Ungleichung (20) $\eta = \frac{a}{2}\varepsilon_1^2$ setzen kann, wodurch sie wegen $D = f'(A)$ in (20′) übergeht.

Damit ist das Lemma vollständig bewiesen.

Satz 1. *Falls für zwei auf einem messbaren Raum (X, S) gegebene Verteilungen P und Q und eine Teilmenge $X' \in S$ von X mit einem $\alpha > 0$ und $0 < \varepsilon < 1$*

$$(25)\qquad \begin{aligned} 1 - \mathcal{I}_\alpha(P, Q; X') &= \delta && \textit{falls } 0 < \alpha < 1 \\ \mathcal{I}_\alpha(P, Q; X') &= \delta && \textit{falls } \alpha = 1 \\ \mathcal{I}_\alpha(P, Q; X') - 1 &= \delta && \textit{falls } \alpha > 1 \end{aligned}$$

und

$$(26)\qquad P(X') = 1 - \delta'$$

besteht, wobei

$$(27)\qquad \begin{aligned} \delta - \delta'\alpha &\leqq \frac{\alpha(1-\alpha)(1-\varepsilon)^{2-\alpha}}{2}\varepsilon^3 && \textit{für } 0 < \alpha < 1 \\ \delta + \delta' &\leqq \frac{1-\varepsilon}{2}\varepsilon^3 && \textit{für } \alpha = 1 \\ \delta + \delta'\alpha &\leqq \frac{\alpha(\alpha-1)(1-\varepsilon)^{|2-\alpha|}}{2}\varepsilon^3 && \textit{für } \alpha > 1, \end{aligned}$$

dann gilt

$$(28)\qquad \sup_{A\in S}|P(A) - Q(A)| = \frac{1}{2}|P - Q|(X) < 2\varepsilon\,.$$

Beweis. Setzen wir

$$f_\alpha(u) = \begin{cases} -u^\alpha & \text{für } 0 < \alpha < 1 \\ u\log u & \text{für } \alpha = 1 \\ u^\alpha & \text{für } \alpha > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{p(x)}{q(x)} & \text{für } x \in X', q(x) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $f_\alpha(u)$ in $[0, +\infty]$ von unten streng konvex, und $g(x) \in [0, +\infty]$ für jedes $x \in X$.

Es gilt (mit der Bezeichnung $E = \{x : q(x) = 0\}$)

$$(29)\qquad \int g(x)\,dQ = \int\limits_{X'-E} \frac{p}{q}\,q\,d\lambda = P(X' - E) = 1 - \delta^+$$

wobei wegen (26) $\delta^+ \geqq \delta'$ ist. Im Falle $\alpha \geqq 1$ muss $\delta^+ = \delta'$ sein, da auf $E \cap X'$ wegen der Endlichkeit von $\mathcal{I}_\alpha(P, Q; X')$ mit $q(x)$ auch $p(x)$ gleich 0 sein muss, in diesem Falle ist also $P(X' - E) = P(X')$.

Es gilt ferner nach (25), unter Berücksichtigung, dass im Falle $\alpha \geqq 1$ auf $X' - E$ $p(x) = q(x) = 0$ ist,

$$\int f_\alpha(g(x))\, dQ = \pm \mathcal{I}_\alpha(P, Q\,; X' - E) = \pm \mathcal{I}_\alpha(P, Q\,; X') = f_\alpha(1) + \delta \tag{30}$$

(wobei das positive bzw. negative Vorzeichen im Falle $\alpha \geqq 1$ bzw. $0 < \alpha < 1$ gültig ist).

Nach (29) und (30) ist das Lemma mit $\mu = Q$, $\delta_1 = -\delta^+$, $\delta_2 = \delta$ anwendbar. Es ist

$$f'_\alpha(1) = \begin{cases} -\alpha & \text{für} \quad 0 < \alpha < 1 \\ 1 & \text{für} \quad \alpha = 1 \\ \alpha & \text{für} \quad \alpha > 1 \end{cases}$$

und im Intervall $1 - \varepsilon < u < 1 + \varepsilon$

$$f''(u) \geqq \begin{cases} \alpha\,|\alpha - 1|\,(1 - \varepsilon)^{|\alpha - 2|} & \text{für} \quad \alpha \neq 1 \\ 1 - \varepsilon & \text{für} \quad \alpha = 1 \end{cases}$$

also ist wegen (27) für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ die Ungleichung (20') erfüllt, berücksichtigend, dass $\delta^+ \geqq \delta'$ ist, wobei im Falle $\alpha \geqq 1$ die Gleichheit besteht. Es gilt also nach dem Lemma

$$Q\{x : |g(x) - 1| > \varepsilon\} < \varepsilon\,. \tag{31}$$

Es sei

$$H(\varepsilon) = \{x : |p(x) - q(x)| > \varepsilon\, q(x)\}\,. \tag{32}$$

Dann ist wegen $0 < \varepsilon < 1$ $H(\varepsilon) \subset \{x : |g(x) - 1| > \varepsilon\}$, gilt also nach (31)

$$Q(H(\varepsilon)) < \varepsilon\,. \tag{33}$$

Da auf der Menge $X - H(\varepsilon)$ nach (32) $p(x) \geqq (1 - \varepsilon)\, q(x)$ ist, gilt auch

$$\begin{aligned} P(H(\varepsilon)) &= 1 - P(X - H(\varepsilon)) = 1 - \int_{X - H(\varepsilon)} p(x)\, d\lambda(x) \leqq \\ &\leqq 1 - \int_{X - H(\varepsilon)} (1 - \varepsilon)\, q(x)\, d\lambda(x) = 1 - (1 - \varepsilon)\, Q(X - H(\varepsilon)) = \\ &= Q(H(\varepsilon)) + \varepsilon\, Q(X - H(\varepsilon)) < 2\varepsilon\,, \end{aligned} \tag{34}$$

wobei die letzte Ungleichung aus (33) folgt.

Unter Berücksichtigung von (32), (33) und (34) erhalten wir

$$\begin{aligned} \varrho(P, Q) &= |P - Q|\,(X) = \int |p - q|\, d\lambda = \\ &= \int_{X - H(\varepsilon)} |p - q|\, d\lambda + \int_{H(\varepsilon)} |p - q|\, d\lambda \leqq \int_{X - H(\varepsilon)} \varepsilon\, q\, d\lambda + \int_{H(\varepsilon)} (p + q)\, d\lambda = \\ &= \varepsilon\, Q(X - H(\varepsilon)) + P(H(\varepsilon)) + Q(H(\varepsilon)) < 4\varepsilon\,, \end{aligned} \tag{35}$$

wodurch Satz 1 bewiesen ist (mit Rücksicht auf Gleichung (18)).

Der bewiesene Satz kann auch auf eine solche, wenn auch etwas schwächere Form gebracht werden, aus der das einheitliche Verhalten der Informationen verschiedener Ordnung ersichtlich wird, indem man die Bedingung (25) durch eine solche ersetzt, die sich anstatt $\mathcal{I}_\alpha(P, Q; X')$ auf $I_\alpha(P\|Q; X')$ selbst bezieht.

Satz 2. *Bei beliebigem* $\alpha > 0$ *kann zu jedem* $\eta > 0$ *ein solches* $\varepsilon_\alpha(\eta) > 0$ *gewählt werden, dass aus*

$$P(X') \geqq 1 - \delta_1, \quad I_\alpha(P \| Q\,; X') \leqq \delta_2 \qquad (\delta_1 \geqq 0, \delta_2 \geqq 0) \tag{36}$$

mit

$$\delta_1 + \delta_2 \leqq \frac{\alpha}{2}(1 - \eta)\,\varepsilon^3 \qquad \big(0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_\alpha(\eta)\big) \tag{37}$$

die Ungleichung (28), *d.h.*

$$\sup_{A \in S} |P(A) - Q(A)| = \frac{1}{2}|P - Q|(X) < 2\varepsilon$$

folgt.

Beweis. Setzen wir

$$P(X') = 1 - \hat\delta_1, \quad I_\alpha(P \| Q\,; X) = \hat\delta_2\,. \tag{38}$$

Dann ist wegen (36)

$$0 \leqq \hat\delta_1 \leqq \delta_1, \quad \log(1 - \delta_1) \leqq \hat\delta_2 \leqq \delta_2, \qquad \delta_2 \geqq 0, \tag{39}$$

wobei die Ungleichung $\log(1 - \delta_1) \leqq \hat\delta_2$ aus (6) folgt.

Es gilt im Falle $\alpha \neq 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\alpha(P,Q\,; X') &= P(X')\, e^{(\alpha-1) I_\alpha(P \| Q\,; X')} = (1 - \hat\delta_1)\, e^{(\alpha-1)\hat\delta_2} = \\ &= (1 - \hat\delta_1)\big(1 + (\alpha - 1)\,\hat\delta_2 + O(\hat\delta_2^2)\big) = 1 - \hat\delta_1 + (\alpha - 1)\,\hat\delta_2 + \hat\delta_2\, E_\alpha(\hat\delta_1, \hat\delta_2)\,, \end{aligned} \tag{40}$$

wobei für $\hat\delta_1 \to 0$, $\hat\delta_2 \to 0$ $E_\alpha(\hat\delta_1, \hat\delta_2) \to 0$ gilt, bzw.

$$\mathcal{J}_1(P,Q\,; X') = P(X')\, I_1(P \| Q\,; X') = \hat\delta_2 - \hat\delta_1\,\hat\delta_2\,. \tag{40'}$$

Wenden wir nun Satz 1 mit

$$\delta = \begin{cases} \hat\delta_1 + (1 - \alpha)\,\hat\delta_2 - \hat\delta_2\, E_\alpha(\hat\delta_1, \hat\delta_2) & \text{für} \quad 0 < \alpha < 1 \\ \hat\delta_2 - \hat\delta_1\,\hat\delta_2 & \text{für} \quad \alpha = 1 \\ -\hat\delta_1 + (\alpha - 1)\,\hat\delta_2 + \hat\delta_2\, E_\alpha(\hat\delta_1, \hat\delta_2) & \text{für} \quad \alpha > 1 \end{cases}$$

und $\delta' = \hat\delta_1$ an. Es ergibt sich, dass die Ungleichung (28) sicher besteht, falls

$$\hat\delta_1 + \hat\delta_2 + \hat\delta_2\, E_\alpha^+(\hat\delta_1, \hat\delta_2) \leqq \frac{\alpha(1 - \varepsilon)^{|2-\alpha|}}{2}\,\varepsilon^3 \tag{41}$$

ist, wobei

$$E_\alpha^+(\hat\delta_1, \hat\delta_2) = \begin{cases} \dfrac{E_\alpha(\hat\delta_1, \hat\delta_2)}{\alpha - 1} & \text{für} \quad \alpha \neq 1 \\ -\hat\delta_1 & \text{für} \quad \alpha = 1 \end{cases} \tag{42}$$

gesetzt wurde.

Falls jedoch die Ungleichung (37) mit einem positiven η besteht, und ε genügend klein ist, so muss auch (41) erfüllt sein, Gebrauch machend von den Relationen (39) und der aus (42) folgenden Limesrelation $E_a^+(\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2) \to 0$ falls $\hat{\delta}_1 \to 0$, $\hat{\delta}_2 \to 0$.

Damit ist Satz 2 bewiesen.

Bemerken wir, dass die Bedingung $\delta_2 \geqq 0$ in (36) wesentlich ist. Ohne sie folgt aus (36) und (37) die Ungleichung (28) im allgemeinen nicht, wie dies das folgende Beipsiel zeigt:

Es sei $X = [0,1]$, Q das Lebesguesche Mass, und P sei durch $P(A) = \frac{1}{2} Q(A)$ falls $1 \notin A$, $P(\{1\}) = \frac{1}{2}$ definiert. Dann ist mit $X' = [0,1)$ $P(X') = \frac{1}{2}$ und $I_\alpha(P||Q; X') = -\log 2$, es ist also

$$1 - P(X') + I_\alpha(P \,||\, Q\,; X') = \frac{1}{2} - \log 2 < 0$$

und doch ist $\varrho(P, Q) = 1 > 0$.

Aus dem Satz 2 folgt sofort, dass zu jedem $\alpha > 0$ eine solche Konstante C_α gegeben werden kann, dass falls die Ungleichungen (36) bestehen (mit beliebigen $\delta_1 \geqq 0$, $\delta_2 \geqq 0$) so immer

$$\varrho(P, Q) = |P - Q|\,(X) < C_\alpha \sqrt[3]{\delta_1 + \delta_2} \tag{43}$$

ist. In der Tat, falls $\delta_1 + \delta_2$ genügend klein ist, so folgt aus (36) nach dem Satz 2 $\varrho(P, Q) < 4 \sqrt[3]{\frac{2}{\alpha(1-\eta)}(\delta_1+\delta_2)}$, falls jedoch $\delta_1 + \delta_2$ grösser als eine gegebene positive Zahl ist, so besteht wegen $\varrho(P, Q) \leqq 2$ die Ungleichung (43) sicherlich, falls C_α genügend gross gewählt wurde.

Es sei nun angenommen, dass der ϱ-Abstand zweier Verteilungen P, Q auf (X, S) $\varrho(P, Q) = |P - Q|\,(X) < \varepsilon < 1$ ist. Setzt man dann $X' = \{x : |p(x) - q(x)| \leqq \sqrt{\varepsilon}\, q(x)\}$, so ergibt sich wegen

$$\sqrt{\varepsilon} \int_{X-X'} q(x)\, d\lambda(x) \leqq \int_{X-X'} |p(x) - q(x)|\, d\lambda(x) \leqq \int |p(x) - q(x)|\, d\lambda(x) < \varepsilon$$

$$\int_{X-X'} q(x)\, d\lambda(x) < \sqrt{\varepsilon} \tag{44}$$

und daraus

$$P(X') = \int_{X'} p(x)\, d\lambda(x) \geqq \int_{X'} (1 - \sqrt{\varepsilon})\, q(x)\, d\lambda \geqq (1 - \sqrt{\varepsilon})^2\,. \tag{45}$$

Ferner gilt, die Ungleichung (44) berücksichtigend,

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_\alpha(P, Q\,; X') - 1| &\leqq \Big|\int_{X'} (p^\alpha q^{1-\alpha} - q)\, d\lambda\Big| + \int_{X-X'} q\, d\lambda \leqq \\ &\leqq \int_{X'} |p^\alpha q^{1-\alpha} - q|\, d\lambda + \sqrt{\varepsilon} \leqq \int_{X'} ((1 + \sqrt{\varepsilon})^\alpha - 1)\, q\, d\lambda + \sqrt{\varepsilon} \leqq \qquad (46) \\ &\leqq (1 - \sqrt{\varepsilon})^\alpha - 1 + \sqrt{\varepsilon} \qquad \text{für} \quad \alpha \neq 1 \end{aligned}$$

(wobei die dritte Ungleichung daraus folgt, dass auf X' — nach der Definition dieser Menge —

$$|p^a q^{1-a} - q| \leqq q \max\{(1+\sqrt{\varepsilon})^a - 1, 1-(1-\sqrt{\varepsilon})^a\} = q((1+\sqrt{\varepsilon})^a - 1)$$

ist) bzw. für $\alpha = 1$

$$(46') \qquad \mathcal{I}_1(P, Q\,; X') = \int_{X'} p \log \frac{p}{q}\, d\lambda \leqq \int_{X'} p \log(1+\sqrt{\varepsilon})\, d\lambda \leqq \log(1+\sqrt{\varepsilon}).$$

Es folgt aus (45) und (46) bzw. (46') leicht, falls man noch z.B. $\varepsilon < \frac{1}{2}$ annimt, dass im Falle $\varrho(P, Q) < \varepsilon$ immer eine solche Teilmenge $X' \in S$ von X gegeben werden kann, für die

$$P(X') \geqq 1 - \delta_1, \quad I_\alpha(P\,||\,Q\,; X') \leqq \delta_2 \qquad (\delta_1 \geqq 0, \delta_2 \geqq 0)$$

mit $\delta_1 + \delta_2 < C_\alpha^+ \sqrt{\varepsilon}$ besteht, wobei C_α^+ eine geeignete Konstante ist.

Also besteht der folgende Satz:

Satz 3. *Zu jedem $\alpha > 0$ können solche positive Zahlen C_α bzw. C_α^+ gegeben werden, dass*

a) *aus $P(X') \geqq 1 - \delta_1$, $I_\alpha(P||Q; X') \leqq \delta_2$ $(\delta_1 \geqq 0,\ \delta_2 \geqq 0)$ die Ungleichung $\varrho(P, Q) = 2 \sup_{A \in S} |P(A) - Q(A)| < C_\alpha \sqrt[3]{\delta_1 + \delta_2}$ folgt,*

b) *aus der Ungleichung $\varrho(P, Q) < \varepsilon < \frac{1}{2}$ die Existenz einer Teilmenge $X' \in S$ von X mit*

$$P(X') > 1 - \delta_1, I_\alpha(P\,||\,Q\,; X') < \delta_2, \ \delta_1 + \delta_2 < C_\alpha^+ \sqrt{\varepsilon} \ (\delta_1 \geqq 0, \delta_2 \geqq 0)$$

folgt.

Es sei betont, dass hier a) die bedeutend tiefere Behauptung darstellt, wie aus den vorigen ersichtlich ist.

Nach dem Satz 3 ist die fast totale Informationskonvergenz beliebiger Ordnung der gleichmässigen Konvergenz der Verteilungen äquivalent, und noch mehr folgt die gleichmässige Konvergenz aus der totalen Informationskonvergenz. Daraus ergibt sich sofort, dass eine Verteilungsfolge $\{P_n\}$ im Sinne der totalen oder fast totalen Informationskonvergenz der Ordnung α nicht gegen zwei verschiedene Verteilungen streben kann (s. § 1, Bemerkung 3 zu Definition 2) und auch, dass die in § 1 (Bemerkung 2 zu Definition 2) erwähnte Möglichkeit für die Verallgemeinerung der Informationskonvergenz in der Tat keinen neuen Konvergenzbegriff ergibt.

Die Äquivalenz der fast totalen Informationskonvergenz und der gleichmässigen Konvergenz bedeutet, dass sich jeder Grenzverteilungssatz, der sich auf die gleichmässige Konvergenz von Verteilungen bezieht, mit der in der Einleitung angedeuteten informationstheoretischen Methode beweisen lässt (wenigstens prinzipiell, da die praktische Durchführung eines solchen Beweises auch sehr kompliziert sein kann). Dabei kann die Ordnung $\alpha > 0$ immer dem Problem angemessen gewählt werden. Die Berechnung scheint im allgemeinen für $\alpha = 2$ oder $\alpha = 1$ am einfachsten zu sein ($\alpha = 2$ kommt wegen der Einfachheit der Funktion $f_2(u) = u^2$ in Betracht, $\alpha = 1$ dagegen darum, weil der Ausdruck von $I_1(P||Q)$ auf zwei Glieder zerfällt). Falls man $0 < \alpha < 1$ wählt, so reicht die Benützung der totalen Informationskonvergenz aus, im Falle $\alpha \geqq 1$ braucht man jedoch im allgemeinen die fast totale Informationskonvergenz. In der Tat kommt es oft vor, dass die Verteilungen P_n gleichmässig gegen eine Grenzverteilung P streben, während $I_\alpha(P_n||P) + \infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ist. (Siehe den Beispiel am Ende des § 1.) Der Begriff der fast totalen Informationskonvergenz wurde gerade darum eingeführt, damit man diese Schwierigkeit vermeide.

Aus der Äquivalenz der fast totalen Informationskonvergenz und der gleichmässigen Konvergenz der Verteilungen folgt auch, dass sich solche Grenzverteilungssätze, bei denen nur eine Konvergenzart schwächer als die gleichmässige Konvergenz bestätigt werden kann, mit der informationstheoretischen Methode direkt nicht beweisen lassen. Oft kann man aber die betrachteten Verteilungen P_n durch solche Verteilungen P'_n annähern, die schon gleichmässig gegen die Grenzverteilung P streben, für die also die informationstheoretische Beweismethode schon anwendbar ist (s. [1]).

Satz 3 hat noch eine wichtige Folge:

Satz 4. *Falls für die Verteilungen P_n $(n = 1, 2, \ldots)$ auf (X, S) mit geeigneten Teilmengen $X_n \in S$ $(n = 1, 2, \ldots)$ von X mit $P_n(X_n) \to 1$ die Limesrelation*

$$\lim_{m,n\to\infty} I_\alpha(P_n||P_m\,; X_n) = 0 \tag{47}$$

besteht, dann streben diese Verteilungen gleichmässig gegen eine Grenzverteilung P.

Beweis. Setzen wir

$$\inf_{n\geqq n_0} P_n(X_n) = 1 - \delta_1\,, \quad \sup_{m,n\geqq n_0} I_\alpha(P_n||P_m\,; X_n) = \delta_2\,. \tag{48}$$

Dann ist nach Satz 3 für $m, n \geqq n_0$

$$\sup_{A\in S}|P_n(A) - P_m(A)| < \frac{C_\alpha}{2}\sqrt[3]{\delta_1 + \delta_2} \tag{49}$$

(in Betracht, dass nach (47) $\delta_2 \geqq 0$ ist).

Da wegen $P_n(X_n) \to 1$ und (47) die Zahlen $\delta_1 \geqq 0$ und $\delta_2 \geqq 0$ in (48) beliebig klein werden, falls n_0 genügend gross ist, bedeutet (49), dass das Cauchysche Konvergenzkriterium für die numerischen Folgen $P_n(A)$ $(A \in S)$ gleichmässig in A erfüllt ist. Also strebt die Verteilungsfolge $\{P_n\}$ gleichmässig auf (X, S) gegen eine Mengenfunktion P. Da aber der gleichmässige Limes von vollständig additiven Mengenfunktionen auch selbst vollständig additiv ist, (s. z.B. [8]) und die Relationen $P \geqq 0$, $P(X) = 1$ trivialerweise bestehen, ist P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf (X, S). Damit ist Satz 4 bewiesen.

Satz 4 ermöglicht den informationstheoretischen Beweis von Grenzverteilungssätzen auch ohne die Benützung der Grenzverteilung. Vielleicht wird es in dieser Weise gelingen, die Ergodizität von Markoffschen Ketten rein informationstheoretisch zu beweisen. (Es ist bekannt, s. [2], [3], dass sich die Ergodzitität von Markoffschen Ketten mit Hilfe der Informationstheorie sehr anschaulich beweisen lässt, falls man schon weiss, dass eine stationäre

Verteilung der Kette existiert; zum Beweis des letzteren benötigt man jedoch im allgemeinen matrizentheoretische Sätze.)

§ 3. Topologische Beziehungen

Die Definition der totalen bzw. fast totalen Informationskonvergenz (Definition 1 bzw. 2) lässt sich leicht auf Raster im Raume der Verteilungen verallgemeinern. (Ein nicht leeres System $\mathfrak{t}$ von nicht leeren Teilmengen einer Menge H ist ein Raster in H, falls es zu je zwei $A, B \in \mathfrak{t}$ ein $C \in \mathfrak{t}$ mit $C \subset A \cap B$ gibt).[5]

Es sei E eine Menge von Verteilungen auf einem messbaren Raum (X, S) und setzen wir für $Q \in E$

$$V_\alpha(Q, \varepsilon) = \{P : I_\alpha(P \| Q) < \varepsilon, P \in E\}$$

$$\mathfrak{V}_\alpha(Q) \quad = \{V_\alpha(Q, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$$

bzw.

$$W_\alpha(Q, \varepsilon) = \{P : \inf_{X' \in S} [1 - P(X') + \max(I_\alpha(P \| Q ; X'), 0)] < \varepsilon, P \in E\}$$

$$\mathfrak{W}_\alpha(Q) \quad = \{W_\alpha(Q, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}.$$

Definition 3. Ein Raster $\mathfrak{t}$ im Verteilungsraum E heisst im Sinne der totalen bzw. fast totalen Informationskonvergenz der Ordnung $\alpha > 0$ gegen eine Verteilung $Q \in E$ konvergent, falls $\mathfrak{t} \sqsubset \mathfrak{V}_\alpha(Q)$ bzw. $\mathfrak{t} \sqsubset \mathfrak{W}_\alpha(Q)$ gilt, wobei $\sqsubset$ die Rasterrelation »feiner als« bezeichnet. ($\mathfrak{t}_1 \sqsubset \mathfrak{t}_2$ bedeutet, dass es zu jedem $A \in \mathfrak{t}_2$ ein $B \in \mathfrak{t}_1$ mit $B \subset A$ gibt.)

Hier ist der Limes Q eindeutig bestimmt, da im Falle $Q \neq R$ immer ein solches $\varepsilon > 0$ gegeben werden kann, dass $W_\alpha(Q, \varepsilon) \cap W_\alpha(R, \varepsilon) = 0$ und um so mehr $V_\alpha(Q, \varepsilon) \cap V_\alpha(R, \varepsilon) = 0$ ist. Dazu genügt es nach Satz 3, die Zahl $\varepsilon > 0$ so zu wählen, dass

$$C_\alpha \sqrt[3]{\varepsilon} < \frac{1}{2} \varrho(Q, R) = \sup_{A \in S} |Q(A) - R(A)|$$

gelte.

Definition 3 ist eine natürliche Verallgemeinerung der Definitionen 1 bzw. 2, die durch die Anwendung der Definition 3 auf den Endraster der Folge $\{P_1, P_2, \ldots\}$ entstehen. Die Menge der in Information der Ordnung α total bzw. fast total konvergenten Raster sei mit $\mathfrak{K}_\alpha$ bzw. $\mathfrak{K}_\alpha'$ bezeichnet. Es ist dann leicht zu sehen, dass $(E, \mathfrak{K}_\alpha)$ und $(E, \mathfrak{K}_\alpha')$ $(\alpha > 0)$ Konvergenzräume sind (siehe [9], S. 121—124).

Es ist wegen $\mathfrak{V}_\alpha(Q) \sqsubset \mathfrak{W}_\alpha(Q)$ klar, dass ein Raster, der in Information der Ordnung α total konvergent gegen eine Verteilung $Q \in E$ ist, auch im Sinne der fast totalen Informationskonvergenz der Ordnung α gegen Q konvergiert, also ist $\mathfrak{K}_\alpha \subset \mathfrak{K}_\alpha'$. Im Falle $0 < \alpha < 1$ sind die totale und fast totale Informationskonvergenz auch für Raster äquivalent, d.h. es ist

$$\mathfrak{K}_\alpha = \mathfrak{K}_\alpha' \qquad (0 < \alpha < 1). \tag{50}$$

[5] Bezüglich der in diesem Paragraphen benützten Terminologie s. z. B. [9].

In der Tat, folgt aus der Ungleichung (16) (mit P, Q, X' anstatt von P_n, P, X_n) wegen $I_\alpha(P||Q) = \frac{1}{\alpha - 1} \log \mathcal{J}_\alpha(P, Q)$ einfach, dass im Falle $0 < \alpha < 1$ zu jedem $\varepsilon_1 > 0$ ein solches $\varepsilon_2 > 0$ gegeben werden kann, dass die Ungleichung $I_\alpha(P||Q) < \varepsilon_1$ im Falle $1 - P(X') + \max\left(I_\alpha(P||Q; X'), 0\right) < \varepsilon_2$ immer besteht. Es gilt also $\mathfrak{W}_\alpha(Q) \sqsubseteq \mathfrak{V}_\alpha(Q)$, das zusammen mit der trivialen Relation $\mathfrak{V}_\alpha(Q) \sqsubset \mathfrak{W}_\alpha(Q)$ bedeutet, dass $\mathfrak{V}_\alpha(Q)$ und $\mathfrak{W}_\alpha(Q)$ für jedes $Q \in E$ äquivalente Raster sind, woraus schon (50) folgt.

Bezeichnen wir mit $S(Q,\varepsilon)$ die »Kugel« mit dem »Mittelpunkt« Q und Radius ε im metrischen Raum (E, ϱ), wobei $\varrho(P, Q) = |P - Q|(X)$ ist, also $S(Q,\varepsilon) = \{P : |P - Q|(X) < \varepsilon,\ P \in E\}$. Dann gilt nach Satz 3 für jedes $Q \in E$ und $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ $W_\alpha(Q, \varepsilon) \subset S(Q, C_\alpha \sqrt[3]{\varepsilon})$ und $S(Q, \varepsilon) \subset W_\alpha(Q, C_\alpha^+ \sqrt{\varepsilon})$. Also ist der Raster $\mathfrak{W}_\alpha(Q)$ für jedes $Q \in E$ dem Raster der Kugel um Q im metrischen Raum (E, ϱ) äquivalent, infolge dessen ist die fast totale Informationskonvergenz (beliebiger Ordnung) auch für Raster mit der Konvergenz im metrischen Raum (E, ϱ) gleichwertig. Das kann auch so ausgedrückt werden, dass der Konvergenzraum $(E, \mathfrak{K}'_\alpha)$ dem metrischen Raum (E, ϱ) äquivalent ist.

Was die totale Informationskonvergenz der Ordnung α anbetrifft, ist für $0 < \alpha < 1$ auch sie der Konvergenz im metrischen Raum (E, ϱ) äquivalent (wegen (50)), für $\alpha \geqq 1$ jedoch kann man nur soviel sagen, dass ein Raster, der in Information der Ordnung α total konvergent ist, auch im (E, ϱ) konvergiert, umgekehrt aber im allgemeinen nicht. Es besteht sogar der folgende

Satz 5. *In einem Verteilungsraum E kann im allgemeinen keine solche Topologie angegeben werden, dass die topologische Konvergenz der Raster äquivalent der totalen Informationskonvergenz der Ordnung $\alpha \geqq 1$ sei.*

Beweis. Es sei $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ eine abzählbare Menge und E bestehe aus denjenigen Verteilungen auf X, für die jedes $x_k \in X$ eine positive Wahrscheinlichkeit hat. Wir zeigen, dass dann der Konvergenzraum $(E, \mathfrak{K}_\alpha)$ im Falle $\alpha \geqq 1$ keinem topologischen Raum äquivalent ist, wodurch die Behauptung des Satzes 5 bewiesen ist.

Falls in E die totale Informationskonvergenz der Ordnung α $(\alpha \geqq 1)$ der topologischen Konvergenz in einer Topologie auf E äquivalent wäre, müssten die Raster $\mathfrak{V}_\alpha(P)$ $(P \in E)$ den Rastern der Umgebungen der Verteilungen $P \in E$ äquivalent sein (nach der Definition der beiden Konvergenzbegriffe) also wären die Raster $\mathfrak{V}_\alpha(P)$ Basis der Umgebungen der Verteilungen P. Dann müsste aber die folgende Bedingung erfüllt sein (seihe z.B. [10] Seite 35 Eigenschaft 3):

(B) Für jedes $P \in E$, $\varepsilon > 0$ enthält $V_\alpha(P, \varepsilon)$ ein solches $V_\alpha(P, \varepsilon_1)$ $(0 < \varepsilon_1 \leqq \varepsilon)$, dass im Falle $Q \in V_\alpha(P, \varepsilon_1)$ für genügend kleines $\varepsilon_2 > 0$ (das von Q abhängen kann) $V_\alpha(Q, \varepsilon_2) \subset V_\alpha(P, \varepsilon)$ ist.

Es genügt also zu zeigen, dass (B) nicht gilt.

Es sei zuerst $\alpha > 1$ und setzen wir

$$(51 \qquad p_k = ck^{-2},\quad q_k = \begin{cases} p_k & \text{für } k < m \\ c_1 k^{-2+\frac{1}{\alpha}} & \text{für } k \geqq m \end{cases},\quad r_k = \begin{cases} q_k & \text{für } k < n \\ c_2 k^{-2+\frac{1}{\alpha}} & \text{für } k \geqq n, \end{cases}$$

wobei m und $n > m$ vorläufig unbestimmt sind, und c, c_1 und c_2 so gewählt werden, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} q_k = \sum_{k=1}^{\infty} r_k = 1$$

ist.

Betrachten wir die Verteilungen P, Q, R auf $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, definiert durch $P(\{x_k\}) = p_k$, $Q(\{x_k\}) = q_k$, $R(\{x_k\}) = r_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ Falls nun m und $n > m$ genügend gross sind, sagen wir $m \geqq m_0$, $n \geqq n_0(m)$, so werden

$$\sum_{k=m}^{\infty} q_k^\alpha p_k^{1-\alpha} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{c_1^\alpha}{c^{\alpha-1}} k^{-\frac{3}{2}}$$

und

$$\sum_{k=n}^{\infty} r_k^\alpha q_k^{1-\alpha} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{c_2^\alpha}{c_1^{\alpha-1}} k^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{2\alpha}}$$

beliebig klein (da die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{3}{2}}$ bzw. $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{2\alpha}}$ konvergent sind und nach (51) $c_1 < c$, $c_2 < c_1$ sein muss). Dann sind aber

$$\mathcal{I}_\alpha(Q, P) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k^\alpha p_k^{1-\alpha} = \sum_{k=1}^{m-1} p_k + \sum_{k=m}^{\infty} q_k^\alpha p_k^{1-\alpha}$$

und

$$\mathcal{I}_\alpha(R, Q) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k^\alpha q_k^{1-\alpha} = \sum_{k=1}^{n-1} q_k + \sum_{k=n}^{\infty} r_k^\alpha q_k^{1-\alpha}$$

beliebig nahe zu 1 (kleiner als 1 können sie nach (6) nicht sein), also sind $I_\alpha(Q||P)$ und $I_\alpha(R||Q)$ beliebig nahe zu 0.

Dagegen ist wegen

$$r_k^\alpha p_k^{1-\alpha} \sim c_2^\alpha k^{-2\alpha+1} \cdot c^{1-\alpha} k^{-2(1-\alpha)} = c_2^\alpha c^{1-\alpha} k^{-1}$$

(wobei $\sim$ die asymptotische Äquivalenz bezeichnet)

$$I_\alpha(R||P) = \frac{1}{\alpha - 1} \log \sum_{k=1}^{\infty} r_k^\alpha p_k^{1-\alpha} = +\infty\,.$$

Also kann man zur Verteilung P für beliebiges $\varepsilon_1 > 0$ eine Verteilung $Q \in E$ mit $I_\alpha(Q||P) < \varepsilon_1$, und zu diesem Q für beliebiges $\varepsilon_2 > 0$ ein $R \in E$ mit $I_\alpha(R||Q) < \varepsilon_2$ finden, so dass $I_\alpha(R||P) = +\infty$ ist. Das zeigt, dass die Bedingung (B) nicht erfüllt sein kann, w. z. b. w.

Der Fall $\alpha = 1$ kann ähnlicherweise erledigt werden, nur soll man P, Q, R anstatt (51) z.B. durch

$$p_k = 2^{-k}, \quad q_k = \begin{cases} p_k & \text{für } k < m \\ c_1 k^{-3} & \text{für } k \geqq m \end{cases}, \qquad r_k = \begin{cases} q_k & \text{für } k < n \\ c_2 k^{-2} & \text{für } k \geqq n \end{cases}, \tag{52}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k = \sum_{k=1}^{\infty} r_k = 1$$

definieren (mit unbestimmten m und $n > m$).

Dann gilt für genügend grosses m und bei jedem m für genügend grosses $n > m$

$$I_1(Q\|P) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \log \frac{q_k}{p_k} = \sum_{k=m}^{\infty} c_1 k^{-3} \log (c_1 k^{-3} 2^k) < \varepsilon_1$$

und

$$I_1(R\|Q) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k \log \frac{r_k}{q_k} = \sum_{k=n}^{\infty} c_2 k^{-2} \log \frac{c_2}{c_1} k < \varepsilon_2$$

benützend, dass in (52) $c_1 < 1$ und $c_2 < c_1$ sein muss).

Dagegen ist wegen $r_k \log \frac{r_k}{p_k} \sim c_2 k^{-2} \log (c_2 k^{-2} 2^k) \sim c_2 k^{-1} \log 2$ immer

$$I_1(R\|P) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k \log \frac{r_k}{p_k} = +\infty .$$

Daraus folgt, dass die Bedingung (B) auch im Falle $\alpha = 1$ nicht erfüllt sein kann. Damit ist Satz 5 vollständig bewiesen.

Bemerken wir, dass sich die Parameter m und n in (51) bzw. (52) auch so bestimmen lassen, dass neben $I_\alpha(Q\|P)$ und $I_\alpha(R\|Q)$ auch noch $I_\alpha(P\|Q)$ und $I_\alpha(Q\|R)$ beliebig klein sind. In der Tat, im Falle $\alpha > 1$ ist nach (51)

$$c_1 = c \frac{\sum_{k=m}^{\infty} k^{-2}}{\sum_{k=m}^{\infty} k^{-2+\frac{1}{2\alpha}}} \sim c \frac{m^{-1}}{K_1 m^{-1+\frac{1}{2\alpha}}} = K_2 m^{-\frac{1}{2\alpha}}$$

$$c_2 = c_1 \frac{\sum_{k=n}^{\infty} k^{-2+\frac{1}{2\alpha}}}{\sum_{k=n}^{\infty} k^{-2+\frac{1}{\alpha}}} \sim c_1 \frac{K_1 n^{-1+\frac{1}{2\alpha}}}{K_3 n^{-1+\frac{1}{\alpha}}} = K_4 c_1 n^{-\frac{1}{2\alpha}}$$

wobei $K_1, K_2, \ldots$ Konstanten sind, z.B. $K_1 = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2\alpha}}$. Im Falle $\alpha = 1$ erhält man ähnlicherweise

$$c_1 \sim K_5 m^2 2^{-m}, \quad c_2 \sim K_6 c_1 n^{-1} .$$

Daraus folgt, dass die Summen

$$\sum_{k=m}^{\infty} p_k^\alpha q_k^{1-\alpha} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{c^\alpha}{c_1^{\alpha-1}} k^{-\frac{5}{2}+\frac{1}{2\alpha}}, \quad \sum_{k=n}^{\infty} q_k^\alpha r_k^{1-\alpha} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{c_1^\alpha}{c_2^{\alpha-1}} k^{-\frac{5}{2}+\frac{1}{\alpha}} \quad (\alpha > 1)$$

bzw.

$$\sum_{k=m}^{\infty} p_k \log \frac{p_k}{q_k} = \sum_{k=m}^{\infty} 2^{-k} \log (c_1^{-1} k^3 2^{-k}), \quad \sum_{k=n}^{\infty} q_k \log \frac{q_k}{r_k} = \sum_{k=n}^{\infty} c_1 k^{-3} \log \frac{c_1}{c_2 k}$$

$$(\alpha = 1)$$

für genügend grosses m und bei jedem m für genügend grosses n kleiner als beliebig kleine positive Zahlen sind, infolge dessen sind auch $I_\alpha(P||Q)$ und $I_\alpha(Q||R)$ beliebig klein (ebenso wie $I_\alpha(Q||P)$ und $I_\alpha(R||Q)$ im Beweis des Satzes 5).

In der Informationstheorie ist es üblich neben der relativen Information $I_\alpha(P||Q)$ auch die symmetrische Grösse $J_\alpha(P, Q) = I_\alpha(P||Q) + I_\alpha(Q||P)$, die sogenannte J-Divergenz der Ordnung α zu benützen. Sie scheint wegen ihrer Symmetrie ein noch adäquateres Mass der Verschiedenheit von Verteilungen zu sein, als die relative Information $I_\alpha(P||Q)$, und, obwohl die J-Divergenz selbst der Dreiecksungleichung nicht genügt, könnte man meinen, dass sie sich durch eine stetige, monoton zunehmende Funktion f so transformieren lässt, dass $f(J_\alpha(P, Q))$ schon eine Entfernung im Raum der Verteilungen ist. Aus der vorigen Bemerkung folgt jedoch, dass dies für $\alpha \geqq 1$ im allgemeinen nicht der Fall sein kann, und zwar schon für den im Beweis des Satzes 5 definierten Verteilungsraum E nicht. Falls nämlich $f(u)$ eine beliebige stetige, im Intervalle $[0, +\infty]$ monoton zunehmende Funktion mit $f(0) = 0, f \not\equiv 0$ ist, so können nach der obigen Bemerkung durch geeignete Wahl der Parameter m und n in (51) bzw. (52) $J_\alpha(P, Q)$ und $J_\alpha(Q, R)$ so klein gemacht werden, dass schon $f(J_\alpha(P, Q)) < \frac{f(\infty)}{2}$, $f(J_\alpha(Q, R)) < \frac{f(\infty)}{2}$ gilt ($f(\infty) > 0$ folgt aus der Monotonität von f und aus $f \not\equiv 0$.) Dann kann aber wegen $J_\alpha(P, R) = +\infty$ für diese P, Q, R die Dreiecksungleichung nicht bestehen. Streng genommen haben wir nur benützt, dass die Funktion $f(u)$ in $u = 0$ stetig ist (es kann nämlich ohne weiteres angenommen werden, dass $f(0) = 0$ und $f(\infty) > 0$ ist, da anderfalls $f(J_\alpha(P, P)) = f(0) > 0$ bzw. $f(J_\alpha(P, R)) = f(\infty) = 0$ wäre, also könnte $f(J_\alpha(P, Q))$ keineswegs eine Entfernung sein.)

Also haben wir gezeigt, dass im Falle $\alpha \geqq 1$ keine solche in $u = 0$ stetige Funktion $f(u)$ gibt, dass $f(J_\alpha(P, Q))$ in jedem Verteilungsraum oder wenigstens im Raume E eine Entfernung sei.[6] Es sei bemerkt, daß man auch über die Verteilungsmengen $V_\alpha^+(Q, \varepsilon) = \{P : J_\alpha(P, Q) < \varepsilon\}$ fragen kann, ob sie — als Basis der Umgebungen der Verteilungen Q — eine Topologie in E definieren. Durch das im Beweis des Satzes 5 benützte Verfahren läßt sich leicht zeigen, dass die Antwort auf diese Frage im Falle $\alpha \geqq 1$ negativ ist. Die Behauptung, dass $f(J_\alpha(P, Q))$ für keine stetige, monoton zunehmende Funktion $f(u)$ eine Entfernung in E sein kann, ist eine unmittelbare Folge dieser Tatsache.

Man sieht leicht, dass Ähnliches anstatt der Divergenz auch für jede solche Funktion $g(I_\alpha(P||Q), I_\alpha(Q||P))$ der Informationsgrössen $I_\alpha(P||Q)$ und $I_\alpha(Q||P)$ besteht, wobei $g(u, v)$ im Ursprung stetig ist und im Falle $v > 0$ $g(+\infty, v) = +\infty$ gilt (z.B. für jedes positive Potenzmittel von $I_\alpha(P||Q)$ und $I_\alpha(Q||P)$).

(Eingegangen: 2. Januar, 1962.)

---

[6] Im Falle $0 < \alpha < 1$ dagegen gibt es solche Funktionen, s. [11].

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Линник, Ю. В.: ,,Теоретико-информационное доказательство центральной предельной теоремы в условиях Линдеберга.'' *Теория Вероятностей и ее Применения* **4** (1959) 311—321.

[2] Rényi, A.: ,,Az információelmélet néhány alapvető kérdése''. (Einige grundlegenden Fragen der Informationstheorie, ungarisch), *A Magyar Tud. Akadémia III. Osztályának Közleményei* **10** (1960) 261—282.

[3] Rényi, A.: ,,On measures of entropy and information''. **4** *th Berkeley Symposium on Probability and Statistics*, I, 1960, 547—561.

[4] Pérez, A.: ,,Notions généralisées d'incertitude, d'entropie et d'information du point de vue de la théorie de martingales.'' *Transactions of the First Prague Conference*, Prague, 1957, 183—208.

[5] Kallianpur, G.: ,,On the amount of information contained in a σ-field''. *Contributions to probability and statistics, Stanford*, 1960, 265—271.

[6] Alexandroff, A. D.: ,,Additive set functions in abstract spaces''. *Математический Сборник* **8** (1940) 307—348.

[7] Halmos, R. P.: *Measure Theory*. Van Nostrand, New York, 1951.

[8] Hahn, H.—Rosenthal, A.: *Set Functions*. New Mexico, 1948.

[9] Aumann, G.: *Reelle Funktionen*. Springer, 1954.

[10] Канторович, Л. В.—Акилов, Г. П.: *Функциональный анализ в нормированных пространствах*. Физматгиз, Москва, 1959.

[11] Csiszár, I. — Fischer, J.: ,,Informationsentfernungen im Raum der Wahrscheinlichkeitsverteilungen.'' *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **7** (1962), 159—180.

Bemerkung bei der Korrektur. Nach Einreichen des Manuskriptes machte Herr R. L. Dobruschin mich darauf aufmerksam, dass ein Spezialfall der hier dargestellten Ergebnisse, nämlich, dass — mit den hier benützten Bezeichnungen — aus der ,,Kleinheit'' von $I_1(P\|Q)$ immer die ,,Kleinheit'' von $\varrho(P,Q)$ folgt, schon von M. S. Pinsker bewiesen wurde; für diesen Fall (Spezialfall $X' = X$, $\alpha = 1$ von Satz 3 der vorliegenden Arbeit) hat er sogar eine bessere Abschätzung gegeben, als die aus Satz 3 folgende. Dieses Resultat wurde in der Arbeit М. С. Пинскер: ,,Информация и информационная устойчивость случайных величин и процессов'' (Проблемы передачи информации, выпуск 7. Изд. Ак. Наук СССР, Москва, 1960.) veröffentlicht, die damals in Ungarn noch nicht erhältlich war.

ТЕОРЕТИКО-ИНФОРМАЦИОННЫЕ ПОНЯТИЯ СХОДИМОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

I. CSISZÁR

Резюме

Исходя из той идеи Ю. В. Линника [1], что понятия теории информации можно использовать для доказательства теорем по предельным распределениям теории вероятностей, автор в настоящей статье определяет некоторые типы сходимости в пространстве распределений вероятностей, которые можно задавать понятиями информации, в частности при помощи относительной информации порядка α (см. [2], [3]). Он проводит общее исследование отношения этих типов сходимости к обычным типам.

Последовательность распределения $\{P_n\}$ мы назовем тотально сходящейся в информации порядка α к предельному распределению P, если выполнено соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} I_\alpha(P_n \| P) = 0$ и назовем ее почти тотально сходящейся, если можно задать такую последовательность $\{X_n\}$ подмножеств основного пространства, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(X_n) = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} I_\alpha(P_n \| P\,;\, X_n) = 0$ (в случае $0 < \alpha < 1$ оба понятия сходимости эквивалентны).

Автор доказывает, что почти тотальная информационная сходимость (порядка произвольного $\alpha > 0$) эквивалентна равномерной сходимости вероятностных мер, а это означает, что все теоремы предельного распределения, относящиеся к равномерной сходимости распределений можно доказать — по крайней мере принципиально — методами теории информации. Здесь использование почти тотальной информационной сходимости существенно, так как в случае $\alpha \geqq 1$ тотальная информационная сходимость не эквивалентна равномерной сходимости мер, а является более сильным понятием сходимости.

Доказательство совершается использованием леммы, относящейся к устойчивости неравенства Jensen, которая дает также оценки относительно связи скоростей этих двух сходимостей (теоремы 1, 2 и 3).

4-ая теорема дает критерий типа Cauchy для почти тотальной информационной сходимости последовательностей распределений, который делает возможным теоретико-информационное доказательство теорем предельного распределения и без знакомства с предельным распределением.

В § 3 автор занимается вопросом, можно ли вывести исследуемые понятия теоретико-информационных сходимостей из топологии. Относительно почти тотальной информационной сходимости ответ положителен, за то для тотальной информационной сходимости порядка $\alpha \geqq 1$ ответ отрицателен (теорема 5). Из этого результата следует, что нет такой непрерывной в начальной точке функции от J-дивергенции порядка $\alpha \geqq 1$ — значит также нет от J-дивергенции в обычном смысле ($\alpha = 1$) — которую можно было бы рассматривать как расстояние в пространстве распределений вероятностей.

INFORMATIONSENTFERNUNGEN IM RAUM DER WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNGEN

von

I. CSISZÁR und J. FISCHER

Einleitung

Die relative Information (auch Informationsgewinn oder relative Entropie genannt) und die entsprechende J-Divergenz der Ordnung $\alpha > 0$ (s. Rényi [1], [2]) können als Masse der Verschiedenheit zweier Wahrscheinlichkeitsverteilungen angesehen werden. Mit Hilfe dieser Begriffe lassen sich »Umgebungen« einer Wahrscheinlichkeitsverteilung definieren.

Es ist eine natürliche Frage, ob diese Umgebungen eine Topologie erzeugen und ob sich im bejahenden Fall eine Funktion der Divergenz bzw. des Informationsgewinnes geben lässt, die eine dieselbe Topologie erzeugende Entfernung bzw. »Quasientfernung« darstellt.

In § 1 wird die erste Frage für $0 < \alpha < 1$ positiv beantwortet,[1] sowie die zweite ausführlich formuliert. (Dass die Informations- bzw. Divergenzumgebungen im Falle $\alpha \geqq 1$ keine Topologie erzeugen, folgt aus [3], § 3.)

§ 2 enthält einige allgemeine Beziehungen zwischen Quasientfernungen und Entfernungen, die in den späteren benützt werden.

In § 3 bzw. § 4 werden einige Funktionen der Information bzw. Divergenz der Ordnung α $(0 < \alpha < 1)$ aus dem Gesichtspunkt der Quasientfernungs-(Entfernungs)eigenschaft untersucht, wodurch die in § 1 gestellte Metrisationsfrage bejahend beantwortet wird. Das erste positive Resultat in dieser Richtung stammt von J. Czipszer [4] und wird im Rahmen des Satzes 3 angeführt. Die wesentlichsten Ergebnisse der weiteren Untersuchungen werden in den Sätzen 4, 5 und 6 zusammengefasst, in denen wir über einige Typen der Funktionen der Information bzw. der Divergenz entscheiden, in welchen Fällen sie Quasientfernungen bzw. Entfernungen darstellen. Dabei sind die bezüglich der Divergenz in § 4 erhaltenen Resultate denen über die Information in § 3 analog. In beiden Paragraphen werden auch einige offene Fragen erwähnt.

Es werden die folgenden Bezeichnungen benützt:

P, Q, R bezeichnen Masse auf einem messbaren Raum (X, S) mit

$$P(X) = Q(X) = R(X) = 1 \,, \tag{1}$$

also Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf (X, S) (falls wir (1) nicht erfordern, wird auf dies ausdrücklich angedeutet);

λ bezeichnet ein Mass, in bezug auf welchem die betrachteten Masse absolut stetig sind (zu einer höchstens abzählbar unendlichen Menge von Massen

[1] Das erhaltene Ergebnis folgt auch aus [3] § 3; hier wird jedoch ein alternativer Beweis, der in gewissem Sinne ein schärferes Resultat ergibt, angeführt.

ist ein solches dominierendes λ immer zu finden); p, q, r bedeuten die Radon-Nikodymschen Ableitungen $\frac{dP}{d\lambda}$, $\frac{dQ}{d\lambda}$, $\frac{dR}{d\lambda}$.

Die Grösse

$$\mathcal{J}_\alpha(P, Q) = \int_X p^\alpha q^{1-\alpha} d\lambda \tag{2}$$

wird das Informationsintegral der Ordnung α ($\alpha > 0$) der Wahrscheinlichkeitsverteilung P bezüglich Q genannt (im diskreten Fall $P = (p_1, p_2, \ldots)$, $Q = (q_1, q_2, \ldots)$ ist $\mathcal{J}_\alpha(P, Q) = \sum_k p_k^\alpha q_k^{1-\alpha}$). Offenbar hängt der Wert $\mathcal{J}_\alpha(P, Q)$ von der Wahl des dominierenden Masses λ nicht ab.

$$I_\alpha(P \| Q) = -\frac{1}{1-\alpha} \log \mathcal{J}_\alpha(P, Q) \tag{3}$$

(hierbei wird unter »log« der natürliche Logarithmus verstanden) ist die (relative) Information der Ordnung α von P in bezug auf Q (im Falle $\alpha = 1$ ergibt sich der Grenzwert $I_1(P \| Q) = \int_X p \log \frac{p}{q} d\lambda$).

$$J_\alpha(P, Q) = I_\alpha(P \| Q) + I_\alpha(Q \| P) \tag{4}$$

ist die J-Divergenz der Ordnung α der Wahrscheinlichkeitsmasse P und Q.

§ 1. Die Informations- (Divergenz)topologie und das Problem ihrer Metrisation

Die Informations- bzw. Divergenzumgebungen der Ordnung $\alpha > 0$ einer Wahrscheinlichkeitsverteilung Q auf einem messbaren Raum (X, S) seien durch

$$V_\alpha(Q, \varepsilon) = \{P : I_\alpha(P \| Q) < \varepsilon\} \tag{5}$$

bzw.

$$V_\alpha^*(Q, \varepsilon) = \{P : J_\alpha(P, Q) < \varepsilon\} \tag{6}$$

definiert.

Es wird gezeigt, dass diese Umgebungen bei $0 < \alpha < 1$ eine Topologie im Raum der Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf (X, S) definieren, also dass die Mengen der Art (5) bzw. (6) als Basis der Umgebungen der Verteilungen Q auf (X, S) in einer Topologie aufgefasst werden können. (Im Falle $\alpha \geqq 1$ definieren sie aber keine Topologie, nur einen Konvergenzraum, s. [3], § 3.)

Beweisen wir zuerst den folgenden

Hilfssatz 1. *Für beliebige $0 \leqq \alpha \leqq 1$ besteht für die Totalvariation auf der Menge $A \in S$ der Differenz $P - Q$ zweier Wahrscheinlichkeitsmasse die folgende Gleichung*

$$|P - Q|(A) = \int_A |p^\alpha q^{1-\alpha} - p| \, d\lambda + \int_A |p^\alpha q^{1-\alpha} - q| \, d\lambda .$$

Beweis. Offenbar liegt $p^\alpha q^{1-\alpha}$ bei jedem nichtnegativen p, q und $0 \leqq \alpha \leqq 1$ zwischen p und q. Also gilt

$$|p - q| = |p^\alpha q^{1-\alpha} - p| + |p^\alpha q^{1-\alpha} - q| ,$$

woraus die Behauptung des Hilfssatzes folgt.

Bezeichnen wir die Totalvariation von $P - Q$ auf X mit $\varrho(P, Q)$. Dann gilt der folgende

Satz 1. *Zwischen der Grösse* $\varrho(P, Q)$ *und dem Informationsintegral* $\mathcal{J}_\alpha(P, Q)$ $(0 < \alpha < 1)$ *besteht die Beziehung*

$$1 - \mathcal{J}_\alpha(P, Q) \leqq \varrho(P, Q)\,. \tag{7}$$

Beweis. Es gilt

$$1 - \mathcal{J}_\alpha(P, Q) \leqq \int_X |p - p^\alpha q^{1-\alpha}|\, d\lambda \leqq \varrho(P, Q)\,,$$

wobei die letztere Ungleichungen aus Hilfssatz 1 folgt, w. z. b. w.

Aus Satz 1 folgt nach dem Zusammenhang von $I_\alpha(P \,||\, Q)$ und $\mathcal{J}_\alpha(P, Q)$, dass zu gegebenem α $(0 < \alpha < 1)$ immer eine Konstante C_α^* derart gewählt werden kann, dass

$$I_\alpha(P \,||\, Q) \leqq C_\alpha^* \,\varrho(P, Q)\,, \tag{8}$$

falls eine der Grössen $I_\alpha(P \,||\, Q)$ und $\varrho(P, Q)$ genügend klein ist. Damit haben wir auf den Fall $0 < \alpha < 1$ ein schärferes Resultat als die aus [3] Satz 3 folgende Relation $I_\alpha(P \,||\, Q) \leqq C_\alpha^* \sqrt{\varrho(P, Q)}$ erhalten.

Aus der von [3] Satz 3 folgenden Beziehung $\varrho(P, Q) \leqq C_\alpha \sqrt[3]{I_\alpha(P \,||\, Q)}$ und aus (8) folgt, dass die Informationsumgebungen eine Topologie, und zwar eine der durch die Variationsentfernung $\varrho(P, Q)$ erzeugten identische definieren.

Offenbar gelten für die J-Divergenz ähnliche Behauptungen.

Da also die Informations- bzw. Divergenzumgebungen der Ordnung $0 < \alpha < 1$ eine metrisierbare Topologie erzeugen, ergibt sich die Frage, ob ihre Metrisierung auch durch eine Funktion der Information bzw. der Divergenz erzielt werden kann.

Die Information $I_\alpha(P \,||\, Q)$ ist keine symmetrische Funktion von P und Q $\left(\text{ausgenommen für } \alpha = \frac{1}{2}\right)$. Daher ist die Metrisierung durch irgendeine Funktion von $I_\alpha(P \,||\, Q)$ im gewöhnlichen Sinne nicht möglich. Diese Schwierigkeit lässt sich jedoch in einer ziemlich natürlichen Weise überwinden, und zwar durch die Benützung des Begriffes der Quasientfernung (s. [5] § 13 etwas allgemeiner als Quasiabstand — »quasi-écart« — vgl. hier S. 164).

Eine auf einer Menge M definierte Funktion $\varphi(a, b)$ wird eine Quasientfernung genannt, falls sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$\varphi(a, b) > \varphi(a, a) = 0 \qquad (a \neq b) \tag{A}$$

$$\varphi(a, b) + \varphi(b, c) \geqq \varphi(a, c)\,. \tag{B}$$

Falls man hier auch die Symmetrie von $\varphi(a, b)$ erfordert, erhält man offenbar eine gewöhnliche Entfernung. (Das Problem der Metrisation einer Topologie durch eine (A) und (B) erfüllende nicht unbedingt symmetrische Funktion ist in [6] und [7] betrachtet.)

Bemerken wir, dass falls man an der rechten Seite von (B) $\varphi(a, c)$ durch $\varphi(c, a)$ ersetzt, sich eine gewöhnliche Entfernung — sogar wenn (A) durch die schwächere Forderung $\varphi(a, b) \neq \varphi(a, a) = 0$ ersetzt wird — ergibt, wie es sich einfach zeigen lässt.

Natürlicherweise erzeugt eine Quasientfernung ebenso eine Topologie, wie eine Entfernung.

Die natürliche Fragestellung bezüglich der Metrisation lautet also folgendermassen: man sucht eine Funktion der Information bzw. Divergenz der Ordnung $0 < \alpha < 1$, die eine — der durch die Informations- (Divergenz)umgebungen definierten identische Topologie erzeugende — Quasientfernung bzw. Entfernung über dem Raum der Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf (X, S) darstellt.

Die Existenz solcher Funktionen ist gar nicht trivial. Falls nämlich auf einer Menge E die durch eine Funktion $\varphi(x, y)$ $(x, y \in E)$ definierte Umgebungen

$$V(x, \varepsilon) = \{y : \varphi(x, y) < \varepsilon\}$$

eine metrisierbare Topologie definieren, ist damit die Existenz einer Funktion f, für die $f(\varphi(x, y))$ eine Quasientfernung darstellt, noch nicht gesichert. Für die Existenz einer solchen lässt sich eine allgemeine Bedingung geben, die aber in unserem Fall die Konstruktion nicht erleichtert, aus welchem Grunde auf diese Frage hier nicht eingegangen wird.

§ 2. Eine allgemeine Methode zur Herleitung weiterer Quasientfernungen aus gegebenen

In diesem Paragraphen werden allgemeine Beziehungen zwischen Quasientfernungen betrachtet und einige in den folgenden benötigten Zusammenhänge hergeleitet.

Schicken wir vor allem einen einfachen Hilfssatz voraus.

Hilfssatz 2. *Es seien H_1 und H_2 beliebige halbgeordnete Mengen, auf denen je eine ordungstreue Operation definiert ist (der Einfachheit halber wird auf beiden Mengen die Ordnungsrelation mit $\prec$ und die Operation mit $\circ$ bezeichnet), also*

$$u \circ v \prec u' \circ v' \quad \textit{falls} \quad u \prec u', \quad v \prec v' \qquad (u, v, u', v' \in H_i; i = 1, 2).$$

Ferner sei ψ eine Abbildung einer Teilmenge $K \subset H_1$ in H_2, die die folgende Eigenschaft besitzt:

$$\psi(w) \prec \psi(u) \circ \psi(v) \quad \textit{falls} \quad w \prec u \circ v \qquad (u, v, w \in K). \tag{9}$$

Ist dann M eine beliebige Menge und $t(a, b)$ eine Abbildung von $M \otimes M$ in K, die der abstrakten »Dreiecksungleichung«

$$t(a, c) \prec t(a, b) \circ t(b, c) \qquad (a, b, c \in M) \tag{10}$$

genügt, so genügt auch $\psi(t(a, b))$ der abstrakten Dreiecksungleichung, also

$$\psi(t(a, c)) \prec \psi(t(a, b)) \circ \psi(t(b, c)). \tag{11}$$

Beweis. (11) folgt unmittelbar aus (9) und (10).

Falls man in Hilfssatz 2 für H_1 eine Funktionenmenge, für H_2 die reelle Achse wählt und die Abbildung $t(a, b)$ mit Hilfe von gegebenen, die Dreiecksungleichung (B) befriedigenden Funktionen $\varphi_x(a, b)$ definiert, lässt sich aus Hilfssatz 2 eine allgemeine Methode zur Herstellung neuer Quasientfernungen

(Entfernungen) aus gegebenen ableiten. Dabei genügt es statt (9) etwas weniger vorauszusetzen, was für die folgenden auch von Bedeutung sein wird.

Es gilt nämlich der folgende

Satz 2. *Es sei X eine beliebige Menge und K eine Klasse der auf X definierten nichtnegativen Funktionen, für die mit $u(x)$, $v(x)$, $w(x) \in K$ auch $\frac{u(x)}{u(x)+v(x)} w(x) \in K$ gilt, falls die letztere Funktion für jedes $x \in X$ definiert ist*[2] *und $\psi(u(x))$ ein auf K definiertes Funktional, das die folgenden Eigenschaften besitzt:*

(C) $$\psi(u(x)) \leqq \psi(v(x)) \quad \textit{falls} \quad u(x) \leqq v(x) \ \textit{für jedes} \quad x \in X$$

(Monotonität)

(D) $$\psi(u(x)+v(x)) \leqq \psi(u(x)) + \psi(v(x)) \quad \text{falls} \quad u(x)+v(x) \in K$$

(Subadditivität).

Sind dann $\varphi_x(a, b)$ $(x \in X)$ auf einer beliebigen Menge M definierte, die Bedingung (B) *erfüllende nichtnegative Funktionen so dass $\varphi_x(a, b)$ als eine Funktion von x für jedes $a, b \in M$ zur Klasse K gehört, erfüllt auch die Funktion*

$$\varphi^*(a, b) = \psi(\varphi_x(a, b))$$

die Bedingung (B).

Beweis. Aus (C) und (D) folgt, dass im Falle $w(x) \leqq u(x) + v(x)$ $(u(x), v(x), w(x) \in K)$ die Ungleichung

(12) $$\psi(w(x)) \leqq \psi(u(x)) + \psi(v(x))$$

besteht (auch wenn $u(x) + v(x) \notin K$).

Setzen wir nämlich

$$u^*(x) = \frac{u(x)}{u(x)+v(x)} w(x), \qquad v^*(x) = \frac{v(x)}{u(x)+v(x)} w(x),$$

dann sind $u^*(x)$ und $v^*(x)$ für jedes $x \in X$ definiert (da im Falle $u(x) = v(x) = 0$ nach $0 \leqq w(x) \leqq u(x) + v(x)$ auch $w(x) = 0$ gelten muss) und gehören nach Voraussetzung zu K, also gilt wegen $w(x) = u^*(x) + v^*(x)$ nach (D) und (C)

(13) $$\psi(w(x)) \leqq \psi(u^*(x)) + \psi(v^*(x)) \leqq \psi(u(x)) + \psi(v(x)).$$

Aus (13) folgt unmittelbar mit der Wahl $u(x) = \varphi_x(a, b)$, $v(x) = \varphi_x(b, c)$, $w(x) = \varphi_x(a, c)$ die Behauptung des Satzes 2.

Folgerung 1. Wählen wir in Satz 2 das Funktional ψ derart, dass

(E) $$\psi(0) = 0, \quad \psi(u(x)) > 0 \quad \text{falls} \quad u(x) > 0 \quad \text{für jedes} \quad x \in X$$

---

[2] Falls für ein $x \in X$ $u(x) = v(x) = w(x) = 0$ ist, setzt man $\frac{u(x)}{u(x)+v(x)} w(x) = 0$.

gelte. Sind dann die Funktionen $\varphi_x(a, b)$ Quasientfernungen auf M, so ist auch $\varphi^*(a, b)$ eine Quasientfernung auf M; gilt hier $\varphi^*(a, b) = \varphi^*(b, a)$, so ist $\varphi^*(a, b)$ natürlich eine Entfernung; das ist z. B. der Fall, wenn schon $\varphi_x(a, b) = \varphi_x(b, a)$ gilt, also falls die Funktionen $\varphi_x(a, b)$ selbst Entfernungen sind.

Bemerkung. Eine nichtnegative Funktion $\varphi(a, b)$ heisst einen Quasiabstand auf M, falls sie die Bedingung (B) erfüllt, statt (A) jedoch nur $\varphi(a, a) = 0$ verlangt wird. Ein symmetrischer Quasiabstand wird einen Abstand genannt. Offenbar folgen aus Satz 2 für Quasiabstände (bzw. Abstände) $\varphi_x(a, b)$ zur Folgerung 1 analogische Behauptungen: die Funktion $\varphi^*(a, b)$ ist ein Quasiabstand (bzw. Abstand) — auch wenn statt (E) nur $\psi(0) = 0$ verlangt wird. Falls es dabei für jedes $a, b \in M$, $a \neq b$ wenigstens ein $x \in X$ mit $\varphi_x(a, b) \neq 0$ gibt (dann heisst die Funktionenmenge $\{\varphi_x(a, b) : x \in X\}$ eine Quasimetrik auf M) und $\psi(u(x)) = 0$ nur für $u(x) \equiv 0$ gilt, ist die Funktion $\varphi^*(a, b)$ eine Quasientfernung (bzw. Entfernung) auf M.

Folgerung 2. Es seien $\varphi_1(a, b), \ldots, \varphi_n(a, b)$ Quasientfernungen auf M und $\psi(u_1, \ldots, u_n)$ eine im n-dimensionalen Intervall $0 \leqq u_i \leqq \sup\limits_{a,b \in M} \varphi_i(a, b) = m_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ definierte Funktion mit den Eigenschaften

$$(\mathrm{C}') \quad \psi(u_1, \ldots, u_n) \leqq \psi(v_1, \ldots, v_n) \quad \text{für} \quad 0 \leqq u_i \leqq v_i \leqq m_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

(Monotonität)

$$(\mathrm{D}') \quad \psi(u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n) \leqq \psi(u_1, \ldots, u_n) + \psi(v_1, \ldots, v_n)$$
$$(0 \leqq \min(u_i, v_i) \leqq u_i + v_i \leqq m_i\,;\ i = 1, \ldots, n)$$

(Subadditivität)

$$(\mathrm{E}') \quad \psi(0, \ldots, 0) = 0, \ \psi(u_1, \ldots, u_n) > 0 \ \text{falls} \ u_i > 0 \ (i = 1, \ldots, n)\,.$$

Dann ist auch $\varphi^*(a, b) = \psi(\varphi_1(a, b), \ldots, \varphi_n(a, b))$ eine Quasientfernung auf M. Das folgt aus Folgerung 1 mit der Wahl

$$X = \{1, \ldots, n\}, \qquad K = \{(u_1, \ldots, u_n) : 0 \leqq u_i \leqq m_i\}\,.$$

Was die Symmetrie dieser Quasientfernung bzw. den Fall der Quasiabstände anbetrifft, sind natürlich die in Folgerung 1 bzw. in ihrer Bemerkung gesagten gültig.

Bemerkung. Aus Folgerung 2 ergibt sich als Spezialfall $(n = 1)$, dass falls $\varphi(a, b)$ eine Quasientfernung auf M und $\psi(u)$ eine monoton zunehmende, subadditive Funktion mit $\psi(0) = 0$ ist, so ist auch $\psi(\varphi(a, b))$ eine Quasientfernung auf M.

Es sei bemerkt, dass für die Subadditivität einer monoton zunehmenden Funktion $\psi(u)$ mit $\psi(0) = 0$ ihre Konkavität eine hinreichende Bedingung ist. Im folgenden wird häufig vorkommen, dass die Funktion $\psi(u)$ in der Form $\psi(u) = \psi_2(\psi_1^{-1}(u))$ gegeben wird, wobei $\psi_1(u)$ und $\psi_2(u)$ stetige und stückweise differenzierbare Funktionen mit $\psi_1(0) = \psi_2(0) = 0$ und $\psi_1'(u) > 0$, $\psi_2'(u) \geqq 0$ sind. Dann gilt

$$\psi'(u) = \frac{\psi_2'(\psi_1^{-1}(u))}{\psi_1'(\psi_1^{-1}(u))}$$

(wo die rechte Seite nur einen Sinn hat) und daher ist für die Konkavität von $\psi(u)$ notwendig und hinreichend, dass $\frac{\psi_2'(u)}{\psi_1'(u)}$ (wo es nur existiert) monoton abnimmt. Die letztere Bedingung ist also für die Subadditivität von $\psi(u)$ hinreichend.

Folgerung 3. Es sei (X, S) ein messbarer Raum, M^* eine Menge von σ-endlichen Massen auf (X, S), die durch ein σ-endliches Mass λ dominiert sind (also $\mu \ll \lambda$ für $\mu \in M^*$). Ist dann $\varphi(u, v)$ eine auf der Halbgeraden $[0, +\infty)$ definierte Quasientfernung, für welche

$$\varphi^*(\mu, \nu) = \left[\int_X \varphi^\omega \left(\frac{d\mu}{d\lambda}, \frac{d\nu}{d\lambda} \right) d\lambda \right]^{\frac{1}{\omega}} \qquad (\omega \geqq 1)$$

bei jedem $\mu \in M^*$, $\nu \in M^*$ existiert und endlich ist, so stellt $\varphi^*(\mu, \nu)$ eine Quasientfernung auf M^* dar.

Um das zu erhalten nehmen wir in Satz 2 K die Menge der endlichen nichtnegativen Funktionen $u(x)$ auf X, für welche $u^\omega(x)$ λ-summierbar ist, und für $u(x) \in K$

$$\psi(u(x)) = [\int_X u^\omega(x)\, d\lambda(x)]^{\frac{1}{\omega}}.$$

Dieses Funktional $\psi(u(x))$ besitzt offenbar (mit Rücksicht auf die Minkowskische Ungleichung) die Eigenschaften (C), (D), (E). M sei die Menge der Dichtefunktionen[3] $a(x) = \frac{d\mu}{d\lambda}$ ($\mu \in M^*$) und $\varphi_X(a, b) = \varphi(a(x), b(x))$ $(a(x), b(x) \in M)$. Dann ist nach Folgerung 2

$$\varphi^*(a(x), b(x)) = [\int_X \varphi^\omega(a(x), b(x))\, d\lambda(x)]^{\frac{1}{\omega}}$$

eine Quasientfernung auf M. Daraus folgt die Behauptung indem man $a(x) = \frac{d\mu}{d\lambda}$, $b(x) = \frac{d\nu}{d\lambda}$ setzt.

Folgerung 3 kann auch unmittelbar aus Hilfssatz 2 hergeleitet werden, indem man für $H_1 = K$ die Menge der nichtnegativen Funktionen $u(x)$ $(x \in X)$ mit λ-summierbarem $u^\omega(x)$, für H_2 die nichtnegative Halbgerade mit der natürlichen Anordnung wählt, für die Operation $\circ$ die Addition und für die Abbildung ψ

$$\psi(u) = [\int_X u^\omega(x)\, d\lambda]^{\frac{1}{\omega}} \tag{14}$$

setzt. Hierbei soll $M = M^*$ und $t(\mu, \nu) = \varphi\left(\frac{d\mu}{d\lambda}, \frac{d\nu}{d\lambda}\right)$ für $\mu, \nu \in M$ gewählt werden.

Da in den obigen eine Quasientfernung über der nichtnegativen Halbgeraden als bekannt vorausgesetzt wurde, scheint es von Interesse zu sein,

[3] Diese sind nur fast überall bezüglich λ eindeutig bestimmt, nun denken wir aber ihre Werte irgendwelcher Weise überall festgelegt und zwar so, dass für jedes $x \in X$ $0 \leq a(x) < \infty$ ist.

eine hinreichende Bedingung, dass eine Funktion eine Quasientfernung über einem Intervall sei, anzuführen.

Hilfssatz 3. *Es sei E ein offenes Intervall an der Zahlengeraden und $\varphi(u, v)$ eine auf dem Quadrat $E \otimes E$ definierte stetige Funktion, für die φ_{uv} bei $u \in E$, $v \in E$, $u \neq v$ existiert. Falls dann für $u \in E$, $v \in E$ die Bedingungen*

1) $$\varphi(u, u) = 0$$

2) $$\varphi_u(u, v) < 0 < \varphi_v(u, v) \qquad u < v$$

$$\varphi_v(u, v) < 0 < \varphi_u(u, v) \qquad u > v$$

3) $$\varphi_{uv}(u, v) \geqq 0 \qquad u \neq v$$

erfüllt sind, so ist $\varphi(u, v)$ eine Quasientfernung über E. Falls ferner E^* die Vereinigung von E mit einem oder beiden seiner Endpunkte bezeichnet und $\varphi(u, v)$ auch auf E^* stetig ist, so stellt sie auch auf E^* eine Quasientfernung dar. (Um einen Quasiabstand zu erhalten, genügt es in 2) statt $<$ nur $\leqq$ zu erfordern.)

Beweis. Offenbar genügt wegen der Stetigkeit von $\varphi(u, v)$ den Hilfssatz für E zu beweisen.

Es seien $u, v, w \in E$. Aus 1) und 2) folgt, dass die stetige Funktion $\varphi(u, v)$ die Bedingung (A) der Quasientfernung erfüllt. Ferner folgt aus 2), dass falls u zum festen v bzw. v zum festen u angenähert wird, die Funktion $\varphi(u, v)$ abnimmt. Das bedeutet aber, dass falls v die kleinste oder die grösste der Zahlen u, v, w ist, dann ist ein Glied an der linken Seite der Dreiecksungleichung (B) schon an sich grösser als die rechte Seite. Es ist also noch übrig, die Gültigkeit von (B) in den Fällen $u \leqq v \leqq w$ bzw. $w \leqq v \leqq u$ zu beweisen. Aus 3) folgt aber, dass φ_u bei festem u als eine Funkion von v nicht abnimmt, also ist $\varphi_u(u, w) - \varphi_u(u, v)$ nichtnegativ oder nichtpositiv je nachdem ob $u < v \leqq w$ oder $w \leqq v < u$ besteht. Daher ist $\varphi(u, w) - \varphi(u, v)$ für $u \leqq v \leqq w$ eine nicht abnehmende und für $w \leqq v \leqq u$ eine nicht zunehmende Funktion von u ($u = v$ kann hier wegen der Stetigkeit von $\varphi(u, v)$ zugelassen werden). Daraus folgt mit Rücksicht auf 1)

$$\varphi(u, w) - \varphi(u, v) \leqq \varphi(v, w),$$

also die Gültigkeit von (B) auch für die beiden Fälle $u \leqq v \leqq w$ bzw. $w \leqq v \leqq u$ w. z. b. w.

Bemerkung. Falls man in 3) die Gleichheit nicht zulässt, besteht die Gleichheit in der bewiesenen Dreiecksungleichung offenbar nur in den Fällen $u = v$ bzw. $v = w$.

§ 3. Informationsquasientfernungen

In § 1 wurde das Problem gestellt, ob sich eine Funktion f der Information der Ordnung α $(0 < \alpha < 1)$ finden lässt, für die $f(I_\alpha(P \| Q))$ eine Quasientfernung in Raum der Verteilungen auf (X, S) ist. Dabei möchte man solche Quasientfernungen herstellen, welche auch die durch die Informationsumgebungen $V_\alpha(Q, \varepsilon)$ definierte Topologie erzeugen. Daher wollen wir in den folgenden solche Funktionen f mit der obigen Eigenschaft angeben, die nichtabnehmend mit $f(u) > f(0) = 0$ für $u > 0$ und im Ursprung stetig sind.

Es ist leicht zu sehen, dass $I_\alpha(P \| Q)$ selbst keine Quasientfernung darstellen kann. Falls nämlich die drei Verteilungen P, Q, R so gewählt werden, dass $P \not\perp Q$, $Q \not\perp R$, $P \perp R$ ist, dann gilt $I_\alpha(P \| Q) < +\infty$, $I_\alpha(Q \| R) < +\infty$, $I_\alpha(P \| R) = +\infty$, also ist die Dreiecksungleichung für P, Q, R nicht erfüllt. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch keine Funktion $f\big(I_\alpha(P \| Q)\big)$ mit $f(u) < f(+\infty) = +\infty$ eine Quasientfernung darstellen kann. Es kann also keine Potenz $I_\alpha^\beta(P \| Q)$ der Information eine Quasientfernung sein (da für $\beta > 0$ die Funktion $f(u) = u^\beta$ der obigen Bedingung genügt, $\beta \leqq 0$ jedoch gar nicht in Betracht kommt, nämlich ist dann $I_\alpha^\beta(P \| P) = 0$ nicht erfüllt.)

Man kann jedoch noch vermuten, dass eine Funktion der Form

$$f(u) = \begin{cases} u^\beta & \text{für} \quad u \leqq c \\ c^\beta & \text{für} \quad u \geqq c \end{cases} \tag{15}$$

geeignet sein mag, um eine Quasientfernung zu erzeugen — da für solche $f(+\infty) < +\infty$ ist.

Zur Entscheidung dieser Frage genügt zu untersuchen, ob die Ungleichung

$$I_\alpha^\beta(P \| Q) + I_\alpha^\beta(Q \| R) \geqq \min\big(I_\alpha^\beta(P \| R), c^\beta\big) \tag{16}$$

im Falle $I_\alpha(P \| Q) \leqq c$, $I_\alpha(Q \| R) \leqq c$ mit genügend kleinem $c > 0$ besteht.

Für $\beta = 1$ lässt sich leicht zeigen, dass dies nicht der Fall sein kann. Setzen wir nämlich

$$P = (0, 1), \qquad Q_\delta = (\delta, 1 - \delta), \qquad R_\varepsilon = (\varepsilon, 1 - \varepsilon) \tag{17}$$

mit so kleinen $\delta > 0$ und $\varepsilon > 0$, dass schon $I_\alpha(P \| Q_\delta) \leqq c$, $I_\alpha(Q_\delta \| R_\varepsilon) \leqq c$, $I_\alpha(P \| R_\varepsilon) \leqq c$ gilt. Dann ist die Ungleichung (16) für (17) mit

$$(1 - \delta)^{1-\alpha}[\delta^\alpha \varepsilon^{1-\alpha} + (1 - \delta)^\alpha (1 - \varepsilon)^{1-\alpha}] \leqq (1 - \varepsilon)^{1-\alpha} \tag{18}$$

äquivalent. Eine einfache Rechnung zeigt, dass (18) dann und nur dann besteht, falls $\delta \geqq \varepsilon$ ist. Für $\beta > 1$ kann (16) mit Rücksicht auf die Bemerkung zur Folgerung 2 des Satzes 2 noch weniger gelten, da dann $I_\alpha(P \| Q)$ eine konkave Funktion von $I_\alpha^\beta(P \| Q)$ ist.

Für $0 < \beta < 1$ ist die Frage komplizierter, da in diesem Fall die Ungleichung (16) nicht auf Produktform gebracht werden kann. Da es sich jedoch hier um kleine Informationswerte handelt, scheint die Ersetzung der Informationen $I_\alpha(P \| Q)$ durch die annähernden Grössen

$$\frac{1}{1 - \alpha}\left(1 - \mathcal{J}_\alpha(P, Q)\right)$$

zweckmässig zu sein.

Also werden wir uns mit der Frage beschäftigen, ob die Grössen $\left(1 - \mathcal{J}_\alpha(P, Q)\right)^\beta$ die Dreiecksungleichung bei geeigneter Wahl von $\beta > 0$ (wenigstens für kleine Werte der $I_\alpha(P \| Q)$) erfüllen.

Betrachten wir zuerst wieder die diskreten Verteilungen (17), d. h.

$$P = (0, 1), \qquad Q_\delta = (\delta, 1 - \delta), \qquad R_\varepsilon = (\varepsilon, 1 - \varepsilon),$$

also untersuchen wir ob die Ungleichung

$$\left(1 - (1 - \delta)^{1-\alpha}\right)^\beta + \left(1 - \left(\delta^\alpha \varepsilon^{1-\alpha} + (1 - \delta)^\alpha (1 - \varepsilon)^{1-\alpha}\right)\right)^\beta \geqq \left(1 - (1 - \varepsilon)^{1-\alpha}\right)^\beta \tag{19}$$

gültig ist. Offenbar besteht sie für $\delta = 0$ mit der Gleichheit. Die partielle Ableitung der linken Seite nach δ ist

$$\beta(1-\alpha)\left(1-(1-\delta)^{1-\alpha}\right)^{\beta-1}(1-\delta)^{-\alpha}+$$
$$+\beta\left(1-\left(\delta^{\alpha}\varepsilon^{1-\alpha}+(1-\delta)^{\alpha}(1-\varepsilon)^{1-\alpha}\right)\right)^{\beta-1}\left(-\alpha\delta^{\alpha-1}\varepsilon^{1-\alpha}+\alpha(1-\delta)^{\alpha-1}(1-\varepsilon)^{1-\alpha}\right)^{\beta}.$$

Diese strebt für $\delta \to 0$ im Falle $\beta > \alpha$ bei jedem festen $\varepsilon > 0$ gegen $-\infty$ (da der erste Glied für $\delta \to 0$ asymptotisch gleich $K_1\,\delta^{\beta-1}$, der zweite aber $-K_2\,\delta^{\alpha-1}$ ist, vobei K_1 und K_2 positive — von α, β und ε abhängende — Konstanten sind). Also kann zu jedem $\varepsilon > 0$ die Zahl $\delta > 0$ derart gewählt werden, dass die Ungleichung (19) nicht gilt. Das bedeutet, dass die Dreiecksungleichung für die Grössen der Form $\left(1-\mathcal{J}_\alpha(P,Q)\right)^{\beta}$ mit $\beta > \alpha$ nicht einmal bei genügend kleinen Werten von $I_\alpha(P\,\|\,Q)$, $I_\alpha(Q\,\|\,R)$ und $I_\alpha(P\,\|\,R)$ allgemein gültig sein kann.

Ähnliches kann für $\beta > 1-\alpha$ mit der Wahl $P=(1,0)$, $Q=(1-\delta,\delta)$, $R=(1-\varepsilon,\varepsilon)$ in derselben Weise gezeigt werden.

Also gilt

Hilfssatz 4. *Die Funktion $\left(1-\mathcal{J}_\alpha(P,Q)\right)^{\beta}$ kann im Fall $\beta > \alpha' = \min(\alpha, 1-\alpha)$ die Dreiecksungleichung selbst für beliebig kleine Werte der Ausdrücke der Form $1-\mathcal{J}_\alpha(P,Q)$ (also auch der entsprechenden Informationen) nicht allgemein erfüllen.*

Daraus folgt schon dieselbe Behauptung auch für $I_\alpha(P\,\|\,Q)$. Falls nämlich die Dreiecksungleichung bezüglich I_α^β bei genügend kleinen I_α-Werten gültig wäre, so müsste sie nach der Bemerkung zur Folgerung 2 des Satzes 2 auch für $(1-\mathcal{J}_\alpha)^\beta$ (bei genügend kleinem I_α) gelten, was aber für $\beta > \alpha' = \min(\alpha, 1-\alpha)$ in Widerspruch mit den bewiesenen ist. Hier haben wir benützt, dass die Grössen $I_\alpha^\beta(P\,\|\,Q)$ und $\left(1-\mathcal{J}_\alpha(P,Q)\right)^\beta$ aus $(1-\alpha)\,I_\alpha(P\,\|\,Q) = -\log\mathcal{J}_\alpha(P,Q)$ durch die Funktionen $\psi_1(u) = \left(\frac{u}{1-\alpha}\right)^\beta$ bzw. $\psi_2(u) = (1-e^{-u})^\beta$ entstehen, wobei

$$\frac{\psi_2'(u)}{\psi_1'(u)} = (1-\alpha)^\beta\left(\frac{u}{e^{\frac{u}{1-\beta}}(1-e^{-u})}\right)^{1-\beta} = (1-\alpha)^\beta(1-\beta)^{1-\beta}\left(\frac{\dfrac{u}{1-\beta}}{e^{\frac{u}{1-\beta}}-e^{\beta\frac{u}{1-\beta}}}\right)^{1-\beta} \tag{20}$$

wegen des Zunehmens der Funktion

$$\frac{e^u-e^{\beta u}}{u} = e^{\beta u}\,\frac{e^{(1-\beta)u}-1}{u} = e^{\beta u}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-\beta)^k}{k!}\,u^{k-1} \tag{21}$$

monoton abnimmt.

Was nun den Fall $\beta \leqq \alpha'$ anbetrifft, beweisen wir zuerst den folgenden grundlegenden Satz:

Satz 3. *Die Grösse*

$$\Delta_\alpha(P,Q) = \left(1-\mathcal{J}_\alpha(P,Q)\right)^{\alpha'} \qquad \left(\alpha' = \min(\alpha, 1-\alpha),\ 0<\alpha<1\right) \tag{22}$$

stellt eine Quaisentfernung im Raum der Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf (X, S) dar. Also lässt sich die durch die Informationsumgebungen $V_\alpha^*(Q,\varepsilon)$ erzeugte Topologie in dem in § 1 angedeuteten Sinne metrisiert werden.

Allgemeiner ist die — von der Wahl des dominierenden Masses unabhängige — Grösse

$$\Delta_\alpha(P,Q) = \left(\alpha P(X) + (1-\alpha)\, Q(X) - \int_X p^\alpha q^{1-\alpha}\, d\lambda\right)^{\alpha'} \tag{23}$$

eine Quasientfernung im Raum der endlichen Masse auf (X, S).

(Die Tatsache, dass der Ausdruck $(1 - \int_X p^\alpha q^{1-\alpha}\, d\lambda)^{\alpha'}$ und allgemeiner die für beliebige nichtnegative λ-summierbare Funktionen $u(x)$, $v(x)$ definierte Funktional

$$\left(\alpha \int_X u(x)\, d\lambda(x) + (1-\alpha) \int_X v(x)\, d\lambda(x) - \int_X u^\alpha(x)\, v^{1-\alpha}(x)\, d\lambda(x)\right)^{\alpha'}$$

der Dreiecksungleichung genügt, wurde von Herrn J. Czipszer [4] erkannt. Für die liebenswürdige Erlaubnis der Publikation möchten ihm die Verfasser ihre Dankbarkeit aussprechen. Hier wird im wesentlichen der Beweis von Herrn J. Czipszer angeführt; unsere Modifikation besteht nur darin, dass der Beweis in die allgemeine Theorie eingebaut wurde.)

Bemerkung. Im Spezialfall $\alpha = \dfrac{1}{2}$ wurde die Entfernungseigenschaft von (22) schon von Bhattacharyya [8] erkannt. In diesem Falle ist die oben eingeführte Grösse $\Delta_\alpha(P, Q)$ im wesentlichen die Entfernung der Masse P und Q in einem Hilbertschen Raum der endlichen signierten Masse auf (X, S). Um diesen zu erhalten, führen wir die Operationen folgendermassen ein: Zu zwei endlichen signierten Massen P und Q wählen wir ein dominierendes Mass λ und setzen $p = \dfrac{dP}{d\lambda}$, $q = \dfrac{dQ}{d\lambda}$. Die Operationen des Hilbertschen Raumes definieren wir als die für $\operatorname{sg} p \cdot \sqrt{|p|}$ und $\operatorname{sg} q \cdot \sqrt{|q|}$ im Raum $L^2(X, S, \lambda)$, also die Addition durch

$$(P \oplus Q)(A) = \int_A \operatorname{sg}\left(\operatorname{sg} p \cdot \sqrt{|p|} + \operatorname{sg} q \cdot \sqrt{|q|}\right)\left(\operatorname{sg} p \cdot \sqrt{|p|} + \operatorname{sg} q \cdot \sqrt{|q|}\right)^2 d\lambda \quad (A \in S),$$

die Multiplikation mit einem Skalar m durch

$$(m \odot P)(A) = \int_A \operatorname{sg}(mp)\left(m \operatorname{sg} p \cdot \sqrt{|p|}\right)^2 d\lambda \quad (A \in S), \text{ also } m \odot P = m\,|m|\,P,$$

das Skalarprodukt durch

$$\langle P, Q\rangle = \int_X \operatorname{sg} p \cdot \sqrt{|p|} \cdot \operatorname{sg} q \cdot \sqrt{|q|}\, d\lambda = \int_X \operatorname{sg}(pq) \cdot \sqrt{|pq|}\, d\lambda$$

und daher die Norm durch $\| P \| = \sqrt{\int_X |p|\, d\lambda} = \sqrt{|P|(X)}$.

Diese Operationen sind von der Wahl des dominierenden Masses λ offenbar unabhängig und befriedigen die Axiomen des Hilbertschen Raumes. Man sieht leicht, dass der dadurch definierte Hilbetsche Raum bei beliebigem (X, S) vollständig ist; für abzählbares X ist er sogar separabel und auch einem L^2-Raum isomorph.

Für gewöhnliche Masse P und Q gilt nun in diesem Raum

$$\|P \ominus Q\| = \sqrt{\int_X (\sqrt{p} - \sqrt{q})^2\, d\lambda} = \sqrt{2}\, \Delta_{\frac{1}{2}}(P, Q).$$

Wir möchten noch die Bemerkung machen, dass im obigen Raum zwei gewöhnliche Masse P und Q genau dann orthogonal sind, falls $P \perp Q$ im Sinne der Masstheorie gilt. Ferner ist ein gewöhnliches Mass genau dann eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, falls es am Einheitskugel liegt.

Beweis des Satzes 3. In der Dreiecksungleichung bezüglich (23) für die Masse P, Q und R ist die Ersetzung von α durch $1 - \alpha$ mit der Vertauschung von P und R äquivalent. Daher genügt die Quasientfernungseigenschaft von (23) für $0 < \alpha \leqq \frac{1}{2}$ zu verifizieren.

Um die Ungleichung

$$\begin{aligned}(\alpha \int_X p d\lambda + (1-\alpha) \int_X q d\lambda - \int_X p^\alpha q^{1-\alpha} d\lambda)^\alpha &+ \\ + (\alpha \int_X q d\lambda + (1-\alpha) \int_X r d\lambda - \int_X q^\alpha r^{1-\alpha} d\lambda)^\alpha &\geqq \\ \geqq (\alpha \int_X p d\lambda + (1-\alpha) \int_X r d\lambda - \int_X p^\alpha r^{1-\alpha} d\lambda)^\alpha&\end{aligned}$$

zu beweisen (wobei P, Q und R beliebige, durch λ dominierte Masse bedeuten und $0 < \alpha \leqq \frac{1}{2}$ ist), reicht mit Rücksicht auf Folgerung 3 des Satzes 2 aus, die Quasientfernungseigenschaft der Funktion

$$\varphi(u, v) = \left(\alpha u + (1-\alpha) v - u^\alpha v^{1-\alpha}\right)^\alpha \qquad \left(0 < \alpha \leqq \frac{1}{2}\right) \tag{24}$$

über der nichtnegativen Halbgeraden einzusehen.

Dass $\varphi(u, v)$ für $u \geqq 0, v \geqq 0$ stets definiert ist, folgt aus der Ungleichung zwischen den arithmetischen und geometrischen Mitteln. Ferner ist $\varphi(u, v)$ für $u \geqq 0$, $v \geqq 0$ offenbar stetig und seine zweite gemischte Ableitung für $u > 0$, $v > 0$, $u \neq v$ existiert. Also genügt zu zeigen, dass die Funktion (24) die Bedingungen 1) bis 3) des Hilfssatzes 3 erfüllt $\left(\text{mit } E = (0, +\infty)\right)$.

Die Gültigkeit von 1) ist trivial. Ferner gilt

$$\begin{aligned}\varphi_u &= \alpha^2\left(\alpha u + (1-\alpha) v - u^\alpha v^{1-\alpha}\right)^{\alpha-1} (1 - u^{\alpha-1} v^{1-\alpha}), \\ \varphi_v &= \alpha(1-\alpha)\left(\alpha u + (1-\alpha) v - u^\alpha v^{1-\alpha}\right)^{\alpha-1} (1 - u^\alpha v^{-\alpha}),\end{aligned}$$

woraus 2) unmittelbar folgt.

Was 3) anbetrifft, ist

$$\begin{aligned}\varphi_{uv} = \alpha^2(1-\alpha)&\left(\alpha u + (1-\alpha) v - u^\alpha v^{1-\alpha}\right)^{\alpha-2} \times \\ &\times [\alpha u^{2\alpha-1} v^{1-2\alpha} + (1-2\alpha) u^\alpha v^{-\alpha} - (1-\alpha)],\end{aligned} \tag{25}$$

was sich durch einfache Rechnung ergibt.

Setzen wir $u^\alpha v^{-\alpha} = x$. Dann ist der letzte Faktor der rechten Seite von (25) gleich

$$\alpha x^{2-\frac{1}{\alpha}} + (1 - 2\alpha) x - (1-\alpha).$$

Dieser Ausdruck ist aber für $0 < \alpha \leqq \frac{1}{2}$ nichtnegativ, da die Gerade $y = -(1-2\alpha)x + (1-\alpha)$ eine Tangente der konvexen Kurve $y = \alpha x^{2-\frac{1}{\alpha}}$

ist (und sie im Punkte $(1, \alpha)$ berührt). Daraus sieht man gleich, dass φ_{uv} im Falle $0 < \alpha \leqq \frac{1}{2}$ nichtnegativ (für $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ sogar streng positiv) ist.

Damit ist die Quasientfernungseigenschaft von (24) und dadurch auch Satz 3 vollständig bewiesen.

Für $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ersieht man auch, mit Rücksicht auf die Bemerkung zu Hilfssatz 3, dass die Gleichheit in der Dreiecksungleichung bezüglich $\Delta_\alpha(P, Q)$ für P, Q und R nur in den Fällen $P = Q$ bzw. $Q = R$ besteht. Dass diese Behauptung auch für $\alpha = \frac{1}{2}$ gültig ist, folgt am einfachsten aus der Bemerkung dieses Satzes.

Folgerung. Die Grösse $(1 - \mathcal{J}_\alpha^\gamma(P, Q))^\beta$ ist für jede $0 < \beta \leqq \alpha' = \min(\alpha, 1 - \alpha)$ und $\gamma \geqq 1$ eine Quasientfernung im Raume der Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf (X, S).

Beweis. Für $\gamma = 1$ ist die Folgerung mit Rücksicht auf die Bemerkung zur Folgerung 2 des Satzes 2 trivial, da $(1 - \mathcal{J}_\alpha(P, Q))^\beta$ die $\frac{\beta}{\alpha'}$ -te Potenz, also für $0 < \beta < \alpha'$ eine konkave Funktion von $\Delta_\alpha(P, Q)$ ist. Was den Fall $\gamma > 1$ anbetrifft, genügt nach der erwähnten Bemerkung zu zeigen, dass — mit der Bezeichnung $\psi_1(u) = u^\beta$, $\psi_2(u) = (1 - (1 - u)^\gamma)^\beta$ — der Quotient $\frac{\psi_2'(u)}{\psi_1'(u)}$ im Intervalle $(0, 1)$ monoton abnimmt. (Die Bemerkung wird auf die Funktionen $\psi_1(u)$ und $\psi_2(u)$ mit der Substitution $u = 1 - \mathcal{J}_\alpha(P, Q)$ angewendet). Da

$$\frac{\psi_2'(u)}{\psi_1'(u)} = \gamma \frac{(1 - (1 - u)^\gamma)^{\beta - 1} (1 - u)^{\gamma - 1}}{u^{\beta - 1}} = \gamma \left[\frac{u(1 - u)^{\frac{\gamma - 1}{1 - \beta}}}{1 - (1 - u)^\gamma} \right]^{1 - \beta}$$

ist, soll man dazu das Abnehmen der Funktion

$$f(u) = \frac{u(1 - u)^\vartheta}{1 - (1 - u)^\gamma} \qquad \left(\vartheta = \frac{\gamma - 1}{1 - \beta} > 0\right)$$

verifizieren. Eine einfache Rechnung ergibt

$$f'(u) = \frac{(1 - u)^{\vartheta - 1}}{[1 - (1 - u)^\gamma]^2} \left(1 - (1 + \vartheta) u + (\vartheta - \gamma) u (1 - u)^\gamma - (1 - u)^{\gamma + 1}\right),$$

also ist das Vorzeichen von $f'(u)$ $(0 < u < 1)$ gleich dem Vorzeichen der Funktion $g(u) = 1 - (1 + \vartheta) u + (\vartheta - \gamma) u (1 - u)^\gamma - (1 - u)^{\gamma + 1}$. Hier ist $g(0) = g'(0) = 0$, $g(1) = -\vartheta < 0$, ferner gilt wegen

$$g''(u) = \gamma (1 - u)^{\gamma - 2} [(1 + \gamma\vartheta + \vartheta - \gamma^2) u - (2\vartheta - \gamma + 1)]$$

$g''(0) = -\gamma(2\vartheta - \gamma + 1) < 0$ (da $\vartheta = \frac{\gamma - 1}{1 - \beta} > \gamma - 1 > 0$ ist) und die Funktion $g(u)$ kann im Intervall $(0, 1)$ höchstens eine Inflexion besitzen. Daraus folgt schon, dass die Kurve $g(u)$ im Intervall $(0, 1)$ unter der Abszissenachse liegt.

Damit ist das Abnehmen der Funktion $f(u)$ und dadurch auch die Folgerung vollständig bewiesen.

Für $0 < \gamma < 1$ $(0 < \beta \leqq \alpha')$ ist das Problem, ob und bei welchen Werten von γ $\left(1-\mathcal{J}_\alpha^\gamma(P, Q)\right)^\beta$ eine Quasientfernung darstellt, noch nicht entschieden. Hier sei nur behauptet, dass man zu jedem $\beta > 0$ ein so kleines $\gamma > 0$ wählen kann, dass der obige Ausdruck schon keine Quasientfernung ist.

Betrachte man nämlich die Verteilungen $P=(1, 0)$, $Q=(a, b)$ $(a + b = 1)$, $R = (0, 1)$. Falls $\left(1 - \mathcal{J}_\alpha^\gamma(P, Q)\right)^\beta$ eine Quasientfernung ist, soll für diese

$$(1 - a^{\gamma(1-\alpha)})^\beta + (1 - b^{\gamma\alpha})^\beta \geqq 1 \tag{26}$$

gelten. Für genügend kleines $\gamma > 0$ kann dies jedoch nicht mehr zutreffen, da die linke Seite von (26) für $\gamma \to 0$ gegen 0 strebt.

Bemerken wir jedoch, dass falls die Grösse $\left(1 - \mathcal{J}_\alpha^\gamma(P, Q)\right)^\beta$ mit einem $\gamma > 0$ eine Quasientfernung darstellt, so gilt dies auch für jedes $\gamma' > \gamma$. Das kann mit Hilfe der im Beweis der Folgerung des Satzes 3 benützten Funktionen $\psi_1(u)$ und $\psi_2(u)$ eingesehen werden, bloss soll man γ durch $\frac{\gamma'}{\gamma}$ und die Substitution $u = 1 - \mathcal{J}_\alpha(P, Q)$ durch $u = 1 - \mathcal{J}_\alpha^\gamma(P, Q)$ ersetzen.

Die bisherigen Betrachtungen ermöglichen eine ziemlich ausführliche Diskussion der am Anfang dieses Paragraphen gestellten Frage über die Funktionen der Form (15) von $I_\alpha(P \| Q)$. Es gilt nämlich

Satz 4. *Im Falle* $0 < \beta < \alpha' = \min(\alpha, 1 - \alpha)$ $(0 < \alpha < 1)$ *lässt sich immer eine (von* α *und* β *abhängende) Konstante* $c > 0$ *derart angeben, dass*

$$\min\left(I_\alpha^\beta(P \| Q), c^\beta\right) \tag{27}$$

eine Quasientfernung im Raume der Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist.

Im Falle $\beta > \alpha'$ *jedoch ist dies nicht möglich.*

Beweis. Die negative Behauptung ist bereits bewiesen. Die positive Behauptung lässt sich aus Satz 3 hergeleitet werden. Dazu genügt es mit Rücksicht auf die Bemerkung zur Folgerung 2 des Satzes zu zeigen, dass für die Funktionen

$$\psi_1(u) = (1 - e^{-u})^{\delta_1}, \quad \psi_2(u) = \left(\frac{u}{1-\alpha}\right)^{\delta_2} \qquad (0 < \delta_2 < \delta_1 < 1)$$

der Quotient $\frac{\psi_2'(u)}{\psi_1'(u)}$ im Intervall $(0, \eta)$ monoton abnimmt, falls $\eta > 0$ genügend klein ist. (Nämlich ist bei $\delta_1 = \alpha'$, $\delta_2 = \beta$ mit $u = (1 - \alpha) I_\alpha(P \| Q)$

$$\psi_1(u) = \left(1 - \mathcal{J}_\alpha(P, Q)\right)^{\alpha'}, \quad \psi_2(u) = I_\alpha^\beta(P \| Q)\,.)$$

Durch Differenzieren der beiden Funktionen $\psi_1(u)$ und $\psi_2(u)$ erhält man

$$\frac{\psi_2'(u)}{\psi_1'(u)} = \frac{\delta_2}{(1-\alpha)^{\delta_2}\,\delta_1(1-\delta_1)^{1-\delta_2}} \left(\frac{e^{\frac{u}{1-\delta_1}} - e^{\delta_1\frac{u}{1-\delta_1}}}{\left(\frac{u}{1-\delta_1}\right)^\tau}\right)^{1-\delta_1} \qquad \left(\tau = \frac{1-\delta_2}{1-\delta_1} > 1\right).$$

Da mit der Bezeichnung $g(u) = \dfrac{e^u - e^{\delta_1 u}}{u^\tau}$

$$(28) \qquad g'(u) = \frac{e^u - \delta_1 e^{\delta_1 u} - \tau u^{-1}(e^u - e^{\delta_1 u})}{u^\tau}$$

gilt, erhält man $\lim\limits_{u \to +0} u^\tau g'(u) = (1 - \delta_1)(1 - \tau) < 0$. Das bedeutet aber, dass die Funktion $g(u)$ und damit auch $\dfrac{\psi_2'(u)}{\psi_1'(u)}$ in einem genügend kleinen Intervall $(0, \eta)$ monoton abnimmt, wodurch Satz 4 bewiesen ist.

Es sei bemerkt, dass die Frage, ob ein Ausdruck der Form $\min(I_a^\beta(P \,||\, Q), c^\beta)$ auch für $\beta = \alpha' = \min(\alpha, 1 - \alpha)$ eine Quasientfernung darstellen kann, noch offen ist (mit der Ausnahme des Falles $\alpha = 1/2$, s. am Ende dieses Paragraphen). Mit der obigen Methode kann diese Frage darum nicht entschieden werden, weil im Falle $\delta_1 = \delta_2 = \beta$, also $\tau = 1$ der Quotient $\dfrac{\psi_2'(u)}{\psi_1'(u)}$ selbst für kleine Werte von u zunimmt (vgl. (20) — mit verkehrter Bezeichnung).

Durch den Bewiesenen kann die Frage, ob vielleicht die Grösse $(1 - \mathcal{J}_a^\gamma(P, Q))^\beta$ bei irgendwelchem γ auch für ein $\beta > \alpha'$ eine Quasientfernung darstellt, bereits negativ beantwortet werden. Falls man nämlich in den im Beweis des Satzes 4 auftretenden Funktionen $\psi_1(u)$ bzw. $\psi_2(u)$ mit $\delta_1 = \beta$ und $\delta_2 = \delta < \beta$ $\quad u = \gamma(1 - \alpha)\, I_a(P \,||\, Q)$ setzt, ergibt sich

$$\psi_1(u) = (1 - \mathcal{J}_a^\gamma(P, Q))^\beta, \quad \psi_2(u) = \gamma^\delta I_a^\delta(P \,||\, Q)\,.$$

Also folgt aus dem Abnehmen von $\dfrac{\psi_2'(u)}{\psi_1'(u)}$ für kleine Werte[4] von u nach der Bemerkung zur Folgerung 2 des Satzes 2, dass falls $(1 - \mathcal{J}_a^\gamma(P, Q))^\beta$ für genügend kleine Informationswerte die Dreiecksungleichung befriedigt, so gilt dasselbe auch für $I_a^\delta(P \,||\, Q)$ $(0 < \delta < \beta)$. Falls aber $\beta > \alpha'$ ist, erhält man daraus z. B. mit der Wahl $\delta = \dfrac{\alpha' + \beta}{2}$ einen Widerspruch. (Es sei erwähnt, dass die eben bewiesene negative Behauptung auch mit Hilfe des an der Seite 167 angeführten Gegenbeispiels einfach zu verifizieren ist).

Auf Grund derselben Methode kann gezeigt werden, dass bei $\beta < \alpha'$ zu beliebigem $\gamma > 0$ stets eine positive Zahl c_γ (die auch von β und α' abhängt) derart gewählt werden kann, dass

$$(29) \qquad \min\left[(1 - \mathcal{J}_a^\gamma(P, Q))^\beta, c_\gamma^\beta\right]$$

eine Quasientfernung darstellt (wobei für genügend kleines $\gamma > 0$ bestimmt $c_\gamma < 1$ sein muss, vgl. die über (26) gesagten). Dies folgt nämlich nach der Bemerkung zur Folgerung 2 des Satzes 2 aus der Behauptung des Satzes 4, nach welcher (27) eine Quasientfernung ist, und aus (20) — mit der Substitution $u = (1 - \alpha)\gamma\, I_a(P \,||\, Q)$ in den dortigen Funktionen $\psi_1(u)$ und $\psi_2(u)$.

---

[4] Oben wurde das Abnehmen von $\dfrac{\psi_2'(u)}{\psi_1'(u)}$ $(0 < \delta_2 < \delta_1)$ bei kleinen u-Werten nur für $\delta_1 < 1$ gezeigt. Ebenso leicht verifiziert man es aber auch für $\delta_1 \geqq 1$.

Aus den obigen sieht man auch, dass für die Konstan te c_γ die Zah

(30) $$c_\gamma = 1 - e_{-(1-\alpha)\gamma c}\,,$$

also für $\gamma \to 0$ $c_\gamma \sim (1-\alpha)\,\gamma\, c$ gewählt werden kann, wobei c die Konstante in (27) bedeutet.

Umgekehrt folgt daraus, dass (29) mit $c_\gamma = (1-\alpha)\,\gamma\, c$ (wobei $c > 0$ beliebig ist) wenigstens für genügend kleine γ-Werte eine Quasientfernung darstellt, die Quasientfernungseigenschaft von (27) mit diesem c. Nämlich ist $\lim\limits_{\gamma\to 0} \dfrac{1-x^\gamma}{\gamma} = -\log x$, also kann die Dreiecksungleichung für $\min\left(I_\alpha^\beta(P\,||\,Q), c^\beta\right)$ aus derselben für $\min\left(\left(1-\mathcal{J}_\alpha^\gamma(P,Q)\right)^\beta; (1-\alpha)^\beta \gamma^\beta c^\beta\right)$ durch den Grenzübergang $\gamma \to 0$ hergeleitet werden. Falls wir also mit $\bar{c}$ bzw. $\bar{c}_\gamma$ die grösstmöglichen Konstanten c bzw. c_γ in (27) bzw. (29) bezeichnen, so gilt offenbar

(31) $$\bar{c} = \varliminf_{\gamma\to 0} \frac{\bar{c}_\gamma}{\gamma}\,.$$

Bemerken wir noch, dass die Frage, ob eine Grösse der Form $\min\left(\left(1-\mathcal{J}_\alpha^\gamma(P,Q)\right)^{\alpha'}, c_\gamma^\alpha\right)$ mit $0 < \gamma < 1$ der Dreiecksungleichung genügen kann, ebenso wie das analoge Problem für $I_\alpha(P\,||\,Q)$ selbst, im allgemeinen noch nicht entschieden ist.

Die bisher betrachteten Informationsentfernungen wurden aus Satz 3 auf Grund des Satzes 2 hergeleitet. Man könnte leicht daran denken, dass dies mit allen möglichen Quasientfernungen der Fall ist. Zum Abschluss dieses Paragraphen möchten wir jedoch ein spezielles Gegenbeispiel anführen, und zwar für $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Die Grösse

(32) $$\operatorname{arc\,cos} \mathcal{J}_\alpha(P,Q)$$

genügt nämlich im Spezialfall $\alpha = \dfrac{1}{2}$ der Dreiecksungleichung, da sie dann offenbar der Winkel im Hilbertschen Raum der endlichen signierten Masse (s. Bemerkung des Satzes 3) zwischen den — am Einheitskugel liegenden — Verteilungen P und Q ist.

Diese Quasientfernung (die sogar eine Entfernung ist) kann aber aus Satz 3 mit unseren üblichen Methoden nicht abgeleitet werden, da sie aus $\left(1-\mathcal{J}_{\frac{1}{2}}(P,Q)\right)^{\frac{1}{2}}$ durch die streng konvexe — also keineswegs subadditive — Funktion $\psi(u) = 2 \operatorname{arc\,sin} \dfrac{u}{\sqrt{2}}$ erzeugt werden kann. Die Grösse (32) — mit $\alpha = \dfrac{1}{2}$ — ist sogar eine in gewissem Sinne möglichst schärfste Entfernung, indem sie keine streng subadditive Funktion anderer Entfernungen sein kann (wobei die strenge Subadditivität bedeutet, dass die Gleichheit in (D′) nur dann besteht, wenn entweder alle u_i oder alle v_i gleich Null sind). Diese Eigenschaft folgt unmittelbar daraus, dass in der Dreiecksungleichung bezüglich (32) für $\sqrt{q} = \varkappa_1 \sqrt{p} + \varkappa_2 \sqrt{r}$ $(\varkappa_1 \geqq 0, \varkappa_2 \geqq 0)$ die Gleichheit gilt (wenn also der zugrunde liegende Raum X nur aus zwei Punkten besteht, gilt für beliebige drei Verteilungen auf X bei ihrer geeigneten Reihenfolge stets die Gleichheit). Bei den anderen in dieser Arbeit angeführten Quasientfernungen (Entfernungen) kann jedoch die Gleichheit in der Dreiecksungleichung nur in den Fällen $P = Q$ bzw. $Q = R$ bestehen, was eine unmittelbare Folge der Tatsache ist, dass sie aus $\Delta_\alpha(P, Q)$ mittels subadditiver Funktionen hergeleitet werden können.

Als eine Folge der gesagten sei erwähnt, dass im Falle $\alpha = \frac{1}{2}$ genau dann eine Entfernung der Form $\min\left((1-\mathcal{J}^{\gamma}_{\frac{1}{2}}(P, Q))^{\frac{1}{2}}, c^{\frac{1}{2}}_{\gamma}\right)$ existiert, falls $\gamma > \frac{2}{3}$ ist[5] — nämlich entsteht $(1-\mathcal{J}^{\gamma}_{\frac{1}{2}}(P, Q))^{\frac{1}{2}}$ aus (32) durch die Funktion $\psi(u) = (1 - \cos^{\gamma} u)^{\frac{1}{2}}$, die für genügend kleine Werte von u bei $0 < \gamma \leqq \frac{2}{3}$ streng konvex (also die inverse Funktion streng konkav und um so mehr streng subadditiv), bei $\gamma > \frac{2}{3}$ dagegen konkav ist. Um so weniger kann eine Grösse der Form $\min\left(I^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}}(P \| Q), c^{\frac{1}{2}}\right)$ eine Entfernung sein. Dadurch haben wir die Lösung der im Vorigen gestellten Probleme im Spezialfall $\alpha = \frac{1}{2}$ angegeben, und zwar in negativem Sinne. Die Verfasser vermuten jedoch, dass für $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ die eben erwähnten Fragen positiv zu beantworten sind.

§ 4. Informations- und Divergenzentfernungen

Wie bereits erwähnt wurde, kann wegen der Asymmetrie der Informationsgrösse $I_\alpha(P \| Q)$ $\left(\alpha \neq \frac{1}{2}\right)$ keine ihrer Funktionen eine Entfernung darstellen. Es besteht jedoch die Möglichkeit, durch symmetrische Funktionen von $I_\alpha(P \| Q)$ und $I_\alpha(Q \| P)$ Entfernungen im Raum der Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu erzeugen. Falls z. B. $f(I_\alpha(P \| Q))$ eine Quasientfernung ist, so sind die Grössen

$$f(I_\alpha(P \| Q)) + f(I_\alpha(Q \| P))$$

bzw.

$$\max\left[f(I_\alpha(P \| Q)), f(I_\alpha(Q \| P))\right]$$

offenbar Entfernungen. Diese sind die beiden Grenzfälle $\omega = 1$ bzw. $\omega = +\infty$ der Informationsentfernungen der Form

$$[f^{\omega}(I_\alpha(P \| Q)) + f^{\omega}(I_\alpha(Q \| P))]^{\frac{1}{\omega}} \tag{33}$$

---

[5] Für $0 < \gamma \leqq \frac{2}{3}$ gilt die Dreiecksungleichung nicht einmal für die Verteilungen der Form (17), falls nur $\delta > 0$ genügend klein ist, wie es den an der Seite 168 gesagten ähnlich leicht zu zeigen ist.

(wobei $f\big(I_\alpha(P\,\|\,Q)\big)$ eine beliebige Informationsquasientfernung bedeutet), deren Entfernungseigenschaft aus Folgerung 2 des Satzes 2 mit der Wahl $\psi(u_1, u_2) = (u_1^\omega + u_2^\omega)^{\frac{1}{\omega}}$ folgt, berücksichtigend, dass dieses $\psi(u_1, u_2)$ nach der Minkowskischen Ungleichung subadditiv ist.

Falls man in (33) speziell

$$f\big(I_\alpha(P\,\|\,Q)\big) = \big(1 - \mathcal{I}_\alpha(P, Q)\big)^{\alpha'} = \varDelta_\alpha(P, Q)$$

(vgl. Satz 3) und $\omega = \dfrac{1}{\alpha'}$ setzt, ergibt sich, dass die Grösse

$\big(2 - \mathcal{I}_\alpha(P, Q) - \mathcal{I}_\alpha(Q, P)\big)^{\alpha'}$ und damit auch $\left(1 - \dfrac{\mathcal{I}_\alpha(P, Q) + \mathcal{I}_\alpha(Q, P)}{2}\right)^{\alpha'}$

eine Entfernung darstellt.

Obzwar wir einige Informationsentfernungen bereits angeben konnten, wäre zur positiven Beantwortung der in § 1 gestellten Frage die Herleitung einer Informationsentfernung, die eine Funktion der Divergenz ist, nötig. In dieser Hinsicht können wir folgendes behaupten:

Satz 5. *Die durch die Divergenzumgebungen* $V_\alpha^*(Q, \varepsilon)$ $(0 < \alpha < 1)$ *erzeugte Topologie kann durch eine Funktion der Divergenz der Ordnung* α *metrisiert werden; eine solche Funktion ist*

$$(34)\qquad \varDelta_\alpha^*(P, Q) = \big(1 - \mathcal{I}_\alpha(P, Q)\,\mathcal{I}_\alpha(Q, P)\big)^{\alpha'} = \big(1 - e^{-(1-\alpha)J_\alpha(P, Q)}\big)^{\alpha'}$$

$$\big(\alpha' = \min(\alpha, 1 - \alpha)\big).$$

Beweis. Die Entfernunseigenschaft der Grösse (34) wird aus Satz 3 hergeleitet. Dazu genügt wegen

$$\varDelta_\alpha^*(P, Q) = \big[\varDelta_\alpha^{\frac{1}{\alpha'}}(P, Q) + \varDelta_\alpha^{\frac{1}{\alpha'}}(Q, P) - \varDelta_\alpha^{\frac{1}{\alpha'}}(P, Q)\,\varDelta_\alpha^{\frac{1}{\alpha'}}(Q, P)\big]^{\alpha'}$$

— mit Rücksicht auf Folgerung 2 des Satzes 2 — zu zeigen, dass die Funktion

$$(35)\qquad \psi(u_1, u_2) = (u_1^\omega + u_2^\omega - u_1^\omega u_2^\omega)^{\frac{1}{\omega}} \qquad (\omega \geqq 1)$$

die Bedingungen (C′), (D′), (E′) (mit $n = 2$, $m_1 = m_2 = 1$) befriedigt. Das Erfülltsein von (C′) und (E′) ist trivial. Das von (D′), also die Subadditivität von $\psi(u_1, u_2)$ kann folgendermassen bewiesen werden:

Die Funktion $f(x) = (A + x^\omega)^{\frac{1}{\omega}}$ ist bei $A \geqq 0$, $\omega \geqq 1$, $x \geqq 0$ konvex, da

$$f'(x) = (A + x^\omega)^{\frac{1}{\omega} - 1}\, x^{\omega - 1} = (Ax^{-\omega} + 1)^{\frac{1}{\omega} - 1}$$

monoton zunimmt. Also gilt nach der Jensenschen Ungleichung bei beliebigen nichtnegativen a_1, a_2, x_1, x_2 mit $a_1 + a_2 > 0$

$$a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) \geqq (a_1 + a_2)\, f\left(\frac{a_1 x_1 + a_2 x_2}{a_1 + a_2}\right).$$

Setzt man hier $a_1 = u_1$, $a_2 = v_1$, $x_1 = \dfrac{u_2}{u_1}$, $x_2 = \dfrac{v_2}{v_1}$ und $A = 1 - (u_2 + v_2)^\omega$, so ergibt sich

$$u_1\left[1+\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{\omega}-(u_2+v_2)^{\omega}\right]^{\frac{1}{\omega}}+v_1\left[1+\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\omega}-(u_2+v_2)^{\omega}\right]^{\frac{1}{\omega}}\geqq$$

$$\geqq (u_1+v_1)\left[1+\left(\frac{u_2+v_2}{u_1+v_1}\right)^{\omega}-(u_2+v_2)^{\omega}\right]^{\frac{1}{\omega}}\quad (u_1, v_1>0\,;\, u_2, v_2\geqq 0\,;\, u_2+v_2\leqq 1),$$

woraus die Ungleichung

$$\begin{aligned}(36)\qquad &(u_1^{\omega}+u_2^{\omega}-u_1^{\omega}u_2^{\omega})^{\frac{1}{\omega}}+(v_1^{\omega}+v_2^{\omega}-v_1^{\omega}v_2^{\omega})^{\frac{1}{\omega}}\geqq\\ &\geqq[(u_1+v_1)^{\omega}+(u_2+v_2)^{\omega}-(u_1+v_1)^{\omega}(u_2+v_2)^{\omega}]^{\frac{1}{\omega}}\end{aligned}$$

(bei den obigen Einschränkungen) unmittelbar folgt. Wegen der Stetigkeit gilt (36) offenbar auch dann, falls man auch $u_1=0$ bzw. $v_1=0$ zulässt. Das bedeutet aber, dass die Funktion (35) auch der Bedingung (D') genügt,[6] wodurch Satz 5 vollständig bewiesen ist.

Bemerkung. In § 3 wurde gezeigt, dass bei $\beta<\alpha'$ zu jedem $\gamma>0$ eine positive Zahl c_γ derart gegeben werden kann, dass $\min\left((1-\mathcal{I}_\alpha^\gamma(P,Q))^\beta, c_\gamma^\beta\right)$ (s. (29)) eine Quasientfernung ist. Mit Hilfe des obigen Gedankens (durch die Anwendung derselben Funktion $\psi(u_1, u_2)$) sieht man, dass dann auch

$$(37)\qquad \min\left((1-\mathcal{I}_\alpha^\gamma(P,Q)\,\mathcal{I}_\alpha^\gamma(Q,P))^\beta, c_\gamma^\beta\right)$$

eine Entfernung darstellt.

Was den Fall $\beta>\alpha'$ anbetrifft, gilt

Hilfssatz 5. *Die Dreiecksungleichung für* $(1-\mathcal{I}_\alpha(P,Q)\,\mathcal{I}_\alpha(Q,P))^\beta$ *ist selbst für beliebig kleine Werte der in ihr auftretenden Grössen (also auch der entsprechenden Divergenzen) nicht allgemein gültig.*

Beweis. Man betrachte wie in § 3 die Verteilungen der Form

$$P=(0,1)\,,\quad Q_\delta=(\delta, 1-\delta)\,,\quad R_\varepsilon=(\varepsilon, 1-\varepsilon)\,.$$

Um unsere Behauptung zu beweisen genügt wegen

$$\begin{aligned}&(1-\mathcal{I}_\alpha(P,Q_0)\,\mathcal{I}_\alpha(Q_0,P))^\beta+(1-\mathcal{I}_\alpha(Q_0,R_\varepsilon)\,\mathcal{I}_\alpha(R_\varepsilon,Q_0))^\beta=\\ &=(1-\mathcal{I}_\alpha(P,R_\varepsilon)\,\mathcal{I}_\alpha(R_\varepsilon,P))^\beta\end{aligned}$$

zu zeigen, dass

$$(38)\quad h(\delta)=\frac{d}{d\delta}\left[(1-\mathcal{I}_\alpha(P,Q_\delta)\,\mathcal{I}_\alpha(Q_\delta,P))^\beta+(1-\mathcal{I}_\alpha(Q_\delta,R_\varepsilon)\,\mathcal{I}_\alpha(R_\varepsilon,Q_\delta))^\beta\right]$$

[6] Aus der bewiesenen Subadditivität der Funktion (35) kann das allgemeine Resultat hergeleitet werden, dass die Funktion $\psi(u_1,\ldots,u_n)=F^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n}F(u_k)\right)$ mit der Wahl $F(u)=-\log(1-u^\omega)$ subadditiv ist (also die Eigenschaft (D') hat). Dieses Ergebnis enthält auch die Minkowskische Ungleichung für Vektorräume.

bei jedem festen $\varepsilon > 0$ für genügend kleines $\delta > 0$ negativ ist. Da

$$(1-\mathcal{J}_\alpha(P,Q_\delta)\,\mathcal{J}_\alpha(Q_\delta,P))^\beta+(1-\mathcal{J}_\alpha(Q_\delta,R_\varepsilon)\,\mathcal{J}_\alpha(R_\varepsilon,Q_\delta))^\beta=$$
$$=\delta^\beta+\left[1-\left(\delta^\alpha\varepsilon^{1-\alpha}+(1-\delta)^\alpha(1-\varepsilon)^{1-\alpha}\right)\left(\delta^{1-\alpha}\varepsilon^\alpha+(1-\delta)^{1-\alpha}(1-\varepsilon)^\alpha\right]^\beta$$

gilt, erhält man durch Differenzieren

$$h(\delta)=\beta\delta^{\beta-1}+\beta\left[1-\left(\delta^\alpha\varepsilon^{1-\alpha}+(1-\delta)^\alpha(1-\varepsilon)^{1-\alpha}\right)\left(\delta^{1-\alpha}\varepsilon^\alpha+(1-\delta)^{1-\alpha}(1-\varepsilon)^\alpha\right)\right]^{\beta-1}\cdot$$
$$\cdot\left[\left(-\alpha\delta^{\alpha-1}\varepsilon^{1-\alpha}+\alpha(1-\delta)^{\alpha-1}(1-\varepsilon)^{1-\alpha}\right)\left(\delta^{1-\alpha}\varepsilon^\alpha+(1-\delta)^{1-\alpha}(1-\varepsilon)^\alpha\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\delta^\alpha\varepsilon^{1-\alpha}+(1-\delta)^\alpha(1-\varepsilon)^{1-\alpha}\right)\left(-(1-\alpha)\,\delta^{-\alpha}\varepsilon^\alpha+(1-\alpha)\,(1-\delta)^{-\alpha}(1-\varepsilon)^\alpha\right]\sim$$
$$\sim\beta\delta^{\beta-1}-K_1(\varepsilon)\,\delta^{-\alpha}-K_2(\varepsilon)\,\delta^{\alpha-1},$$

wobei $K_1(\varepsilon)$ und $K_2(\varepsilon)$ für $\varepsilon > 0$ positiv sind. Also gilt für (38) im Falle $\beta > \alpha' = \min(\alpha, 1-\alpha)$

$$\lim_{\delta\to+0} h(\delta) = -\infty,$$

wodurch aber bewiesen ist, dass die Dreiecksungleichung für

$$(1-\mathcal{J}_\alpha(P,Q)\,\mathcal{J}_\alpha(Q,P))^\beta$$

im Falle $\beta > \alpha'$ selbst bei beliebig kleinen Divergenzen ungültig sein kann.

Satz 5 und Hilfssatz 5 sind dem Satz 3 bzw. Hilfssatz 4 vollständig analogisch, es stehen bloss an Stelle der Grössen der Form $\mathcal{J}_\alpha(P,Q)$ diejenige der Form $\mathcal{J}_\alpha(P,Q)\,\mathcal{J}_\alpha(Q,P)$. Das bedeutet aber, dass sich aus den Behauptungen, die in § 3 aus Satz 3 und Hilfssatz 4 mittels subadditiver Funktionen hergeleitet wurden, wieder gültige Behauptungen ergeben, falls man überall $\mathcal{J}_\alpha(P,Q)\,\mathcal{J}_\alpha(Q,P)$ statt $\mathcal{J}_\alpha(P,Q)$ setzt.

Möchte man das Analogon des Satzes 4 erhalten, soll man den obigen gemäss $J_\alpha(P,Q)$ anstatt $I_\alpha(P\,||\,Q)$ schreiben. Demnach gilt also

Satz 6. *Im Falle $\beta < \alpha' = \min(\alpha, 1-\alpha)$ $(0 < \alpha < 1)$ lässt sich stets eine (von α und β abhängende) Konstante $c^* > 0$ angeben, bei welcher*

$$\min\left(J_\alpha^\beta(P,Q),\, c^{*\beta}\right)$$

eine Entfernung im Raum der Wahrscheinlichkeitsverteilungen darstellt. Für $\beta > \alpha'$ ist das dagegen unmöglich.

Bemerkung. Die positive Behauptung dieses Satzes kann auch unmittelbar aus Satz 4 hergeleitet werden, indem man auf $I_\alpha^\beta(P\,||\,Q)$ und $I_\alpha^\beta(Q\,||\,P)$ die — nach der Minkowskischen Ungleichung subadditive — Funktion $\psi(u_1, u_2) = = (u_1^{\frac{1}{\beta}} + u_2^{\frac{1}{\beta}})^\beta$ anwendet. Daher ist für c^* die in Satz 4 auftretende Konstante c bestimmt geeignet.

Die Frage, ob sich Satz 6 auf $\beta = \alpha'$ in positivem oder negativem Sinne ausdehnen lässt, ist für $\alpha \neq \dfrac{1}{2}$ — ebenso wie das analogische Problem in § 3 — offen. ($J_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(P,Q)$ ist eine Vielfache von $I_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(P\,||\,Q)$, für welche wir die obige Frage in § 3 bereits negativ beantwortet haben.)

Beschäftigen wir uns noch ein wenig mit den Analoga der in § 3 über die Ausdrücke $(1-\mathcal{J}_\alpha^\gamma(P,Q))^\beta$ angeführten Behauptungen. Also ist die Grösse

$$(1-\mathcal{J}_\alpha^\gamma(P,Q)\,\mathcal{J}_\alpha^\gamma(Q,P))^\beta$$

für $\beta \leqq \alpha'$ und $\gamma \geqq 1$ stets eine Entfernung, für $\beta > \alpha'$ kann sie jedoch selbst für kleine Werte der Divergenzen bei keinem $\gamma > 0$ der Dreiecksungleichung genügen. Falls $\beta < \alpha'$, $0 < \gamma < 1$ ist, so können wir nur behaupten, das

$$\min\left(\left(1 - \mathcal{J}_\alpha^\gamma(P, Q)\,\mathcal{J}_\alpha^\gamma(Q, P)\right)^\beta, c_\gamma^{*\beta}\right) \tag{40}$$

bei geeignetem $c_\gamma^* > 0$ eine Entfernung darstellt[7] und dass (39) selbst keine Entfernung sein kann, falls $\gamma > 0$ genügend klein gewählt wird.

Es ist unentschieden, für welche $0 < \gamma < 1$ (39) bei gegebenem $\beta \leqq \alpha'$ noch eine Entfernung bleibt. Für $\beta = \alpha'$ ist diese Frage auch für (40) offen (mit der Ausnahme von $\alpha = \frac{1}{2}$, wobei sich das Problem wegen $\mathcal{J}_{\frac{1}{2}}(P, Q) = \mathcal{J}_{\frac{1}{2}}(Q, P)$ auf dasjenige in § 3 reduziert und daher sich genau für $\gamma > \frac{1}{3}$ positiv entscheiden lässt). Falls jedoch mit einem $\gamma > 0$ eine dieser beiden Fragen positiv zu beantworten ist, so gilt dies auch für jedes $\gamma' > \gamma$, ebenso wie es auch bei den analogischen Behauptungen bezüglich $\mathcal{J}_\alpha(P, Q)$ der Fall war.

Es liegt die Vermutung nahe, dass (39) mit $\gamma = \frac{1}{2}$ noch selbst bei $\beta = \alpha$, eine Entfernung darstellen kann. Es scheint nämlich, dass dies ein in »Schärfe« der Quasientfernung $\left(1 - \mathcal{J}_\alpha(P, Q)\right)^{\alpha'}$ entsprechender symmetrischer Ausdruck ist (im Falle $\alpha = \frac{1}{2}$ sind diese beiden Grössen sogar identisch). Mit den in der vorliegenden Arbeit benützten Methode kann diese Hypothese auf Grund des Satzes 3 allerdings nicht verifiziert werden.

Die Verfasser haben die Absicht, auf die hier offen gebliebenen Fragen noch zurückzukehren.

(Eingegangen: 5. Februar, 1962.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Rényi, A.: „Az információelmélet néhány alapvető kérdése". *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikiai) Osztályának Közleményei* **10** (1960) 251–282.

[2] Rényi, A.: „On measures of entropy and information". *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability.* University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1960, 547—561.

[3] Csiszár, I.: „Informationstheoretische Konvergenzbegriffe im Raum der Wahrscheinlichkeitsverteilungen". *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **7** (1962) 137—158.

[4] Czipszer, J., persönliche Mitteilung.

[5] Császár, Á.: *Fondements de la Topologie Générale.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1960.

[6] Ribeiro, H.: „Sur les espaces à métrique faible". *Portugaliae Math.* **4** (1943) 21–40 und 65–68.

[7] Balanzat, M.: „On the metrisation of quasi-metric spaces". *Gaz. Mat., Lisboa* **12** (1951) No. 50, 91–94.

[8] Bhattacharyya, A.: „On some analogues of the amount of information and their use in statistical estimation". *Sankhya* **8** (1946) 1–14.

[7] Dabei ist $c_\gamma^* = 1 - e^{-(1-\alpha)\gamma c^*}$ mit dem c^* in Satz 6 eine geeignete Wahl (dies folgt ebenso wie (30)), ferner kann nach der Bemerkung zu Satz 5 auch $c_\gamma^* = c_\gamma$ gesetzt werden.

ИНФОРМАЦИОННЫЕ РАССТОЯНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

I. CSISZÁR – J. FISCHER

Резюме

В качестве теоретико-информационной меры отличий распределения вероятностей мы можем рассматривать относительную информацию (энтропию) порядка α ($\alpha>0$), соотв. J-дивергенцию. Соответственно этому мы можем говорить об информационных или дивергенционных окрестностях некоторого распределения вероятностей которые в случае $0<\alpha<1$ (и только в этом случае) осуществляют топологию в пространстве распределений, а именно, ту же самую, которую осуществляет вариационное расстояние (§ 1).

Цель статьи задать такие функции от относительной информации порядка α ($0<\alpha<1$), соответственно дивергенции, которые осуществляют метрику для вышеприведенной топологии, где из-за несимметричности информации мы не требуем симметрии расстояний, иначе говоря, где мы допускаем также т. н. квазирасстояния.

В § 2 авторы приводят несколько общих результатов относящихся к соотношениям между расстояниями и квазирасстояниями. При их помощи в § 3, соотв. § 4 они решают вопрос являются ли некоторые функции определенного типа от информации порядка α ($0<\alpha<1$), соотв. дивергенции квазирасстояниями соотв. расстояниями.

Они доказывают, что если обозначить относительную информацию порядка α через $I_\alpha(P\,||\,Q)$, J-дивергенцию через $J_\alpha(P, Q)$ и $\min(\alpha, 1-\alpha)$ через α', тогда в случае $0<\beta<\alpha'$ можно задать такое число $c>0$ (зависящее от α и от β), что $\min(I_\alpha^\beta(P\,||\,Q), c^\beta)$ является квазирасстоянием (теорема 4) а $\min\left(J_\alpha^\beta(P, Q), c^\beta\right)$ является расстоянием (теорема 6) в пространстве распределений вероятностей; однако в случае $\beta>\alpha$ такого $c>0$ уже не существует. Эти результаты авторы выводят из того факта, что выражения вида $[1-\exp\{-(1-\alpha)\,I_\alpha(P\,||\,Q)\}]^\beta$ (теорема 3, по существу от J. Czipszer), соответсвенно $[1-\exp(-(1-\alpha)\,J_\alpha(P, Q))]^\beta$ (теорема 5) удовлетворяют неравенству треугольника точно в случае $0<\beta\leqq\alpha'$.

Они занимаются еще некоторыми другими функциями от информации, соотв. дивергенции и ставят также несколько нерешенных проблем.

SUR LES SYSTÈMES DES BARRES CONDUCTRICES DE LA CHALEUR

par

T. FÉNYES et P. KOSIK

Introduction

Dans leurs travaux [1] [2] et [3] MM. G. FREUD et G. ADLER s'occupent des problèmes de la propagation de la chaleur avec les conditions aux limites composées. M. G. FREUD, dans son travail [1], traite le problème d'une barre infinie, en contact avec un réservoir de chaleur de capacité calorifique non négligable, au cas où les conditions initiales sont homogènes. Dans son ouvrage, [2] M. G. ADLER a résolu le problème de deux barres infinies mises en contact avec un réservoir de chaleur, resp. le problème d'une barre connectant deux réservoirs de chaleur, au cas où les conditions sont homogènes. M. G. FREUD [3] a généralisé le problème de [1] au cas où les conditions sont inhomogènes avec la restriction que la dérivée de la température initiale est nulle au point zéro. P. KOSIK, M. SALLAY et M. ZIMÁNYI dans leur travail [4] ont résolu le problème sans la restriction ci-dessus.

Dans notre travail, nous donnerons la solution du problème du système formé par les barres de longueurs finies ou infinies, dont le nombre doit être quelconque et qui sont en contact thermique avec le même réservoir de chaleur de capacité calorofique non négligable. Le système considéré peut contenir en même temps des barres finies et infinies. Les auteurs ramènent le problème à la solution d'une équation intégrale de type convolutoire qu'on peut discuter à l'aide du calcul opérationnel de MIKUSINSKY. En vertu d'un théorème bien connu du calcul opérationnel la série infinie qui établit la solution est uniformément convergente, ainsi la vérification de la convergence n'est pas nécessaire. Enfin les auteurs démontreront l'unicité du système de la solution.

1. §. Établissement du problème

Considérons un système composé d'un réservoir de chaleur ponctuel et de barres de longueurs $l_1, l_2, \ldots, l_n$ appliquées au réservoir. Supposons la température du réservoir ne dépende que du temps, de plus que dans les sections des barres la température ne dépende que de la distance au réservoir, c'est-à-dire qu'à un instant donné, dans une certaine section d'une barre quelconque, la température soit constante. La qualité matérielle des barres et la section des différentes barres peuvent être différentes. Le système peut contenir aussi des barres infiniment longues. Pour les barres finies, nous prescrirons à l'extrémité libre de la barre la valeur de la température ou la valeur du gradient de la température. Nous supposons que dans le réservoir se produit $Q(t)$

cal/sec. Notre problème revient à déterminer les fonctions caloriques $V_i(x, t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ des barres et la fonction calorique $U(t)$ du réservoir. La fonction calorique de chaque barres satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} = \varkappa_i^2 \frac{\partial V_i}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

avec les conditions aux limites

$$V_i(x, 0) = f_i(x) . \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) , \tag{2}$$

$$AU'_t + \sum_{i=1}^{n} B_i [U(t) - V_i(0, t)] = Q(t) , \tag{3}$$

$$V'_{ix}(0, t) = - C_i [U(t) - V_i(0, t)] , \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) , \tag{4}$$

(A, B_i, C_i et $\varkappa_i$ sont des constantes positives)

$$V'_{ix}(l_i, t) = g_i(t) , \qquad (i = 1, 2, \ldots, j) , \tag{5}$$

$$V_i(l_i, t) = h_i(t) , \quad (i = j + 1, j + 2, \ldots j + l) . \tag{6}$$

Pour les barres infinies nous supposons que pour un certain $\gamma > 0$ et pour $t \geqq 0$:

$$\lim e^{-\gamma x^2} V_i(x, t) = 0 , \qquad (i = j + l + 1, \ldots , n) , \tag{7}$$

de plus que la température initiale du réservoir $U(0) = U_0$ est donnée.

2. §. Solution du problème

Cherchons le système des solutions $V_i(x, t)$ sous la forme

$$V_i(x, t) = v_i(x, t) + \bar{v}_i(x, t) \tag{8}$$

où v_i et $\bar{v}_i$ satisfont à (1) et aux conditions

1)
$$\begin{aligned} &\bar{v}_i(x, 0) = f_i(x) , && i = 1, 2, \ldots, n , \\ &\bar{v}'_{ix}(l_i t) = g_i(t) , && i = 1, 2, \ldots, j , \\ &\bar{v}_i(l_i, t) = h_i(t) , && i = j + 1, j + 2, \ldots, j + l \\ &\bar{v}'_{1x}(0, t) = 0 , && \\ &\bar{v}'_{ix}(0, t) = - c_i [\bar{u}(t) - \bar{v}_i(0, t)] , && i = 2, 3, \ldots, n , \end{aligned} \tag{9}$$

où

$$\bar{u}(t) = \bar{v}_1(0, t) .$$

2)
$$\begin{aligned} &v'_{ix}(l_i, t) = 0 , && i = 1, 2, \ldots, j , \\ &v_i (l_i, t) = 0 , && i = j + 1, \ldots, j + l , \end{aligned} \tag{10}$$

de plus

$$\begin{aligned} &Au'_t + \sum_{i=1}^{n} B_i [u(t) - v_i(0, t)] = q(t) , \\ &v'_{ix}(0, t) = - C_i [u(t) - v_i(0, t)] , \qquad i = 1, 2, \ldots, n , \end{aligned} \tag{11}$$

où

$$u(t) = U(t) - \overline{u}(t) ,$$

(12) et

$$q(t) = Q(t) - \overline{Q}(t) ,$$

où

$$\overline{Q}(t) = A\overline{u}'_t + \sum_{i=1}^{n} B_i [\overline{u}(t) - \overline{v}_i(0, t)] . \tag{13}$$

Par substitution, on peut facilement voir que la superposition des fonctions $v_i(x, t)$ et $\overline{v}_i(x, t)$ fournit la solution du problème. Ainsi nous avons réduit notre problème à deux problèmes plus simples. Nous discuterons brièvement la détermination des fonctions $\overline{v}_i(x, t)$ à la fin de notre travail. Dans ce qui suit nous occuperons de la détermination des fonctions $v_i(x, t)$ et $u(t)$.[1]

II.

Déterminons tout d'abord la solution de l'équation de la chaleur (1) pour laquelle

$$\begin{aligned} &w_i(x, 0) = 0 , && i = 1, 2, \ldots, n , \\ &w'_x(l_i, t) = 0 , && i = 1, 2, \ldots, j , \\ &w_i(l_i, t) = 0 , && i = j + 1, j + 2, \ldots, j + l \end{aligned} \tag{14}$$

de plus pour les $w_i(x, t)$ la relation (7) est valable, si $i = j + l + 1, \ldots, n$, et

$$w'_{t_x}(0, t) - C_i w_i(0, t) = 1 , \qquad i = 1, 2, \ldots, n . \tag{15}$$

Dans ce cas — bien connu de la littérature — partant du principe de Duhamel [6] nous pouvons écrire la relation suivante

$$v_i(x, t) = - C_i \int_0^t u'(t - \tau) w_i(x, \tau) d\tau , \qquad i = 1, 2, \ldots, n . \tag{16}$$

Nous déterminerons tout d'abord les solutions $w_i(x, t)$. Nous distinguerons d'après le type des conditions aux limites valables à l'extrémité droite des barres deux possibilités, ou bien nous examinerons une barre de longueur infinie.

A) $$w'_{i_x}(l_i, t) = 0 , \qquad i = 1, 2, \ldots, j .$$

Alors nous opérons de la manière suivante: Soit

$$w_i(x, t) = p_i(x\ t) - \frac{1}{C_i} \tag{17}$$

[1] Manifestement, le système des fonctions $v_i(x, t)$, $u(t)$ n'est résoluble qu'en connaissance des fonctions $\overline{v}_i(x, t)$ mais pour déterminer les fonctions $v_i(x, t)$, $u(t)$ nous considérons données les fonctions $\overline{v}\,(x, t)$.

où $p_i(x, t)$ est la solution de l'équation de la chaleur satisfaisant aux conditions

$$p_i(x, 0) = \frac{1}{C_i},$$
$$p'_{ix}(l_i, t) = 0,$$
$$p'_{ix}(0, t) - C_i\, p_i(0, t) = 0.$$

Nous pouvons obtenir plus simplement la solution relative aux fonctions $p_i(x, t)$ à l'aide de la méthode de Fourier. La solution sera

$$p_i(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \left(\cos \mu_{ik}\, x + \frac{C_i}{\mu_{ik}} \sin \mu_{ik}\, x \right) \exp \left(- \frac{\mu_{ik}^2}{\varkappa_i^2} t \right), \tag{19}$$

où μ_{ik} est la k-ième racine de l'équation

$$\operatorname{tg} \mu l_i = \frac{C_i}{\mu} \tag{20}$$

et

$$a_{ik} = \frac{\int\limits_0^{l_i} \frac{1}{C_i} \left[\cos \mu_{ik}\, x + \frac{C_i}{\mu_{ik}} \sin \mu_{ik}\, x \right] dx}{\int\limits_0^{i} \left[\cos \mu_{ik}\, x + \frac{C_i}{\mu_{ik}} \sin \mu_{ik}\, x \right]^2 dx}. \tag{21}$$

(19) satisfait vraiment a l'équation différentielle de la chaleur: en effet (20) a des racines infinies réelles et les fonctions propres $\cos \mu_{ik}\, x + \frac{C_i}{\mu_{ik}} \sin \mu_{ik}\, x$ forment un système complet, (19) est dérivable par membre et satisfait aussi aux conditions (18). Les idées analogues sont valables aussi dans le cas B).

B) $$w_i(l_i, t) = 0, \qquad i = j + 1, j + 2, \ldots, j + l.$$

Dans ce cas, soit

$$w_i(x, t) = p_i(x, t) + \frac{x - l_i}{l_i C_i + 1}, \tag{22}$$

où $p_i(x, t)$ est la solution de l'équation de la chaleur satisfaisant aux conditions

$$\begin{aligned} & p_i(x, 0) = \frac{l_i - x}{1 + l_i C_i}, \\ & p_i(l_i, t) = 0, \\ & p'_{ix}(0, t) - C_i\, p_i(0, t) = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Nous déterminons la fonction $p_i(x, t)$ à l'aide de la méthode de Fourier. Nous obtenons

$$p_i(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} \left(\cos \nu_{ik}\, x + \frac{C_i}{\nu_{ik}} \sin \nu_{ik}\, x \right) \exp \left(- \frac{\nu_{ik}^2}{\varkappa_i^2} t \right) \tag{24}$$

où ν_{ik} est la k-ième racine positive de l'équation

$$\operatorname{tg} \nu l_i = -\frac{\nu}{C_i} \tag{25}$$

et

$$b_{ik} = \frac{\int\limits_0^{l_i} \left(\frac{l_i - x}{l_i C_i + 1}\right)\left(\cos \nu_{ik} x + \frac{C_i}{\nu_{ik}} \sin \nu_{ik} x\right) dx}{\left(\int\limits_0^{l_i} \left[\cos \nu_{ik} x + \frac{C_i}{\nu_{ik}} \sin \nu_{ik} x\right]^2 dx\right)^{1/2}}.$$

On peut facilement voir que les fonctions $w_i(x, t)$ satisfont aux conditions (14) et (15) dans les cas A) et B).

C) (Cas des barres infinies.) Soit $l_i = \infty$ pour $i = j + l + 1, \ldots, n$. En déterminant les fonctions cherchées à l'aide du calcul opérationnel il vient

$$w_i(x, t) = \frac{1}{C_i} \exp\left(C_i x + \frac{C_i^2}{\varkappa_i^2} t\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\varkappa_i x}{2\sqrt{t}} + \frac{C_i}{\varkappa_i}\sqrt{t}\right) - \frac{1}{C_i} \operatorname{erfc}\left(\frac{\varkappa_i x}{2\sqrt{t}}\right). \tag{26}$$

Les calculs faits, nous avons déterminé les fonctions $w_i(x, t)$ dans tous les trois cas.

Remarquons toutefois que nous ne nous occupons pas de la discussion détaillée de la détermination des fonctions $w_i(x, t)$, car les problèmes de la propagation de la chaleur de même type figurent dans plusieurs manuels d'enseignement.

III.

Nous déduirons et déterminerons par la suite une équation intégrale de deuxième ordre de type convolutoire relative à la dérivée de la fonction $u(t)$.

En remplacant (16) dans (11) nous obtenons

$$\begin{aligned} Au'(t) + \sum_{i=1}^{n} B_i \left[u(t) + C_i \int_0^t u'(t - \tau)\, w_i(0, \tau)\, d\tau\right] = \\ = q(t) = Au'(t) + \int_0^t u'(\tau)\, d\tau \sum_{i=1}^{n} B_i + u(0) \sum_{i=1}^{n} B_i + \sum_{i=1}^{n} B_i C_i \int_0^t u'(\tau)\, w_i(0, t-\tau)\, d\tau. \end{aligned} \tag{27}$$

En appliquant une transformation très simple nous obtiendrons l'équation intégrale suivante:

$$Au'(t) + \int_0^t u'(\tau) \sum_{i=1}^{n} B_i \left[1 + C_i w_i(0, t - \tau)\right] d\tau = q(t) - u(0) \sum_{i=1}^{n} B_i. \tag{28}$$

Nous résoudrons l'équation (28) à l'aide du calcul opérationnel de MIKUSINSKY. D'après la notations de MIKUSINSKY, soit $\{u'(t)\}$ un élément du corps des fractions MIKUSINSKY. Nous pouvons écrire

$$A\,\{u'\} + \{u'\}\left\{\sum_{i=1}^{n} B_i \left[1 + C_i w_i(0, t)\right]\right\} = \left\{q(t) - u(0) \sum_{i=1}^{n} B_i\right\} \tag{29}$$

d'où

$$(30)\quad \{u'\} = \frac{\left\{q(t) - u(0)\sum_{i=1}^{n} B_i\right\}}{A + \left\{\sum_{i=1}^{n} B_i[1 + C_i w_i(0,t)]\right\}} = \frac{1}{A}\,\frac{\left\{q(t) - u(0)\sum_{i=1}^{n} B_i\right\}}{1 + \left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{A}[1 + C_i w_i(0,t)]\right\}}$$

où

$$\{u'\} = \frac{1}{A}\left\{q(t) - u(0)\sum_{i=1}^{n} B_i\right\} - $$

$$- \frac{1}{A}\left\{q(t) - u(0)\sum_{i=1}^{n} B_i\right\} \frac{\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{A}[1 + C_i w_i(0,t)]\right\}}{1 + \left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{A}[1 + C_i w_i(0,t)]\right\}}.$$

Les fonctions $w_i(0, t)$ sont continues dans l'intervalle $0 \leqq t < \infty$ (voir (17), (19), (22), (24)). Par conséquent en vertu d'un théorème bien connu du calcul opérationnel [8] l'opérateur

$$\frac{\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{A}[1 + C_i w_i(0,t)]\right\}}{1 + \left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{A}[1 + C_i w_i(0,t)]\right\}}$$

peut être développé en la série

$$(31)\qquad \{H(t)\} = -\sum_{\varrho=1}^{\infty} (-1)^{\varrho} \left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{A}[1 + C_i w_i(0,t)]\right\}^{\varrho}.$$

La série (31) est, dans l'intervalle $0 \leqq t \leqq t_0$, absolument et uniformément convergente et établit sur cet intervalle une fonction continue (voir [7] et [8]). Alors d'après (31), nous obtenons la solution de l'équation (28) sous la forme[2]

$$(32)\quad u'(t) = \frac{1}{A}\left[q(t) - u(0)\sum_{i=1}^{n} B_i\right] + \frac{1}{A}\int_0^t \left[q(\tau) - u(0)\sum_{i=1}^{n} B_i\right] H(t-\tau)\,d\tau\,.$$

Écrirons de nouveau l'intégrale de DUHAMEL

$$(33)\qquad v_i(x,t) = -C_i \int_0^t u'(t-\tau)\, w_i(x,\tau)\, d\tau\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

[2] P. KOSIK, M. SALLAY et M. ZIMÁNYI [4] ont démontré que la fonction $q(t)$ est continue pour $t > 0$ et pour $t = 0$ la fonction ne peut prendre qu'une singularité de la forme $\frac{c}{\sqrt{t}}$. D'ou et en vertu de la continuité de $H(t)$ il en résulte inmédiatement que $u'(t)$ est aussi continue pour $t > 0$ et pour $t = 0$ ne peut prendre qu'une singularité de la forme $\frac{c^*}{\sqrt{t}}$. Alors $q(t)$ et $u'(t)$ sont vraiment éléments du corps des fractions de MIKUSINSKY.

Nous remarquons que les fonctions $v_i(x, t)$ admettent une seconde dérivée continue c'est-à-dire fournissent la solution effective du problème de la propagation de la chaleur.

En effet les fonctions $w_i(x, t)$ admettent une seconde dérivée selon x, alors

$$\frac{\partial^2 v_i(x, t)}{\partial x^2} = - C_i \int_0^t u'(t - \tau)\, w''_{ixx}(x, \tau)\, d\tau\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

De plus, d'après les propriétés de la convolution il s'ensuit que (33) est dérivable selon t et

$$\frac{\partial v_i(x, t)}{\partial t} = - C_i \int_0^t u'(t - \tau) \frac{\partial w_i(x, \tau)}{\partial \tau}\, d\tau - C_i\, w_i(x, 0)\, u'\,.$$

Vu que $w_i(x, 0) = 0$, par conséquent

$$\frac{\partial v_i(x, t)}{\partial t} = - C_i \int_0^t u'(t - \tau) \frac{\partial w_i(x, \tau)}{\partial \tau}\, d\tau\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Les fonctions $v_i(x, t)$ sont donc déterminées.

Examinons très brièvement la question de la détermination des fonctions $\bar{v}_i(x, t)$.

Cherchons les fonctions $\bar{v}_i(x, t)$ sous la forme[3]

$$\bar{v}_i = k_{i1}(x, t) + k_{i2}(x, t)\,, \qquad i = 2, 3 \ldots n \tag{34}$$

où k_{i1} et k_{i2} sont des fonctions caloriques satisfaisant aux conditions

a)

$$\begin{aligned} &k_{i1}(x, 0) = f_i(x)\,, && i = 2, 3, \ldots, n\,,\\ &k'_{i1x}(0, t) = 0\,, && i = 2, 3, \ldots, n\,,\\ &k'_{i1x}(l_i, t) = g_i(t)\,, && i = 2, 3, \ldots, j\,,\\ &k_{i1}(l_i, t) = h_i(t)\,, && i = j + 1, \ldots, j + l\,, \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} &k_{i2}(x, 0) = 0\,, && i = 2, 3, \ldots, n\,,\\ &k'_{i2x}(0, t) = - C_i\, [\bar{u}(t) - k_{i1}(0, t) - k_{i2}(0, t)]\,, && i = 2, 3, \ldots, n\,,\\ &k'_{i2x}(l_i, t) = 0\,, && i = 2, 3, \ldots, j\\ &k_{i2}(l_i, t) = 0\,, && i = j + 1, j + 2, \ldots, j + l\,. \end{aligned}$$

(Naturellement, au cas où les barres sont de longueurs infinies, il n'existe que les conditions aux limites pour $x = 0$.)

---

[3] La détermination des fonctions $\bar{v}_1(x, t)$ est un problème élémentaire que nous ne discutons pas.

Il est facile de voir que la somme des fonctions $k_{i1} + k_{i2}$ fournit vraiment les fonctions cherchées $\bar{v}_i(x, t)$.[4]

Nous pouvons obtenir les fonctions k_{i2} d'après le relation (16) en substituant $\bar{u}(t) - k_{i1}(0, t)$ à $u(t)$.

3. §. Le démonstration d'unicité des solutions

Enfin il nous reste à traiter la question de l'unicité des solutions $U(t)$ et $V_i(x, t)$. Il nous suffit évidemment de démontrer que le principe de monotonité est applicable dans notre problème plus général. (Pour le principe de monotonité voir [1] et [3]).

Il faut alors démontrer le théorème suivant:

Soient $U_\eta(t)$, $V_{i\eta}(x, t)$ les solutions de notre problème, continues même sur la frontière concernant la fonction $Q_\eta(t)$ $(\eta = 1, 2)$ pour lesquelles les valeurs initiales et les conditions aux limites prescrites sont équivalentes.

Soit $Q_1(t) > Q_2(t)$ et $U_1(0) > U_2(0)$ pour $0 \leqq t \leqq T$. Alors $V_{i1}(x, t) > V_{i2}(x, t)$ pour $t \leqq T$ et $0 \leqq x \leqq l_i$. Supposons en premier que $j = 0$, $l = n$ c'est-à-dire que toutes les barres sont finies et que les valeurs initiales sont prescrites aux extrémités droites des barres,

$$V_{i1}(l_i, t) = V_{i2}(l_i, t) .$$

Introduisons les notations suivantes:

$$Q_1(t) - Q_2(t) = Q(t),\ V_{i1}(x, t) - V_{i2}(x, t) = V_i(x,t),\ U_1(t) - U_2(t) = U(t) .$$

D'après le principe du maximum il nous suffit de démontrer que

$$V_i(0, t) \geqq 0,\ \ 0 \leqq t \leqq T .$$

Supposons qu'il existe un t_{i1} pour lequel $V_i(0, t_{i1}) < 0$. Comme $V_i(0, 0) = 0$ et $U(0) > 0$, il en découle que pour un t assez petit: $V'_{ix}(0, t) < 0$ pour chaque i. En tenant compte de la représentation intégrale de $V_i(x, t)$ concernant la fonction $V'_{ix}(0, t)$ prescrite (voir [3]): $V_i(0, t) > 0$ pour un t assez petit. La fonction $V_i(0, t)$ change donc au moins une fois de signe dans l'intervalle $(0, t_{i1})$. Désignons par t_{i2} le plus petit nombre où la fonction $V_i(0, t)$ change de signe et soit

$$t^* = \min_i t_{i2} .$$

(Sans restriction de la généralité nous pouvons supposer que t^* correspond à la solution $V_1(0, t)$ c. à. d. $t^* = t_{12}$.)

Ainsi pour chaque i: $V_i(0, t) \geqq 0$ si $0 \leqq t \leqq t^*$. Vu que $V_1(0, t^*) = 0$ et $V_1(0, t) \geqq 0$ dans l'intervalle $0 \leqq t \leqq t^*$, en vertu du principe du maximum, $V_1(x, t) \geqq 0$, dans le domaine $0 \leqq t \leqq t^*$, $0 \leqq x \leqq l_1$ et $V'_{1x}(0, t^*) \geqq 0$. D'après (4) il résulte que $U(t^*) \leqq 0$ et d'après (3) il est évident que $U'(t^*) > 0$. Alors il existe un $t^{**} < t^*$, où $U(t^{**}) = 0$ et $U'(t^{**}) \leqq 0$. En tenant compte de nouveau de (3) on aboutit à une contradiction.

---

[4] Les fonctions k_{i1} sont déterminables á l'aide de méthodes bien connues figurant dans les manuels d'enseignement.

Au cas où notre système est également composé de barres de longueur infinie resp. pour lesquelles les valeurs de la dérivée par x sont prescrites, la démonstration est analogue a celle publiée dans [3].

Enfin nous exprimons nos remerciements à Mlle. SALLAY pour l'aide apporté dans notre travail.

(Reçu le 10 Janvier 1962.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] FREUD, G.: „Hővezetési és diffúziós feladatok összetett peremfeltételekkel. I." *Az MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének Kiadványai* III (1955) 389–394.

[2] ADLER, GY.: „Hővezetési és diffúziós feladatok összetett peremfeltételekkel. II." *Az MTA Mat. Kut. Int. Közleményei* **1** (1956) 167–183.

[3] FREUD, G.: „Problèmes de la propagation de la chaleur avec les conditions aux limites composées". *Comptes Rendus du Congrés International des Mathématiques de l'Ingénieur, Mons et Bruxelles* 9–14 Juin, 1958, pp. 199–206.

[4] KOSIK, P.–SALLAY, M.–ZIMÁNYI, M.: „Problèmes de la propagation de la chaleur avec les conditions aux limites composées". *MTA Mat. Kut. Int. Közleményei* **4** (1959) 377–383.

[5] SOMMERFELD, A.: *Partielle Differentialgleichungen der Physik*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest-Portig K. G. Leipzig, 1954.

[6] COURANT, R.–HILBERT, D.: *Methoden der mathematischen Physik*, I–II., Springer, Berlin, 1937.

[7] MIKUSIŃSKI, J.: *Operational Calculus*. Pergamon Press, London–New York–Paris–Los Angeles Panstwowe Wydawnictwo Naukowe Warszawa, 1959.

[8] BUTZER, P. L.: „Die Anwendung des Operatorenkalküls von Jan Mikusinski auf lineare Integralgleichungen vom Faltungstypus". *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **2** (1958) 114–128.

[9] MIKUSIŃSKI, J. G.–RYLL-NARDZEWSKI, Cz.: „Sur le produit de composition." *Studia Mathematica* **12** (1951) 51–57, Wroclaw.

О СИСТЕМЕ ТЕПЛОПРОВОДЯЩИХ СТЕРЖНЕЙ

T. FÉNYES – P. KOSIK

Резюме

Авторы решают задачу теплопроводности системы состоящей из произвольного конечного числа конечных, соответственно бесконечных стержней примыкающих к тепловому резервуару, тепловой ёмкостью которого нельзя пренебречь. Исследуемая система может одновременно включать в себя стержни конечной и бесконечной длины. Авторы сводят задачу к решению интегрального уравнения второго рода типа свертки, которое они исследуют при помощи операционного исчисления Микусинского. Этим они достигают того, что бесконечный ряд, представляющий решение, согласно одной известной теоремы операционного исчисления, будет равномерно сходиться и поэтому исследование сходимости станет излишним. Авторы, наконец, доказывают единственность системы решений задачи теплопроводности.

A CHARACTERIZATION OF NEUTRAL ELEMENTS IN LATTICES (NOTES ON LATTICE THEORY I)

by

G. GRÄTZER

My aim, is in this note, to prove the following

Theorem. *An element a of the lattice L is neutral*[1] *if and only if*

$$(1) \qquad (a \cap x) \cup (a \cap y) \cup (x \cap y) = (a \cup x) \cap (a \cup y) \cap (x \cup y),$$

for all $x, y \in L$.

Remark 1. This theorem is a solution of Problem 3 of [3]. It is a consequence of a theorem of ORE that neutrality can be defined by 5 equalities. Then, in [3], this number was reduced to two. The final reduction is the aim of this theorem.

Remark 2. Neutrality was first defined in modular lattices by O. ORE [4]. He said that an element a of a modular lattice L is neutral if

$$(2) \qquad a \cup (x \cap y) = (a \cup x) \cap (a \cup y),$$

for all $x, y \in L$. But it is very easy to show that in modular lattices (1) and (2) are equivalent, therefore the generalization of this concept to general lattices by (1) seems to be natural.

Remark 3. To define neutrality by (1) has certain advantages. For instance, this definition gives a possibility to prove in a very simple way that the element a of the lattice L is neutral if and only if the ideal of L generated by a is a neutral element of the lattice of all ideals of L (see [3], p. 53).

Proof of the theorem. If a is neutral, then the triplet $\{a, x, y\}$ generates a distributive sublattice, therefore (1) holds. To prove the converse statement suppose a satisfies (1). According to a theorem of BIRKHOFF[2] (see [1], or [2], p. 28) a is neutral if and only if

(i) $\quad a \cup (x \cap y) = (a \cup x) \cap (a \cup y)$, for all $x, y \in L$;

(ii) $\quad a \cap (x \cup y) = (a \cap x) \cup (a \cap y)$, for all $x, y \in L$;

(iii) $\quad$ if $x, y \in L$ and $a \cup x = a \cup y$, $a \cap x = a \cap y$ then $x = y$.

---

[1] I.e. every triplet $\{a, x, y\}$ of elements of L generates a distributive sublattice. This definition is due to G. BIRKHOFF [1], see also [2], p. 28.

[2] In [2] only the "if" part of this theorem is stated (see Lemma 1, p. 28). The "only if" part is contained in the proof of Theorem 10.

We are going to verify (i)—(iii). First we show

$$a \cup (b \cap c) = b \cap (a \cup c) \text{ if } b \geqq a\,. \tag{3}$$

Indeed, put $x = b$ and $y = c$ in (1) then $a \cup (b \cap c) =$

$$= (a \cap b) \cup (a \cap c) \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c) \cap (b \cup c) = b \cap (a \cup c)\,.$$

Now we prove (i):

$a \cup (x \cap y) = a \cup (a \cap x) \cup (a \cap y) \cup (x \cap y) =$ (by (1)) $=$
$= a \cup [(a \cup x) \cap (a \cup y) \cap (x \cup y)] =$ (put $b = a \cup x$, $c = (a \cup y) \cap (x \cup y)$ and apply (3)) $= (a \cup x) \cap \{a \cup [(a \cup y) \cap (x \cup y)]\} =$ (put $b = a \cup y$, $c = x \cup y$ and apply (3) in $\{\ \}$) $=$
$= (a \cup x) \cap \{(a \cup y) \cap (a \cup x \cup y)\} = (a \cup x) \cap (a \cup y)$, and that was to be proved.

(ii) is the dual of (i), and (1) is self-dual, therefore (ii) holds true.

To verify (iii), let $b = a \cup x = a \cup y$ and $a \cap x = a \cap y = c$, then $b \cap (x \cup y) = x \cup y$ and $c \cup (x \cap y) = x \cap y$, thus $x \cup y = b \cap (x \cup y) =$
$= (a \cup x) \cap (a \cup y) \cap (x \cup y) = (a \cap x) \cup (a \cap y) \cup (x \cap y) = c \cup (x \cap y) =$
$= x \cap y$, that is $x \cup y = x \cap y$, which implies $x = y$. Thus the verification of (i) — (iii) and thus the proof of the Theorem is completed.

(Received January 20, 1962.)

REFERENCES

[1] Birkhoff, G.: "Neutral elements in general lattices." *Bull. Amer. Math. Soc.* **46** (1940) 702—705.
[2] Birkhoff, G.: *Lattice theory*. New York, 1948.
[3] Grätzer, G.—Schmidt, E. T.: "Standard ideals." *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **12** (1961) 17—86.
[4] Ore, O.: "On the foundations of abstract algebra I." *Annals of Math.* **36** (1935) 406—437.

ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ НЕЙТРАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СТРУКТУР

G. GRÄTZER

Резюме

В качестве решения задачи 3 статьи [3], автор доказывает следующее утверждение:

Теорема. *Элемент a структуры L является нейтральным тогда и только тогда, если для всех $x, y \in L$ имеет силу соотношение*

$$(a \cap x) \cup (a \cap y) \cup (x \cap y) = (a \cup x) \cap (a \cup y) \cap (x \cup y)\,.$$

NEUER BEWEIS EINES GRAPHENTHEORETISCHEN SATZES VON P. TURÁN

von

B. ANDRÁSFAI

Von P. TURÁN stammt der folgende graphentheoretische Problemenkreis: Höchstens wie viele Kanten kann ein Graph G mit n Knotenpunkten enthalten, wenn G keinen Teilgraph mit gewissen vorgeschriebenen Eigenschaften enthält, und welche sind jene Graphen, die n Knotenpunkte haben und unter der gegebenen Bedingung die grösstmögliche Anzahl von Kanten besitzen? TURÁN behandelt zum ersten Male in einer 1941 veröffentlichten Arbeit [1] (s. auch [2]) eine derartige Frage. Satz 1 dieser Arbeit bildete den Ausgangspunkt zahlreicher Untersuchungen dieses Problemenkreises. In der vorliegenden Arbeit wird für diesen Satz ein neuer Beweis gegeben.

Der zu beweisende Satz bezieht sich auf ungerichtete, endliche Graphen. Wir schliessen auch jene Graphen nicht aus, die keine Kante bzw. keinen Knotenpunkt enthalten. Zwei Knotenpunkte — im weiteren kurz Punkte genannt — sollen durch höchstens eine Kante verbunden sein, und jede Kante soll zwei verschiedene Punkte (Endpunkte) enthalten. Die Menge der Punkte bzw. der Kanten des Graphen G wird mit M_G bzw. N_G, die Anzahl der Kanten von G mit $\nu(G)$ bezeichnet. Sind A und B Punktmengen, so wollen wir eine Kante, wenn einer ihrer Endpunkte in A, der andere in B liegt, eine *AB-Kante* nennen. Der Graph G' ist ein *Teilgraph* von G, wenn die Punkte und Kanten von G' gleichzeitig Punkte und Kanten von G sind. Ist G' ein Teilgraph von G, so sagen wir auch, dass *G G' enthält*. Ist $A \subseteq M_G$, so bezeichnet $[A]_G$ denjenigen Teilgraphen von G, der aus sämtlichen Punkten von A und aus sämtlichen AA-Kanten von G besteht. Ein Graph wird ein *vollständiger n-Graph* genannt, wenn er n Punkte hat und je zwei seiner Punkte durch eine Kante verbunden sind. $H(n, k)$ $(k \geqq 2)$ bezeichnet die folgende *Klasse* von Graphen: Jene und nur jene Graphen sind Elemente von $H(n, k)$, die n Punkte besitzen und keinen vollständigen k-Graphen enthalten. Ist $G \in H(n, k)$ und enthält G die maximale Anzahl von Kanten, so sagen wir, dass G ein *extremaler Graph* der Klasse $H(n, k)$ ist.

Die Anzahl der Elemente einer beliebigen Menge A wird mit $\alpha(A)$ bezeichnet. Gilt für die Mengen $A_1, \ldots, A_l$ $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i, j = 1, \ldots, l; i \neq j)$ und $\bigcup_{i=1}^{l} A_i = A$, so sagen wir, dass $\{A_1, \ldots, A_l\}$ eine *Zerlegung* der Menge A ist. Unter einer *gleichmässigen Zerlegung* der Punktmenge A verstehen wir eine solche Zerlegung $\{A_1, \ldots, A_l\}$ von A, für welche $|\alpha(A_i) - \alpha(A_j)| \leqq 1$ $(i, j = 1, \ldots, l)$ gilt. Aus dieser Definition folgt unmittelbar, dass wenn

$\alpha(A) = n$ und $n = q \cdot l + r$ $(0 \leqq r < l)$ besteht, so in einer gleichmässigen Zerlegung $\{A_1, \ldots A_l\}$ von A r Mengen A_i $q+1$ Punkte und $l-r$ Mengen A_i q Punkte enthalten; also wird durch n und l die Menge der nichtnegativen, ganzen Zahlen $\alpha(A_i)$ $(i = 1, \ldots, l)$ eindeutig bestimmt.

Der erwähnte Turánsche Satz lässt sich nun mit den eingeführten Begriffen folgendermassen formulieren:

Satz (Turán): *Der Graph G ist dann und nur dann ein extremaler Graph der Klasse $H(n, k)$, wenn eine solche gleichmässige Zerlegung $\{A_1, \ldots, A_{k-1}\}$ von M_G existiert, dass N_G aus sämtlichen A_i A_j-Kanten $(i, j = 1, \ldots, k-1; i \neq j)$ besteht.*

I. Zuerst beweisen wir durch vollständige Induktion bezüglich k die folgende Behauptung:

Ist G ein extremaler Graph der Klasse $H(n, k)$, so existiert eine solche Zerlegung $\{A_1, \ldots, A_{k-1}\}$ von M_G, dass N_G aus sämtlichen $A_i A_j$-Kanten $(i, j = 1, \ldots, k-1; i \neq j)$ besteht.

Die Behauptung ist für $k = 2$ richtig. Ist nämlich $G \in H(n, 2)$, so kann G keine Kante enthalten.

Nun sei $k > 2$, und nehmen wir an, dass unsere Behauptung für jedes $m \geqq 0$ in Bezug der extremalen Graphen der Klasse $H(m, k-1)$ richtig ist. Ferner sei n beliebig und G ein extremaler Graph der Klasse $H(n, k)$.

Betrachten wir alle solche Teilmengen C von M_G, für die $[C]_G$ keinen vollständigen $(k-1)$-Graphen enthält. Wählen wir aus diesen Mengen C eine solche Menge A heraus, welche die maximale Anzahl von Punkten besitzt. Es seien $\alpha(A) = n'$ und $B = M_G - A$. Auf Grund der extremalen Eigenschaften von G und A werden wir beweisen, dass

(a) $[A]_G$ ein extremaler Graph der Klasse $H(n', k-1)$ ist;

(b) G alle AB-Kanten, jedoch keine BB-Kante enthält.[1]

Aus unserer Induktionsannahme folgt dann die Existenz einer solchen Zerlegung $\{A_1, \ldots, A_{k-2}\}$ von A, bei welcher die Menge der Kanten von $[A]_G$ aus sämtlichen A_i A_j-Kanten $(i, j = 1, \ldots, k-2; i \neq j)$ besteht. Demzufolge ergibt $\{A_1, \ldots, A_{k-2}, B\}$ eine gesuchte Zerlegung von M_G.

Das Bestehen von (a) und von (b) wird folgendermassen nachgewiesen:

Bezeichnen wir mit ν_B die Anzahl derjenigen Kanten von G, die mindestens einen zu B gehörigen Endpunkt haben. Dann besteht

$$\nu(G) = \nu([A]_G) + \nu_B . \tag{1}$$

Zu keinem Punkt von G können mehr als $\alpha(A)$ Kanten inzident sein. Sei nämlich p ein beliebiger Punkt von G, und P die Menge der von p verschiedenen Endpunkte jener Kanten von G, die zu p inzident sind. $[P]_G$ enthält keinen vollständigen $(k-1)$-Graphen, da ein solcher Graph G_1, ergänzt durch p und durch jene Kanten, die p mit den Punkten von G_1 verbinden, einen vollständigen k-Graphen in G ergeben würde. Wegen der maximalen Eigenschaft von A ist also $\alpha(P) \leqq \alpha(A)$. Daraus folgt, dass

$$\nu_B \leqq \alpha(A) \cdot \alpha(B) . \tag{2}$$

[1] Falls A oder B leer sind, dann existieren keine AB- und BB-Kanten. In diesem Falle ist (b) nichtssagend.

Hier kann die Gleichheit dann und nur dann bestehen, wenn G keine BB-Kante enthält und zu jedem Punkt von B $\alpha(A)$ Kanten von G inzident sind, d. h. wenn alle AB-Kanten in G existieren.

Betrachten wir nun einen solchen Graphen G^*, für den $M_{G^*} = M_G$, $[A]_{G^*}$ ein extremaler Graph der Klasse $H(n', k-1)$ ist, und G^* alle AB-Kanten, jedoch keine BB-Kante enthält. Dann gilt

$$\nu(G^*) = \nu([A]_{G^*}) + \alpha(A) \cdot \alpha(B) .$$

G^* kann ferner keinen vollständigen k-Graphen enthalten, denn ein solcher Graph könnte höchstens einen Punkt in B besitzen, und so müsste $[A]_{G^*}$ einen vollständigen $(k-1)$-Graphen enthalten. G^* gehört also zur Klasse $H(n, k)$.

Wenn (a) nicht richtig ist, so gilt $\nu([A]_G) < \nu([A]_{G^*})$, und wenn (b) nicht besteht, dann ist wegen (2) $\nu_B < \alpha(A) \cdot \alpha(B)$. In beiden Fällen folgt aus (1) und (2) $\nu(G^*) > \nu(G)$, was jedoch der extremalen Eigenschaft von G widerspricht.

II. Es besteht die Behauptung: Enthält der Graph G n Punkte, und gibt es eine solche Zerlegung $\{A_1, \ldots, A_{k-1}\}$ von M_G, bei der G keine $A_i A_i$-Kante $(i = 1, \ldots, k-1)$ besitzt, so gilt $G \in H(n, k)$. Es müssen nämlich bei jeder Wahl von k Punkten von M_G mindestens zwei dieser Punkte derselben Menge A_i zugehören. Zwei solche Punkte sind aber nicht durch eine Kante verbunden.

Schliesslich sei G ein Graph mit n Punkten, für welchen eine solche Zerlegung $\{A_1, \ldots, A_{k-1}\}$ von M_G existiert, dass N_G aus sämtlichen $A_i A_j$-Kanten $(i, j = 1, \ldots, k-1; i \neq j)$ besteht. Laut unserer vorherigen Feststellung ist $G \in H(n, k)$. Sei $\alpha(A_i) = n_i$. Dann ist $\sum_{i=1}^{k-1} n_i = n$ und

$$\nu(G) = \binom{n}{2} - \sum_{i=1}^{k-1} \binom{n_i}{2} .$$

Der rechtsstehende Ausdruck ist dann und nur dann maximal, wenn $\sum_{i=1}^{k-1} \binom{n_i}{2}$ minimal ist. $\sum_{i=1}^{k-1} \binom{n_i}{2}$ nimmt jedoch seinen minimalen Wert dann und nur dann an, wenn $|n_i - n_j| \leq 1$ $(i, j = 1, \ldots, k-1)$ gilt; ist nämlich für irgendwelche Indizes g und h $n_g - n_h > 1$, so gilt

$$\binom{n_g - 1}{2} + \binom{n_h + 1}{2} < \binom{n_g}{2} + \binom{n_h}{2},$$

wonach $\sum_{i=1}^{k-1} \binom{n_i}{2}$ verkleinert werden kann.

Aus I und aus den obigen folgt, dass ein Graph G dann und nur dann ein extremaler Graph der Klasse $H(n, k)$ ist, wenn eine solche gleichmässige Zerlegung $\{A_1, \ldots, A_{k-1}\}$ von M_G existiert, bei welcher N_G aus sämtlichen $A_i\,A_j$-Kanten ($i, j = 1, \ldots, k - 1$; $i \neq j$) besteht. Damit ist der Turánsche Satz bewiesen.

(Eingegangen: 16. März, 1962.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] TURÁN, P.: "Egy gráfelméleti szélsőérték feladatról". *Mat. és Fiz. Lapok* **48** (1941) 436—452.
[2] TURÁN, P.: "On the theory of graphs". *Colloquium Mathematicum* **8** (1954) 19—30.

ÜBER DIE PARALLELBEREICHEN NACH INNEN VON EIBEREICHEN

von

J. CZIPSZER

Es sei K ein Eibereich, d. h. eine nichtleere, konvexe, abgeschlossene und beschränkte ebene Menge. Verschiebt man jede abgeschlossene Halbebene, welche von einer Stützgerade von K begrenzt ist und K enthält, in der zur Stützgerade normalen, nach dem Inneren der Halbebene weisenden Richtung mit dem Abstand t und bildet den Durchschnitt der verschobenen Halbebenen, so entsteht eine konvexe, abgeschlossene, im Inneren von K liegende Menge $K(t)$, welche man das *Parallelbereich nach innen von K im Abstande t* nennt. (Für $t = 0$ setzt man $K(0) = K$.) $K(t)$ kann auch als die Menge derjenigen Punkten von K definiert werden, die vom Rande von K einen Abstand nicht kleiner als t aufweisen; die zwei Definitionen sind einander gleichwertig.[1] Für $0 \leqq t \leqq \varrho_K$, wobei ϱ_K den Inkreisradius von K bezeichnet, ist $K(t)$ ein Eibereich mit inneren Punkten, für $t = \varrho_K$ ist es eine Strecke oder ein Punkt und für $t > \varrho_K$ ist es leer.

Die Betrachtung der Mengenschar $\big(K(t)\big)_{0 \leqq t \leqq \varrho_K}$ hat sich für die Herleitung der isoperimetrischen Ungleichung nebst deren Verschärfung für Eibereiche sehr fruchtbar erwiesen. (Siehe [1], [2], [3] und [4][2].)

G. Bol beweist in [1] (unter Verwendung anderer Bezeichnungen), dass der Umfang $L_K(t)$ von $K(t)$ das unbestimmte Integral einer Funktion $-\varkappa_K(t)$ ist, wobei $\varkappa_K(t)$ monoton nicht abnimmt und der Ungleichung $\varkappa_K(t) \geqq 2\pi$ genügt.[3] Daraus leitet er die Formel

$$L^2 - 4\pi O = \lim_{t=\varrho_K-0} L^2(t) + 2\int_0^{\varrho_K} L_K(t)\big(\varkappa_K(t) - 2\pi\big)\,dt$$

ab, wo L den Umfang, O die Oberfläche von K bedeutet. Diese Formel setzt die Positivität des isoperimentrischen Defizites in Evidenz. A. a. O. wird auch

[1] Siehe für diese Definitionen G. Bol [1], wo der Begriff des Parallelbereiches nach innen Th. Kaluza zugeschrieben ist.

[2] Der Begriff der Parallelmengen nach innen lässt sich für konvexe Körper des n-dimensionalen euklidischen Raumes bilden und auf den Beweis der n-dimensionalen isoperimetrischen Ungleichung anwenden. Siehe in dieser Richtung [2], [3], [5] p. 269 und [6]. In dieser Note beschäftigen wir uns aber ausschliesslich mit dem zweidimensionalen Fall.

[3] $\varkappa_K(t)$ ist gleich $2\pi + \sum \left(2 \operatorname{tg} \frac{a_P}{2} - a_P\right)$, wo a_P den Winkel der Normalen der halbseitigen Tangenten im Eckpunkt P bedeutet und die Summe über alle Eckpunkte von K ausgestreckt werden muss.

die Positivität von $L^2 - 2\varkappa(0)O$ bewiesen. A. Rényi hat in [4] die erwähnten Bolsche Resultate erneut bewiesen und andere Verschärfungen der isoperimetrischen Ungleichung ebenfalls mit Hilfe der Funktion $\varkappa_K(t)$ aufgestellt. $\varkappa_K(t)$ wird bei Rényi die *charakteristische Funktion von K* genannt.

Vor kurzem hat mir Herr Professor Rényi das Problem gestellt, diejenigen Funktionen zu kennzeichnen, welche als charakteristische Funktionen von Eibereichen auftreten können.

Um dieses Problem beantworten zu können, bemerken wir zunächst, dass die oben erwähnten Ergebnisse von Bol die folgende Behauptung enthalten:

Satz 1. *Für jedes Eibereich K mit inneren Punkten ist $L_K(t)$ in $[0, \varrho_K)$ eine konkave Funktion, welche der Ungleichung*

$$-D^+ L_K(t) \geqq 2\pi \tag{1}$$

genügt. (D^+ bedeutet rechtseitige Ableitung.)

Wir werden die Definition der charakteristischen Funktion ein wenig abändern, indem wir unter der charakteristischen Funktion eines Eibereiches K mit inneren Punkten die Funktion

$$\varkappa_K(t) = -D^+ L_K(t) \qquad (0 \leqq t < \varrho_K)$$

verstehen werden; diese $\varkappa_K(t)$ kann natürlich von der früher erwähnten (vgl. Fussnote [3]) nur für höchstens abzählbar viele t-Werte abweichen.

Laut Satz 1 ist $\varkappa_K(t)$ eine, von recht stetige, monoton nicht abnehmende Funktion, für welche $\varkappa_K(t) \geqq 2\pi$ gilt. Ausserdem ist $\varkappa_K(t)$ offenbar über $[0, \varrho_K)$ integrierbar.

Folgendes Ergebnis zeigt, dass diese Eigenschaften die charakteristischen Funktionen schon vollständig kennzeichnen.

Satz 2. *Zu jeder, in einem Intervall $[0, \varrho)$ $(\varrho > 0)$ definierte, von recht stetige, monoton nicht abnehmende und integrierbare Funktion $\varkappa(t)$, für welche*

$$\varkappa(t) \geqq 2\pi \tag{2}$$

gilt, lässt sich ein Eibereich mit inneren Punkten finden, dessen charakteristische Funktion $\varkappa(t)$ ist.

Der Vollständigkeit halber werden wir auch Satz 1 beweisen. (Man könnte übrigens diesen Satz aus der allgemeinen Theorie der konkaven Scharen von konvexen Körpern folgern.)

Wir denken im Folgenden ein rechtwinkliges Koordinatensystem in der Ebene festgelegt. Ist K ein Eibereich, so gehört jeder reellen Zahl φ eine eindeutig bestimmt Stützgerade l_φ von K und eine von dieser Stützgerade begrenzte und K enthaltende Halbebene derart, dass die zur Stützgerade normale und von der Halbebene wegweisende Richtung den Richtungswinkel φ besitzt. Diese Stützgerade soll im Folgenden als die »zum Richtungswinkel φ gehörende Stützgerade« bezeichnet werden. Wir bezeichnen mit $h(\varphi)$ den Abstand des Ursprungs von der Stützgerade, wobei dieser Abstand mit negativem Vorzeichen genommen werden muss, falls die Halbebebene den Ursprung nicht enthält. Es heisst $h(\varphi)$ bekanntlich die Stützfunktion von K. Bei dem Beweise der Sätzen 1 und 2 werden wir die folgenden Eigenschaften der Stützfunktion verwenden.

(3) *Sind K_1 und K_2 Eibereiche mit den Stützfunktionen $h_1(\varphi)$ und $h_2(\varphi)$, so ist $K_1(t) \supset K_2$ für $0 \leqq t \leqq \varrho_{K_1}$ dann und nur dann gültig, wenn $h_1 \geqq h_2 + t$ ist.*

(4) *Ist $h(t, \varphi)$ für jedes, in einem Intervall I liegenden Wert von t, eine Stützfunktion in φ und ist $q(t)$ eine in I nichtnegative Funktion, für welche $h(t, \varphi)\, q(t)$ für jedes φ über I integrierbar ist, so stellt $\int\limits_I h(t, \varphi)\, q(t)\, dt$ wiederum eine Stützfunktion dar. Insbesondere ist die Linearkombination von Stützfunktionen mit nicht negativen Koeffizienten eine Stützfunktion.*

(5) *Das Integral der Stützfunktion eines Eibereiches über ein Intervall der Länge 2π ergibt den Umfang des Bereiches.*

(3) folgt direkt aus den Definitionen. Was (4) und (5) betrifft, siehe [7], p. 28 und 65.

Beweis des Satzes 1. Die folgende Transitivitätseigenschaft der Schar $K(t)$ ist leicht einzusehen:

(6) *Setzt man $K(t_1) = K_1$, so ist $K_1(t_2 - t_1) = K(t_2)$ für $0 \leqq t_1 < t_2 \leqq \varrho_K$.*

Wir bezeichnen mit $h(t, \varphi)$ die Stützfunktion von $K(t)$ für $0 \leqq t \leqq \varrho_K$.

Verwendet man (3) mit $K_1 = K(t_1)$, $K_2 = K(t_2)$ und $t = t_2 - t_1$, so erhält man unter Beachtung von (6)

$$h(t_1, \varphi) \geqq h(t_2, \varphi) + t_2 - t_1 . \tag{7}$$

Hieraus ergibt sich für $0 < \theta < 1$

$$h(t_1, \varphi) - (1 - \theta)(t_2 - t_1) \geqq \theta\, h(t_1, \varphi) + (1 - \theta)\, h(t_2, \varphi) .$$

Die rechte Seite ist nach (4) Stützfunktion eines Eibereiches K'. Gemäss (6) und (3) zieht man aus obiger Ungleichung die Implikation

$$K\big(\theta t_1 + (1 - \theta)\, t_2\big) = K\big(t_1 + (1 - \theta)(t_2 - t_1)\big) \supset K'.$$

Wendet man (3) mit $K_1 = K(\theta t_1 + (1 - \theta) t_2)$, $K_2 = K'$ und $t = 0$ an, so folgert man hieraus die Ungleichung $h(\theta t_1 + (1 - \theta)\, t_2, \varphi) \geqq \theta\, h(t_1, \varphi) + (1 - \theta)\, h(t_2, \varphi)$. (Der obige Beweis dieser Ungleichung stammt von G. Bol, siehe [3], p. 41.) Integriert man nach φ über $[0, 2\pi]$, so erhält man wegen (5)

$$L_K\big(\theta t_1 + (1 - \theta)\, t_2\big) \geqq \theta\, L_K(t_1) + (1 - \theta)\, L_K(t_2) ,$$

womit die Konkavität von $L_K(t)$ bewiesen ist.

Die Integration von (6) über $[0, 2\pi]$ liefert

$$-\frac{L_K(t_1) - L_K(t_2)}{t_1 - t_2} \geqq 2\pi .$$

(1) ergibt sich hieraus, indem man t_2 gegen t_1 streben lässt.

Beweis des Satzes 2. Man kann sehr leicht einsehen, dass die konvexe Hülle des Einheitskreises und des Punktes $\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}, 0\right)$ für $0 \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ $\max\left(1, \dfrac{\cos\varphi}{\cos\alpha}\right)$ ist.

Wir bezeichnen mit $\alpha(t)$ die einzige, im Intervall $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ fallende Lösung der Gleichung

$$\varkappa(t) = 2(\pi - \alpha + \operatorname{tg}\alpha) .$$

Wegen (2) und der Monotonität von $\varkappa(t)$, ist $\alpha(t)$ eine für jedes $0 \leqq t < \varrho$ definierte, nicht abnehmende Funktion. Wir setzen

$$h(\varphi) = \int_0^\varrho \max\left(1, \frac{\cos\varphi}{\cos\alpha(t)}\right) dt \,.$$

Infolge der Beziehung

$$\frac{1}{\cos\alpha(t)} \leqq \frac{\sin\alpha(t) + \cos\alpha(t)}{\cos\alpha(t)} < \frac{1}{2}\varkappa(t) + 1$$

und der Integrierbarkeit von $\varkappa(t)$, ist $h(\varphi)$ für jedes reelle φ definiert. Nach den oben gesagten ist der Integrand für jedes t eine Stützfunktion, so dass $h(\varphi)$ in Betracht auf (4) die Stützfunktion eines Eibereiches K ist.

Wegen $h(\varphi) \geqq \varrho$ enthält K den um den Ursprung geschriebenen Kreis vom Radius ϱ, so dass

$$\varrho_K \geqq \varrho \tag{8}$$

ist. K besitzt also innere Punkte; wir werden zeigen, dass seine charakteristische Funktion gleich $\varkappa(t)$ ist. Damit wird der Beweis vollendet.

Infolge (8) ist $K(t)$ für $0 \leqq t < \varrho$ nicht leer; seine Stützfunktion sei $h(t, \varphi)$. Wir setzen noch

$$\tilde{h}(t, \varphi) = \int_t^\varrho \max\left(1, \frac{\cos\varphi}{\cos\tau}\right) d\tau \qquad (0 \leqq t < \varrho)\,.$$

$\tilde{h}(t, \varphi)$ ist, genau wie $h(\varphi)$, Stützfunktion eines Eibereiches, das wir mit K_t bezeichnen. Man hat offenbar

$$h(\varphi) \geqq \tilde{h}(t, \varphi) + t \tag{9}$$

und in Betracht auf die Monotonität von $\alpha(t)$ auch

$$h(\varphi) = \tilde{h}(t, \varphi) + t \quad \text{für} \quad \alpha(t) \leqq |\varphi| \leqq \pi\,. \tag{10}$$

Es folgt aus (9) und (3) $K(t) \supset K_t$ und mithin

$$h(t, \varphi) \geqq \tilde{h}(t, \varphi)\,. \tag{11}$$

(7) ergibt für $t_1 = 0$

$$h(\varphi) \geqq h(t, \varphi) + t\,. \tag{12}$$

Die Formeln (10), (11) und (12) haben

$$\tilde{h}(t, \varphi) = h(t, \varphi) \qquad \text{für} \quad \alpha(t) \leqq |\varphi| \leqq \pi \tag{13}$$

zur Folge.

Aus der, für $|\varphi| \leqq \alpha(t)$ gültigen Formel

$$\tilde{h}(t, \varphi) = (\varrho - t)\cos\varphi$$

liest man sofort ab, dass die zu den Richtungswinkeln $\leqq \alpha(t)$ gehörigen Stützgeraden von K_t alle durch denselben Punkt $P_t = (\varrho - t, 0)$ der x-Achse gehen. Folglich gehört P_t zu K_t und um so mehr zu $K(t)$. Beachten wir (13), so sehen wir dass die zu den Richtungswinkeln $\varphi = \pm\, \alpha(t)$ gehörige Stützgeraden von $K(t)$ mit derjenigen von K_t identisch sind, so dass sie sich auch in P_t schneiden. Folglich ist P_t ein Eckpunkt von $K(t)$ und die Stützgeraden von $K(t)$, welche zu Richtungswinkeln $\leqq \alpha(t)$ gehören, ebenfalls durch P_t gehen. Das bedeutet, dass für jedes $\varphi \in [-\alpha(t), \alpha(t)]$ die zugehörigen Stützgeraden von K_t und $K(t)$ identisch sind, folglich besteht die Gleichung (13) auch für $|\varphi| \leqq \alpha(t)$. Damit haben wir gezeigt, dass die Formel

$$h(t, \varphi) = \int_t^{\varrho} \max\left(1, \frac{\cos \varphi}{\cos \alpha(\tau)}\right) d\tau \qquad (0 \leqq t < \varrho)$$

für jedes φ gültig ist.

Wir können jetzt den Umfang von $K(t)$ gemäss (5) berechnen:

$$L_K(t) = \int_{-\pi}^{\pi} h(t, \varphi)\, d\varphi = 2 \int_t^{\varrho} \int_0^{\pi} \max\left(1, \frac{\cos \varphi}{\cos \alpha(t)}\right) d\varphi\, d\tau =$$

$$= 2 \int_t^{\varrho} \left[\int_0^{\alpha(\tau)} \frac{\cos \varphi}{\cos \alpha(\tau)}\, d\varphi + \int_{\alpha(\tau)}^{\pi} d\varphi \right] d\tau =$$

$$= 2 \int_t^{\varrho} \big(\operatorname{tg} \alpha(\tau) + \pi - \alpha(\tau)\big)\, d\tau = \int_t^{\varrho} \varkappa(\tau)\, d\tau .$$

Hieraus ergibt sich durch (rechtseitiges) Differenzieren

$$\varkappa_K(t) = \varkappa(t) \qquad (0 \leqq t < \varrho). \tag{14}$$

Da $L_K(t)$ monoton abnimmt und für $t \to \varrho$ gegen 0 strebt, muss sich $K(\varrho)$ auf einen Punkt reduzieren. Folglich ist $\varrho_K = \varrho$ und (14) besagt also die Identität von $\varkappa_K$ und $\varkappa$, w. z. b. w.

(Eingegangen: 22. März, 1962.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Bol, G.: „Isoperimetrische Ungleichungen für Bereiche auf Flächen". *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung* **51** (1941) 219–257.

[2] Bol, G.: „Einfache Isoperimetriebeweise für Kreis und Kugel". *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hansischen Universität* **15** (1943) 27–36.

[3] Bol, G.: „Beweis einer Vermutung von H. Minkowski". Ibid., 37–56.

[4] Rényi, A.: „Integral formulae in the theory of convex curves". *Acta Scientiarum Mathematicarum* **2** (1946–48) 158–166.

[5] Hadwiger, H.: *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Springer, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1957.

[6] Dinghas, A.: „Bemerkung zu einer Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung durch H. Hadwiger". *Mathematische Nachrichten* **1** (1948) 284–286.

[7] Bonnesen, T.–Fenchel, W.: *Theorie der konvexen Körper*. Springer, Berlin, 1934.

О ВНУТРЕННИХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОБЛАСТЯХ ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЕЙ

J. CZIPSZER

Резюме

Пусть K есть ограниченное, замкнутое выпуклое, плоскостное множество с внутренними точками. Обозначим через ϱ максимум радиусов окружностей, которые можно вписать в K. Пусть $0 \leqq t < \varrho$; обозначим через $K(t)$ множество тех точек K, расстояние которых от границы K не меньше t. Как известно, $K(t)$ также замкнутое, выпуклое множество с внутренними точками, его называют внутренней параллельной областью K на расстоянии t. Известно также, что периметр $K(t)$, которую мы обозначим через $L(t)$, есть вогнутая, монотонно убывающая функция, причем

$$\varkappa(t) = -\frac{d}{dt} L(t) \geqq 2\pi .$$

$\left(\text{Здесь } \frac{d}{dt} \text{ обозначает правую производную. См. [1], [4].}\right)$ По примеру [4] назовем $\varkappa(t)$ характеристической функцией K. Из сказанного следует, что $\varkappa(t)$ есть определенная в $[0, \varrho)$, монотонно возрастающая, непрерывная справа, интегрируемая функция, которая удовлетворяет неравенству $\varkappa(t) \geqq 2\pi$. В настоящей работе доказывается, что если функция $\varkappa(t)$ обладает этими свойствами, то существует такое ограниченное, замкнутое, выпуклое, плоскостное множество с внутренними точками, характеристическая функция которой есть $\varkappa(t)$.

THREE NEW PROOFS AND A GENERALIZATION OF A THEOREM OF IRVING WEISS

by

A. RÉNYI

Dedicated to Prof. P. Erdős, at his 50th birthday.

Introduction

Let us suppose that N balls are distributed at random among n boxes, so that each ball may fall into any box with the same probability $\frac{1}{n}$, independently of what happens to the other balls. Let $\zeta_{n,N}$ denote the number of boxes which remain empty. I. WEISS [1] has proved that if $n \to +\infty$ and $N = N(n)$ is a function of n such that $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{N}{n} = \alpha > 0$ then $\zeta_{n,N}$ is in the limit normally distributed, its expectation and variance being asymptotically equal to $ne^{-\frac{N}{n}}$ and $ne^{-\frac{N}{n}}\left[1-\left(1+\frac{N}{n}\right)e^{-\frac{N}{n}}\right]$ respectively; by other words we have (denoting by $\mathbf{P}(\ldots)$ the probability of the event in the brackets) for any real x

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ \frac{N}{n}\to\alpha}} \mathbf{P}\left(\frac{\zeta_{n,N} - ne^{-\frac{N}{n}}}{\sqrt{ne^{-\frac{N}{n}}\left[1-\left(1+\frac{N}{n}\right)e^{-\frac{N}{n}}\right]}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du . \tag{1}$$

WEISS used the method of moments, which in this case leads to rather cumbersome calculations. In view of the simplicity of the question (which is in striking contrast with the difficulties of the proof) and the importance of its various possible practical applications, we considered it worth while trying to find a simpler proof.

We succeeded in finding three new proofs for the result of Weiss all using the method of characteristic functions. All these proofs are definitely simpler than that of I. WEISS, though a certain amount of subtle asymptotic analysis is indispensable. Besides their simplicity, these proofs are of a certain methodological interest, as they may serve as patterns for the solution of other similar problems.

These proofs yiels also a more general result, namely that (1) remains valid also if $\frac{N}{n} \to 0$ or $\frac{N}{n} \to +\infty$ provided that

$$ne^{-\frac{N}{n}}\left(1-\left(1+\frac{N}{n}\right)e^{-\frac{N}{n}}\right) \to +\infty$$

$\left(\text{this is equivalent in case } \frac{N}{n} \to 0 \text{ with } \frac{N^2}{n} \to +\infty \text{ and in case } \frac{N}{n} \to +\infty\right.$ $\left.\text{with } \frac{N}{n} - \log n \to -\infty\right)$. We prove the generalization of the theorem of WEISS to the case $\frac{N}{n} \to +\infty$, $\frac{N}{n} - \log n \to -\infty$ by the second method, and the generalization to the case $\frac{N}{n} \to 0$, $\frac{N^2}{n} \to +\infty$ by the third method.

The problem in question is essentially that of proving the central limit theorem for certain not independent but weakly (and symmetrically) dependent random variables.) The situation is similar to that of sampling from a finite population (see [2]). The variables in question are the indicators of the emptiness of the different boxes; as a matter of fact $\zeta_{n,N}$ can be written in the form

$$\zeta_{n,N} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n$$

where ε_k is 1 or 0 according to whether the k-th box is empty or not ($k = 1, 2, \ldots, n$). The dependence is in this case not negligible in the limit, as is seen from the formula for the variance.

As a matter of fact, the mean value of ε_k being $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^N \sim e^{-\frac{N}{n}}$ if the dependence would be in the limit negligible, the variance would be asymptotically equal to $ne^{-\frac{N}{n}}\left(1 - e^{-\frac{N}{n}}\right)$; while as mentioned above, the variance is definitely smaller $\left(\text{by the factor } 1 - \frac{N}{n(e^{N/n} - 1)} < 1\right)$ which shows that there is a not negligible negative correlation among the variables ε_k.

As a matter of fact, the variance $\mathbf{D}^2(\zeta_{n,N})$ of $\zeta_{n,N}$ is

$$\mathbf{D}^2(\zeta_{n,N}) = n^2\left[\left(1 - \frac{2}{n}\right)^N - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2N}\right] + n\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^N - \left(1 - \frac{2}{n}\right)^N\right]$$

and therefore

$$\mathbf{D}^2(\zeta_{n,N}) = ne^{-\frac{N}{n}}\left[1 - \left(1 + \frac{N}{n}\right)e^{-\frac{N}{n}}\right]\cdot\left(1 + O\left(\frac{N}{n^2}\right)\right).$$

In § 1 we give the first proof which is worked out only for the case when $\frac{N}{n} \to \alpha > 0$. In § 2 we present the second proof. In § 3 we give the third proof and in § 4 add some remarks.

This paper was written during the stay of the author, as a visiting professor, at the Department of Statistics of the Michigan State University during the summer term of the year 1961. The author is indebted to Prof. H. RUBIN for calling his attention to the paper of I. WEISS.

§ 1. The first proof

Let $P_{n,N}(k)$ denote the probability that there are exactly k empty boxes if n denotes the total number of boxes and N the number of balls. By other words we put

$$P_{n,N}(k) = \mathbf{P}(\zeta_{n,N} = k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

The following two recursion formulae hold:

$$P_{n,N+1}(k) = P_{n,N}(k)\left(1 - \frac{k}{n}\right) + P_{n,N}(k+1)\frac{k+1}{n} \tag{2}$$

and

$$P_{n,N}(k) = P_{n-1,N}(k-1)\cdot\left(1 - \frac{1}{n}\right)^N + \sum_{l=1}^{N}\binom{N}{l}\frac{1}{n^l}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{N-l}\cdot P_{n-1,N-l}(k). \tag{3}$$

We obtain (2) by considering what happens if after throwing N balls into the boxes, one ball more is added: this may fall in a box which already contains a ball, or into an empty box. The two terms on the right correspond to these two possibilities.

As regards the less evident recursion formula (3) this can be obtained by the following argument: Let us label the boxes by the numbers 1, 2,. . ., n and let us denote by l the number of balls which fall into the first box. We distinguish between the cases $l = 0$ and $l \geqq 1$. If $l = 0$ $\left(\text{the probability of which is } \left(1 - \frac{1}{n}\right)^N\right)$ then the N balls are distributed among the remaining $n - 1$ boxes so that among these $k - 1$ boxes remain empty. This gives the first term on the right of (3). If however l is some positive integer, $1 \leqq l \leqq n$ $\left(\text{the probability of which is } \binom{N}{l}\frac{1}{n^l}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{N-l}\right)$ then the remaining $N - l$ balls are distributed among $n - 1$ boxes so that k boxes remain empty. Thus we obtain the sum on the right of (3).

Now let us introduce the characteristic funtion $\varphi_{n,N}(t)$ of $\zeta_{n,N}$, i.e. we put

$$\varphi_{n,N}(t) = \sum_{k=0}^{n} P_{n,N}(k)\, e^{ikt}\,. \tag{4}$$

We obtain from (3) the recursion formula

$$\varphi_{n,N}(t) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^N \cdot e^{it}\cdot\varphi_{n-1,N}(t) + \sum_{l=1}^{N}\binom{N}{l}\frac{1}{n^l}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{N-l}\cdot\varphi_{n-1,N-l}(t)\,. \tag{5}$$

Let us now introduce the generating function

$$G_n(t, z) = \sum_{N=0}^{\infty}\frac{\varphi_{n,N}(t)\cdot(nz)^N}{N!}\,. \tag{6}$$

We obtain from (5) easily

$$G_n(t, z) = G_{n-1}(t, z)\,(e^{it} + e^z - 1)\,. \qquad (n = 2, 3, \ldots). \tag{7}$$

As evidently

$$\varphi_{1,N}(t) = \begin{cases} e^{it} & \text{for } N = 0 \\ 1 & \text{for } N \geq 1 \end{cases} \tag{8}$$

and thus

$$G_1(t, z) = e^{it} + e^z - 1 \tag{9}$$

we obtain by (7) the surprisingly simple formula

$$G_n(t, z) = (e^{it} + e^z - 1)^n . \tag{10}$$

One can deduce (10) also from (2); as a matter of fact from (2) we get for G_n the partial differential equation $\frac{\partial G_n}{\partial z} = nG_n + \frac{e^{-it} - 1}{i} \frac{\partial G_n}{\partial t}$; taking into account that $G_n(t, 0) = \varphi_{n,0}(t) = e^{int}$, we get (10).

Now to prove (1) we apply the method of Laplace to obtain from (10) an asymptotic formula for $\varphi_{n,N}(t)$. We have by Cauchy's formula

$$\varphi_{n,N}(t) = \frac{N!}{n^N \cdot 2\pi i} \oint \frac{(e^{it} + e^z - 1)^n}{z^{N+1}} dz \tag{11}$$

where the integration may be carried out on any circle around the point $z = 0$.

We shall prove that putting

$$\alpha_n = \frac{N}{n} \tag{12}$$

and

$$D_n^2 = e^{-\frac{N}{n}} \left(1 - \left(1 + \frac{N}{n}\right) \cdot e^{-\frac{N}{n}}\right) \tag{13}$$

we have

$$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ \frac{N}{n} \to \alpha}} \varphi_{n,N}\left(\frac{t}{D_n \sqrt{n}}\right) \cdot e^{-\frac{itn \cdot e^{-\alpha_n}}{D_n \sqrt{n}}} = e^{-\frac{t^2}{2}} . \tag{14}$$

((14) is clearly equivalent to (1)).

Let us choose as the path of integration in (11) the circle $|z| = \alpha_n$, by putting $z = \alpha_n \zeta$ with $\zeta = e^{iu}$ $(-\pi \leq u \leq + \pi)$. Then we obtain, by Stirling's formula, putting $u = \frac{v}{\sqrt{n \alpha_n}}$

$$\varphi_{n,N}\left(\frac{t}{D_n \sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi\sqrt{n\alpha_n}}^{+\pi\sqrt{n\alpha_n}} E_n^n \cdot e^{-iv\sqrt{n\alpha_n}} dv \tag{15}$$

where

$$E_n = \left(e^{\frac{it}{D_n \sqrt{n}}} - 1\right) \cdot e^{-\alpha_n} + e^{\alpha_n \left(e^{\frac{iv}{\sqrt{n\alpha_n}}} - 1\right)} . \tag{16}$$

Clearly for $\left|\frac{v}{\sqrt{n\alpha_n}}\right| \geqq \delta > 0$ we have for $n \geqq n_1$ (D_n and α_n being bounded from below by a positive constant)

$$E_n \leqq q < 1 \tag{17}$$

where q depends only on δ and α. It follows that

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\delta\sqrt{\alpha_n n} \leq |v| \leq \pi\sqrt{\alpha_n \cdot n}} |E_n|^n \, dv = 0 \,. \tag{18}$$

On the other hand for $\sqrt[7]{n\alpha_n} \leq |v| \leq \delta\sqrt{n\alpha_n}$, in view of

$$|E_n|^2 = e^{2\alpha_n\left(\cos\frac{v}{\sqrt{n\alpha_n}}-1\right)} + 2e^{-2\alpha_n}\left(1-\cos\frac{t}{D_n\sqrt{n}}\right) - \tag{19}$$

$$- 4e^{\alpha\left(\cos\frac{v}{\sqrt{n\alpha_n}}-2\right)} \cdot \sin\frac{t}{2\sqrt{n}}\sin\left(\frac{t}{2\sqrt{n}} - \frac{v}{\sqrt{n\alpha_n}}\right),$$

we get

$$|E_n|^2 \leqq 1 - C_\delta\frac{v^2}{n} + O\left(\frac{t^2+|tv|}{n}\right) \tag{20}$$

where $C_\delta > 0$ depends only on δ, which implies

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\sqrt[7]{n\alpha_n}}^{\delta\sqrt{n\alpha_n}} |E_n|^n \, dv = 0 \,. \tag{21}$$

Thus we obtain from (13), (18) and (21)

$$\varphi_{n,N}\left(\frac{t}{D_n\cdot\sqrt{n}}\right) e^{-\frac{itne^{-\alpha_n}}{D_n\sqrt{n}}} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sqrt[7]{n\alpha_n}}^{+\sqrt[7]{n\alpha_n}} E_n^n \cdot e^{-iv\sqrt{n\alpha_n} - \frac{itne^{-\alpha_n}}{D_n\sqrt{n}}} \, dv \,. \tag{22}$$

Now we get by an elementary calculation

$$E_n^n \cdot e^{-iv\sqrt{n\alpha_n} - \frac{itne^{-\alpha_n}}{D_n\sqrt{n}}} = e^{-\frac{t^2}{2} - \frac{\left(v - \frac{t\sqrt{\alpha_n}}{D_n}e^{-\alpha_n}\right)^2}{2}} + O\left(\frac{v^3}{\sqrt{n}}\right). \tag{23}$$

Thus it follows from (22) that (14) holds. As mentioned already, this proves (1).

§ 2. The second proof

In this § we give a second proof for (1) which leads at the same time to the following more general

Theorem 1. *If we distribute at random N balls among n boxes where $N = N(n)$ is a function of n such that $\frac{N(n)}{n}$ is bounded from below and* $\lim_{n\to+\infty} \frac{N(n)}{n} - \log n \to -\infty$, *then we have, putting $\alpha_n = \frac{N(n)}{n}$ for any real x*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\zeta_{n,N(n)} - ne^{-\alpha_n}}{\sqrt{ne^{-\alpha_n}[1-(1+\alpha_n)e^{-\alpha_n}]}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du .$$

Remark. In case $\alpha_n \to +\infty$ of course the result can be written also in the simpler form

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\zeta_{n,N(n)} - ne^{-\alpha_n}}{\sqrt{ne^{-\alpha_n}}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du .$$

Proof. The idea of the proof which will be given in this § is one already applied in the paper [3]. Let us put

$$S_r = \mathbf{M}\Big(\sum_{1\leq k_1<k_2<\ldots<k_r\leq n} \varepsilon_{k_1}\varepsilon_{k_2}\ldots\varepsilon_{k_r}\Big) \tag{24}$$

where $\mathbf{M}(\ldots)$ denotes the expectation of the random variable in the brackets. Then evidently

$$S_r = \sum_{j=r}^{n} P_{n,N}(j)\binom{j}{r} \tag{25}$$

and thus

$$\sum_{r=0}^{n} S_r(x-1)^r = \sum_{j=0}^{n} P_{n,N}(j)\,x^j . \tag{26}$$

Now we can give a simple formula for S_r; in fact we have

$$S_r = \binom{n}{r}\left(1-\frac{r}{n}\right)^N . \tag{27}$$

Thus we get for the characteristic function $\varphi_{n,N}(t)$ defined by (4) the explicit formula

$$\varphi_{n,N}(t) = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left(1-\frac{r}{n}\right)^N (e^{it}-1)^r . \tag{28}$$

Of course (28) can be deduced also directly from (11).

In order to prove theorem 1 we consider the function

$$\psi_{n,N}(t) = \varphi_{n,N}\left(\frac{t}{D_n\sqrt{n}}\right) e^{-\frac{it\sqrt{n}\,e^{-\alpha_n}}{D_n}\left(1-\frac{N-n\alpha_n}{n}\right)} \tag{29}$$

where N is now not identical with $N(n)$, but is an independent nonnegative integral-valued variable. Then we have by (28), putting $y = e^{\frac{it}{D_n \sqrt{n}}}$,

$$\psi_{n,N}(t) = y^{-ne^{-\alpha_n}(1+\alpha_n)} \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \left(1 - \frac{r}{n}\right)^N (y-1)^n \, y^{Ne^{-\alpha_n}} . \tag{30}$$

It follows that putting

$$K_n(t) = \sum_{N=0}^{\infty} \psi_{n,N}(t) \frac{(\alpha_n \cdot n)^N e^{-\alpha_n \cdot n}}{N!} \tag{31}$$

we have

$$K_n(t) = e^{\alpha_n \cdot n(y^{e^{-\alpha_n}}-1)} \, y^{-ne^{-c_n}(1+\alpha_n)} \left(1 + (y-1)\, e^{-\alpha_n y^{e^{-\alpha_n}}}\right)^n . \tag{32}$$

Now if α_n is bounded from below and $\alpha_n - \log n \to -\infty$ the right hand side of (32) can be evaluated as follows

$$K_n(t) \sim e^{-\frac{t^2}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} . \tag{33}$$

Thus we obtain

$$\lim_{n \to +\infty} K_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} . \tag{34}$$

Now evidently $|\psi_{n,N}(t)| \leq 1$ and thus by the central limit theorem, if $\omega_n = \log (n \alpha_n)$ then we have

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \sum_{|N - \alpha_n \cdot n| > \omega_n \sqrt{n\alpha_n}} \psi_{n,N}(t) \frac{(n \alpha_n)^N e^{-n\alpha_n}}{N!} \right| = 0 \tag{35}$$

and

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{|N - n\alpha_n| \leq \omega_n \sqrt{n \alpha_n}} \frac{(n \alpha_n)^N e^{-n\alpha_n}}{N!} = 1 . \tag{36}$$

We shall show now that for

$$|N - n\alpha_n| \leq \omega_n \sqrt{n\alpha_n} \tag{37}$$

we have

$$|\psi_{n,N}(t) - \psi_{n,N(n)}(t)| = O\left(\frac{\log^3 n}{\sqrt{n}}\right) . \tag{38}$$

This implies by virtue of (34), (35) and (36) that

$$\lim_{n \to +\infty} \psi_{n,N(n)}(t) = e^{-t^2/2} . \tag{39}$$

As we have

$$\psi_{n,N(n)}(t) = \varphi_{n,N(n)}\left(\frac{t}{D_n \sqrt{n}}\right) e^{-\frac{it\sqrt{n}\, e^{-\alpha_n}}{D_n}} \tag{40}$$

it will follow from (39) that (14), and thus Theorem 1 holds.

Thus it remains only to prove (38). In view of (2) we obtain,

$$(41)\quad \psi_{n,N+1}(t)-\psi_{n,N}(t)=\left(e^{\frac{ite^{-\alpha_n}}{D_n\sqrt{n}}}-1\right)\psi_{n,N}(t)+\frac{\left(e^{-\frac{it}{D_n\sqrt{n}}}-1\right)}{n}\sum_{k=1}^{\infty}P_{n,N}(k)\,k\cdot e_k$$

where

$$e_k=e^{\frac{it}{D_n\sqrt{n}}\left(k-ne^{-\alpha_n}(1+\alpha_n)+(N+1)e^{-\alpha_n}\right)}.$$

Thus we obtain

$$(42)\quad \begin{aligned}\psi_{n,N+1}(t)-\psi_{n,N}(t)&=\left[e^{\frac{ite^{-\alpha_n}}{D_n\sqrt{n}}}-1-\left(e^{+\frac{it}{D_n\sqrt{n}}}-1\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^N\right]\psi_{n,N}(t)+\\&+\frac{\left(e^{-\frac{it}{D_n\sqrt{n}}}-1\right)}{n}\sum_{k=0}^{\infty}P_{n,N}(k)\left(k-n\left(1-\frac{1}{n}\right)^N\right)\cdot e_k\,.\end{aligned}$$

Thus we get for $|N-n\,\alpha_n|=O(\omega_n\sqrt{n\,\alpha_n})$

$$(43)\quad \begin{aligned}|\psi_{n,N+1}(t)-\psi_{n,N}(t)|&=O\left(\frac{(\log n)^{3/2}}{n}\right)+\\&+O\left(\frac{1}{D_n\cdot n^{3/2}}\sum_{k=0}^{\infty}P_{n,N}(k)\cdot\left|k-n\left(1-\frac{1}{n}\right)^N\right|\right).\end{aligned}$$

As clearly

$$(44)\quad \sum P_{n,N}(k)\left|k-n\left(1-\frac{1}{n}\right)^N\right|\leq \mathbf{D}(\zeta_{n,N})$$

where $\mathbf{D}^2(\zeta_{n,N})$ denotes the variance of $\zeta_{n,N}$ and we have

$$\mathbf{D}^2(\zeta_{n,N})\sim n\,D_n^2$$

it follows

$$|\psi_{n,N+1}(t)-\psi_{n,N}(t)|=O\left(\frac{(\log n)^{3/2}}{n}\right).$$

Thus if $|N-n\,\alpha_n|\leq\omega_n\sqrt{n\,\alpha_n}$ we have

$$(45)\quad |\psi_{n,N}(t)-\psi_{n\,N(n)}(t)|=O\left(\frac{\log^3 n}{\sqrt{n}}\right).$$

This proves (39), and thus Theorem 1.

§ 3. The third proof

In this § we shall prove the following

Theorem 2. *If we distribute N balls at random among n boxes, where $N=N(n)$ is a function of n such that for $n\to+\infty$ $\frac{N(n)}{n}$ is bounded from above and*

$$(46)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{N^2(n)}{n}=+\infty\,,$$

and $\zeta_{n,N(n)}$ *denotes the number of empty boxes, then we have, putting* $\alpha_n = \dfrac{N(n)}{n}$ *for any real* x

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\zeta_{n,N(n)} - ne^{-\alpha_n}}{\sqrt{ne^{-\alpha_n}[1-(1+\alpha_n)e^{-\alpha_n}]}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du . \tag{47}$$

Remark. In case $\alpha_n \to 0$, the result can be written in the simpler form

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\zeta_{n,N(n)} - ne^{-\alpha_n}}{\alpha_n \sqrt{\frac{n}{2}}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du \tag{47a}$$

or, putting $\zeta^*_{n,N(n)} = \zeta_{n,N(n)} - n(1-\alpha_n)$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\zeta^*_{n,N(n)} - \frac{n\alpha_n^2}{2}}{\alpha_n \sqrt{\frac{n}{2}}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du . \tag{47b}$$

Proof. Let us note first that putting

$$D_n^2 = e^{-\alpha_n}\left(1 - (1+\alpha_n)e^{-\alpha_n}\right) \tag{48}$$

our conditions on $N(n)$ imply that

$$\lim_{n\to+\infty} nD_n^2 = +\infty . \tag{49}$$

Let us introduce the random variables ν_k ($k = 1, 2, \ldots$) defined as follows: ν_k is the least number such that after distributing ν_k balls among the n boxes, exactly k boxes will be occupied. Let us put further $\delta_1 = \nu_1$, $\delta_k = \nu_k - \nu_{k-1}$ ($k = 2, 3, \ldots$). The random variables δ_k are clearly independent, and we have $\delta_1 \equiv 1$ and

$$\mathbf{P}(\delta_k = j) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1}\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \qquad (k = 2, 3, \ldots) . \tag{50}$$

It follows that the characteristic function of δ_k is

$$f_k(t) = \mathbf{M}(e^{it\delta_k}) = \frac{e^{it}\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{1 - \left(\frac{k-1}{n}\right)e^{it}} \tag{51}$$

and thus the characteristic function of ν_k is

$$g_k(t) = \prod_{j=1}^{k} f_j(t) = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{e^{it}\left(1 - \frac{j}{n}\right)}{1 - \frac{je^{it}}{n}} . \tag{52}$$

Let us calculate now the expectation and the variance of ν_k. We have evidently

$$\mathbf{M}(\delta_k) = \frac{n}{n-k+1} \tag{53}$$

and thus

$$\mathbf{M}(\nu_k) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{n}{n-j} = n \log \frac{n}{n-k} + O(1) \tag{54}$$

further

$$\mathbf{D}^2(\delta_k) = \frac{1}{\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^2} - \frac{1}{\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)} \tag{55}$$

and thus

$$\mathbf{D}^2(\nu_k) = \frac{k}{1 - \frac{k}{n}} - n \log \frac{n}{n-k} + O(1)\,. \tag{56}$$

Now we calculate the third absolute moment of δ_k. We have

$$\mathbf{M}\left(\left|\delta_k - \frac{n}{n-k+1}\right|^3\right) = O\left(\frac{k}{n}\right). \tag{57}$$

Thus Liapounoff's theorem can be applied to $\nu_k = \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_k$ if $\frac{k}{\sqrt{n}} \to +\infty$.

It follows that if $k = k(n)$ is a function of n such that $\frac{k(n)}{\sqrt{n}} \to +\infty$ then for any real x

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\nu_k - n \log \frac{1}{1-\frac{k}{n}}}{\sqrt{\frac{k}{1-\frac{k}{n}} - n \log \frac{1}{1-\frac{k}{n}}}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du\,. \tag{58}$$

Now let us take into account that

$$\mathbf{P}(\nu_k \leq N) = \mathbf{P}(\zeta_{n,N} \leqq n-k)\,. \tag{59}$$

Let us suppose that

$$N = n \log \frac{1}{1-\frac{k}{n}} + x \sqrt{\frac{k}{1-\frac{k}{n}} - n \log \frac{1}{1-\frac{k}{n}}} + O(1) \tag{60}$$

and solve this approximate equation approximately for k.

It is easy to see that we get

$$k = n(1 - e^{-\alpha_n}) - x\sqrt{ne^{-\alpha_n}(1 - (1+\alpha_n)e^{-\alpha_n})} + O(1) \tag{61}$$

further $\frac{N^2}{n} \to +\infty$ implies $\frac{k^2}{n} \to +\infty$. Thus it follows from (58) and (59) that

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\zeta_{n,N} - ne^{-\alpha_n}}{\sqrt{ne^{-\alpha_n}(1-(1+\alpha_n)e^{-\alpha_n})}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du\,. \tag{62}$$

This proves Theorem 2.

§ 4. Some remarks

Theorems 1 and 2 settle the question of the asymptotic distribution of the number of empty boxes if there are n boxes at all, and denoting by $N = N(n)$ the number of balls, $\frac{N(n)}{\sqrt{n}} \to +\infty$ and $\frac{N(n)}{n} - \log n \to -\infty$. In the limiting case $\frac{N(n)}{n} - \log n \to \gamma$ with some real γ it can be proved by much more elementary methods that the number of empty boxes is in the limit distributed according to Poisson's law, with mean value $e^{-e^{-\gamma}}$ (see e.g. [4] and also [5].) If $\frac{N(n)}{n} - \log n \to +\infty$ then with probability tending to 1 there will be no empty boxes at all. On the other hand if $N = o(\sqrt{n})$ then it is almost sure that all balls are in different boxes and thus with probability tending to 1 the number of empty boxes will be exactly equal to $n - N$. Finally for $N \sim \delta\sqrt{n}$ with $\delta > 0$ the quantity $\zeta_{n,N} - n + N$ will have in the limit a Poisson distribution with mean value $\frac{\delta^2}{2}$. As these results are quite elementary, we do not go into details. We wanted only to point out that from the results of the present paper a complete picture is obtained concerning the behaviour of the distribution of $\zeta_{n,N}$ in the limit if $N = N(n)$ tends to infinity with $n \to +\infty$ in an arbitrary manner.

(Received April 9, 1962.)

REFERENCES

[1] WEISS, I.: "Limiting distribution in some occupancy problems". *Applied Math. and Stat. Laboratory, Stanford University, Technical Report* No. 28, 1955.

[2] ERDŐS, P.—RÉNYI, A.: "On the central limit theorem for samples from a finite population". *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **4** (1959) 49—61.

[3] ERDŐS, P.—RÉNYI, A.: "On the evolution of random graphs." *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **5** (1960) 17—61.

[4] BERNSTEIN, S. N.: *Теория вероятностей*. Москва, 1946. p. 75—76.

[5] RÉNYI, A.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1962.

ТРИ НОВЫХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА И ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ I. WEISS-A

A. RÉNYI

Резюме

В n ящиков брошено наудачу N дробинок; пусть $\zeta_{n,N}$ означает число пустых ящиков. В работе даны три новых доказательства теоремы, доказанной I. Weiss-ом [1], что если $N = N(n)$ есть такая функция от n, что для $n \to +\infty$ имеем $\frac{N(n)}{n} \to \alpha$ $(0 < \alpha < +\infty)$, тогда имеет место

$$\text{(I)} \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\zeta_{n,N} - ne^{-\frac{N}{n}}}{\sqrt{ne^{-\frac{N}{n}}\left(1-\left(1+\frac{N}{n}\right)e^{-\frac{N}{n}}\right)}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du\,.$$

При этом обобщается результат Weiss-a, так как доказывается, что (1) имеет место также в случае $\frac{N(n)}{n} \to 0$ если $\frac{N^2(n)}{n} \to +\infty$ и в случае $\frac{N(n)}{n} \to +\infty$ если $\frac{N(n)}{n} - \log n \to -\infty$. Доказательства используют метод характеристических функций.

THRESHOLD FUNCTIONS FOR SUBGRAPHS OF GIVEN TYPE OF THE BICHROMATIC RANDOM GRAPH

by

ILONA PALÁSTI

Dedicated to Professor T. Gallai at his 50th birthday.

P. ERDŐS and A. RÉNYI in their paper [1] consider the evolution of the random graph $\Gamma_{n,N}$ having n labelled vertices (or point) and N edges which are chosen at random in such a way that each possible choice has the same probability. If A is some property which the random graph may or may not posses let $\mathbf{P}_{n,N}(A)$ denote the probability of the random graph possessing the property A. They treated the "typical" structures arising at a given stage of the evolution (i.e. if N is a given function of n). (A typical structure means a structure the probability $\mathbf{P}_{n,N}(A)$ of which tends to 1 for $n \to \infty$.) If A is a property such that

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_{n,N}(A) = 1\,, \tag{1}$$

then we say that "almost all" graphs have this property which can be formed from n given labelled points and N edges. If there exists a function $A(n)$ tending monotonically to $+\infty$ for $n \to +\infty$, such that

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}_{n,N(n)}(A) = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{N(n)}{A(n)} = 0 \\[2ex] 1, & \text{if} \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{N(n)}{A(n)} = +\infty, \end{cases} \tag{2}$$

then this function $A(n)$ is called a threshold function for the property A.

A graph is called a balanced graph, if it has no subgraph of a degree larger than its own. (If the graph G has n given points and N edges, then the number $\frac{2N}{n}$ is called the degree of the graph.) Two graphs are called isomorphic, if there exists a one-to-one mapping of the vertices carrying over these graphs into another.

A graph is bichromatic if it has m given labelled points $P_1, P_2, \ldots, P_m$ of the first colour and n given labelled points $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ of the second colour and N edges connecting points having different colours.

A bichromatic graph is called a bichromatic complete graph of order (k, l) if it has k vertices of the first colour, l vertices of the second one and kl edges. A connected bichromatic graph which has k points of the first colour and l points of the second one, and $k+l-1$ edges, is called a bichromatic (k, l)-tree. It can be seen easily that the complete graphs and trees are balanced graphs.

The aim of our paper is to determine the threshold function for a certain type of graphs, which are subgraphs of the bichromatic random graph.

Let the bichromatic graph $\Gamma_{m,n,N}$ consist of m given labelled vertices $P_1, P_2, \ldots, P_m$ of one colour, n given labelled points $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ of the other colour and N edges connecting vertices of different colours only, chosen at random in such a way that all admissible choices have the same probability.

Increasing the number of the edges N so that it remains very small compared with m and n, for example if $N = o\left(\sqrt{\dfrac{mn}{m+n}}\right)$ it is very probable that $\Gamma_{m,n,N}$ consists of isolated points and isolated edges. Especially if $m \sim cn$, then in the case of $N = o(\sqrt{n})$ it will be very probable, that the random graph consisting of isolated points and isolated edges only. Namely the probability that at least two edges of $\Gamma_{m,n,N}$ have a common point equals to 1 minus the probability that there are no edges having a common point. As the probability of the choice of any admissible set of N edges is the same, namely $1 \Big/ \dbinom{mn}{N}$, thus the probability that the edges have no common point is

$$\frac{N!\dbinom{m}{N}\dbinom{n}{N}}{\dbinom{mn}{N}}. \tag{3}$$

Accordingly the probability that at least two edges of $\Gamma_{m,n,N}$ will have a point in common is

$$1-\frac{N!\dbinom{m}{N}\dbinom{n}{N}}{\dbinom{mn}{N}}. \tag{4}$$

Using the relation

$$\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}e^{-\frac{k^2}{2n}} \tag{5}$$

valid for $k = o(n^{2/3})$, we obtain that for $N = o\left(\sqrt{\dfrac{mn}{m+n}}\right)$

$$1-\frac{N!\dbinom{m}{N}\dbinom{n}{N}}{\dbinom{mn}{N}} = O\left[N^2\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{mn}\right)\right] = o(1). \tag{6}$$

If however in the case $m \sim cn$, $N \sim c_1\sqrt{n}$, where $c_1 > 0$, is a constant not depending on n then the appearance of trees consisting of three points, that is (1,2)- or (2,1)-trees has a probability with a positive limit for $n \to \infty$, but the appearance of a connected subgraph consisting of more than 3 vertices remains still very improbable. If N increases while n is fixed, the situation will change only if N reaches the order of magnitude of $n^{2/3}$. Then the (1,3)-, (2,2)- and (3,1)-trees having four points appear. Generally (in the case $m \sim cn$) the threshold function for the appearance of the trees of order (k, l) is $n^{\frac{k+l-2}{k+l-1}}$. This result is contained in the following

Theorem. *Let $k \geq 1, l \geq 1$, and v be positive integers ($k + l - 1 \leq v \leq kl$). Let $\mathscr{B}_{k,l,v}$ denote any non empty class of connected balanced bichromatic random graphs which contain k points of the first colour, l points of the second one and v edges (connecting points having different colours). The threshold function concerning the property of the bichromatic random graph, that it contains a subgraph isomorphic with some element of $\mathscr{B}_{k,l,v}$ is equal to $n^{2-\frac{k+l}{v}}$, supposing that $m \sim cn$, where $c > 0$ and does not depend on n.*

Proof. The proof of the theorem is similar to that of the analogous theorem of ERDŐS and RÉNYI concerning the threshold for subgraphs of given type of one coloured random graphs. Let $B_{k,l,v}$ denote the number of all graphs which can be formed from k labelled points of the first colour and l labelled points of the second colour and belonging to the class $\mathscr{B}_{k,l,v}$. If $\mathbf{P}_{m,n,N}(\mathscr{B}_{k,l,v})$ denotes the probability that $\Gamma_{m,n,N}$ has at least one such subgraph which is isomorphic to some element of $\mathscr{B}_{k,l,v}$ then obviously

$$(7) \qquad \mathbf{P}_{m,n,N}(\mathscr{B}_{k,l,v}) \leq \binom{m}{k}\binom{n}{l} B_{k,l,v} \frac{\binom{mn-v}{N-v}}{\binom{mn}{N}}.$$

As a matter of fact at first we choose k points of one colour (this can be done in $\binom{m}{k}$ ways) and l points of the other colour (which can be done in $\binom{n}{l}$ different ways); from these we form all graphs which are isomorphic to some element of the class $\mathscr{B}_{k,l,v}$ (this may be done in $B_{k,l,v}$ different ways); then the number of graphs $G_{m,n,N}$ which contain the selected graph as a subgraph is equal to the number of ways in which the remaining $N - v$ edges can be chosen from the $mn - v$ possible other edges. (In this way are repeatedly taking into consideration those graphs which have more than one subgraph isomorphic with some element of the class $\mathscr{B}_{k,l,v}$.)

From (7) we obtain

$$(8) \qquad \mathbf{P}_{m,n,N}(\mathscr{B}_{k,l,v}) = O\left(\frac{N^v}{m^{v-k}\, n^{v-l}}\right).$$

From (8) and the supposition $m \sim cn$, if $N = o\left(n^{2-\frac{k+l}{v}}\right)$ it is clear that

$$(9) \qquad \mathbf{P}_{m,n,N}(B_{k,l,v}) = o(1)$$

and thus we proved the first assertion of the theorem.

In proving the second part of the theorem let us denote by $\mathscr{B}_{k,l,v}^{(m,n)}$ the set of all subgraphs of the bichromatic complete graph which contains m points of the first colour and n points of the second colour, which are isomorphic to some element of $\mathscr{B}_{k,l,v}$. If $S \in \mathscr{B}_{k,l,v}^{(m,n)}$, let the random variable $\varepsilon(S)$ be equal to 1 if S is a subgraph of $\Gamma_{m,n,N}$ and $\varepsilon(S) = 0$ otherwise. Then the mean value of the number of subgraphs of $\Gamma_{m,n,N}$ which are isomorphic to an element of $\mathscr{B}_{k,l,v}$, is

$$\mathbf{M}\Big(\sum_{S\in\mathscr{B}_{k,l,v}^{(m,n)}} \varepsilon(S)\Big) = \sum_{S\in\mathscr{B}_{k,l,v}^{(m,n)}} \mathbf{M}(\varepsilon(S)) =$$

$$= \binom{m}{k}\binom{n}{l} B_{k,l,v} \frac{\binom{mn-v}{N-v}}{\binom{mn}{N}} \sim \frac{B_{k,l,v}}{k!\,l!} \frac{N^v}{m^{v-k}\,n^{v-l}}. \tag{10}$$

If S_1 and S_2 are two elements of $\mathscr{B}_{k,l,v}^{(m,n)}$ which have no common edge then the mean value of the product $\varepsilon(S_1)\,\varepsilon(S_2)$ is

$$\mathbf{M}(\varepsilon(S_1)\,\varepsilon(S_2)) = \frac{\binom{mn-2v}{N-2v}}{\binom{mn}{N}}. \tag{11}$$

If however S_1 and S_2 have r common edges $(1 \leqq r \leqq v-1)$, then

$$\mathbf{M}(\varepsilon(S_1)\,\varepsilon(S_2)) = \frac{\binom{mn-2v+r}{N-2v+r}}{\binom{mn}{N}} = O\left(\frac{N^{2v-r}}{(mn)^{2v-r}}\right). \tag{12}$$

On the other hand if i and j denote the number of common points of S_1 and S_2 of the first and second colour respectively, and $i+j=s$, then — as the intersection of S_1 and S_2 is a subgraph of S_1 (and S_2) and as by our supposition each S is balanced — we obtain $\frac{r}{s} \leqq \frac{v}{k+l}$ that is $s \geqq \frac{r(k+l)}{v}$; thus the number of such pairs of subgraphs S_1 and S_2 does not exceed the sum

$$B_{k,l,v}^2 \sum_{i+j\geqq\frac{r(k+l)}{v}} \binom{m}{k}\binom{k}{i}\binom{m-k}{k-i}\binom{n}{l}\binom{l}{j}\binom{n-l}{l-j}. \tag{13}$$

By making use of the supposition $m \sim cn$ we obtain

$$B_{k,l,v}^2 \sum_{i+j\geqq\frac{r(k+l)}{v}} \binom{m}{k}\binom{k}{i}\binom{m-k}{k-i}\binom{n}{l}\binom{l}{j}\binom{n-l}{l-j} = O\left(n^{2(k+l)-\frac{r(k+l)}{v}}\right). \tag{14}$$

Consequently we obtain

$$\mathbf{M}\Big(\Big(\sum_{S\in\mathcal{B}_{k,l,v}^{(m,n)}} \varepsilon(S)\Big)^2\Big) = \sum_{S\in\mathcal{B}_{k,l,v}^{(m,n)}} \mathbf{M}(\varepsilon(S)) +$$

$$+ \frac{B_{k,l,v}^2\, m!\, n!}{k!^2\, l!^2 (m-2k)!\, (n-2l)!} \frac{\binom{mn-2v}{N-2v}}{\binom{mn}{N}} + O\left[\left(n^{\frac{N^v}{2v-(k+l)}}\right)^2 \frac{1}{n}\right] + \tag{15}$$

$$+ O\left[\left(n^{\frac{N^v}{2v-(k+l)}}\right)^2 \sum_{r=1}^{v} \left(\frac{n^{2-\frac{k+l}{v}}}{N}\right)^r\right].$$

The meaning of the sum of the second and the third term of (15) is the following: the mean value of the number of such pairs of subgraphs which have no common edges but have $i+j$ common points does not exceed the following

$$B_{k,l,v}^2 \frac{\binom{mn-2v}{N-2v}}{\binom{mn}{N}} \sum_{i+j=0}^{k+l-1} \binom{m}{k}\binom{k}{i}\binom{m-k}{k-i}\binom{n}{l}\binom{l}{j}\binom{n-l}{l-j}. \tag{16}$$

Let us divide the sum (16) into two parts

$$\begin{aligned} &B_{k,l,v}^2 \binom{m}{k}\binom{m-k}{k}\binom{n}{l}\binom{n-l}{l} \frac{\binom{mn-2v}{N-2v}}{\binom{m\,n}{N}} + \\ &+ B_{k,l,v}^2 \frac{\binom{mn-2v}{N-2v}}{\binom{mn}{N}} \sum_{i+j=1}^{k+l-1} \binom{m}{k}\binom{k}{i}\binom{m-k}{k-i}\binom{n}{l}\binom{l}{j}\binom{n-l}{l-j}. \end{aligned} \tag{17}$$

Wherefrom we obtain

$$\frac{B_{k,l,v}^2\, m!\, n!}{k!^2\, l!^2 (m-2k)!\, (n-2l)!} \frac{\binom{mn-2v}{N-2v}}{\binom{mn}{N}} + O\left[\left(\frac{N^v}{n^{2v-(k+l)}}\right)^2 \sum_{i+j=1}^{k+l-1} \frac{1}{n^{i+j}}\right]. \tag{18}$$

For the second term of (15) it is easy to see that

$$\frac{m!\, n!}{k!^2\, l!^2 (m-2k)!\, (n-2l)!} \frac{\binom{mn-2v}{N-2v}}{\binom{mn}{N}} \leq \binom{m}{k}^2 \binom{n}{l}^2 \frac{\binom{mn-v}{N-v}^2}{\binom{mn}{N}^2}. \tag{19}$$

And if we suppose that

$$(20) \qquad \frac{N}{n^{2-\frac{k+l}{v}}} = \omega \to +\infty, \quad n \to \infty .$$

it follows using the relation $\mathbf{D}^2(\xi) = \mathbf{M}(\xi^2) - \mathbf{M}^2(\xi)$ where $\mathbf{D}^2(\xi)$ denotes the variance of ξ that

$$(21) \qquad \mathbf{D}^2\Big(\sum_{S\in\mathcal{B}_{k,l,v}^{(m,n)}} \varepsilon(S)\Big) = O\left(\frac{\Big(\sum\limits_{S\in\mathcal{B}_{k,l,v}^{(m,n)}} \mathbf{M}(\varepsilon(S))\Big)^2}{\min(\omega, n)}\right).$$

On the other hand from the inequality of Chebyshev we obtain

$$(22) \qquad \mathbf{P}_{m,n,N}\left(\Big|\sum_{S\in\mathcal{B}_{k,l,v}^{(m,n)}} \varepsilon(S) - \sum_{S\in\mathcal{B}_{k,l,v}^{(m,n)}} \mathbf{M}(\varepsilon(S))\Big| > \frac{1}{2}\sum_{S\in\mathcal{B}_{k,l,v}^{(m,n)}} \mathbf{M}(\varepsilon(S))\right) = O\left(\frac{1}{\min(\omega, n)}\right)$$

and thus

$$(23) \qquad \mathbf{P}_{m,n,N}\left(\sum_{S\in\mathcal{B}_{k,l,v}^{(m,n)}} \varepsilon(S) \leqq \frac{1}{2}\sum_{S\in\mathcal{B}_{k,l,v}^{(m,n)}} \mathbf{M}(\varepsilon(S))\right) = O\left(\frac{1}{\min(\omega, n)}\right).$$

It is clear from (10) that if $\omega \to \infty$, then

$$(24) \qquad \sum_{S\in\mathcal{B}_{k,l,v}^{(m,n)}} \mathbf{M}(\varepsilon(S)) \to +\infty .$$

Thus it follows not only that the probability of the graph $\Gamma_{m,n,N}$ containing at least one subgraph isomorphic to some element of $\mathcal{B}_{k,l,v}$ tends to 1, but also that the number of subgraphs of $\Gamma_{m,n,N}$ which are isomorphic with some element of $\mathcal{B}_{k,l,v}$ tends to $+\infty$ in probability.

Thus the theorem is proved.

If we put $v = k + l - 1$ into the threshold function given by the theorem we obtain

Corollary 1. *The threshold function for the property that the bichromatic random graph contains a (k, l)-tree is $n^{\frac{k+l-2}{k+l-1}}$ supposing that $m \sim cn$.*

This agrees with our result in [2].

And if we write kl instead of v we obtain

Corollary 2. *The threshold function for the property that the bichromatic random graph contains a bichromatic complete subgraph of order (k, l) is $n^{2-\frac{k+l}{kl}}$.*

It is evident that the latter threshold function is equal to the threshold for the property that a random graph (which is not coloured) contains a saturated even subgraph (i.e. a subgraph consisting of $k + l$ points $P_1, P_2, \ldots, P_k$ and $Q_1, Q_2, \ldots, Q_l$ and containing all edges $P_i Q_j$) given by P. Erdős and A. Rényi in [1].

I am indebted to Professor Rényi for his valuable remarks.

(Received April 16, 1962.)

REFERENCES

[1] Erdős, P.—Rényi, A.: "On the evolution of random graphs". *A Magyar Tud. Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **5.** (1960) A. 17—61.

[2] Palásti, I.: "On the distribution of the number of trees which are isolated subgraphs of a chromatic random graph". *A Magyar Tud. Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **6** (1961) A. 405—409.

ГРАНИЧНЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ ПОДГРАФОВ ДВУХЦВЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ГРАФОВ ДАННОГО ТИПА

I. PALÁSTI

Резюме

Пусть $\Gamma_{m,n,N}$ есть случайный граф четного обхода, который состоит из m данных пронумерованных вершин $P_1, P_2, \ldots, P_m$, окрашенных в один цвет, n данных пронумерованных точек $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ окрашенных в другой цвет, и N наугадвыбранных ребер. Предположим, что точки одного цвета нельзя соединить ребром и что все возможные выборы графов одинакого вероятны. В связи с увеличением числа ребер $N(m, n)$ имеет место следующее: Если $k \geqq s$, $l \geqq 1$, v положительные целые числа $(k + l - 1 \leqq v \leqq kl)$ и $\mathscr{B}_{k,l,v}$ обозначает любой не пустой класс таких связных, уравновешенных, случайных графов с четным обходом, которые содержат k точек одного цвета и l точек другого цвета, соединенных v ребрами, то граничная функция относительно того свойства случайного двухцветного графа, что он содержит хотя бы один подграф, изоморфный некоторому элементу $\mathscr{B}_{k,l,v}$, равна $n^{2-\frac{k+l}{v}}$, при условии, что $m \sim cn$ (где $c > 0$ и не зависит от n).

ADDENDUM TO THE PAPER "ON GALTON'S RANK ORDER TEST"

KÁROLY SARKADI

On page 129. of the above article (Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. 6/1961/127—131) to the definition of N'_k (lines 19—20) the following remark should be added:

In case of Theorem 2 this definition is equivalent to the former one, since the positivity of the i-th terms in both sequences depends on the fact, whether the i-th $+1$ in the sequence $\{X_i\}$ precedes the $\left[\frac{p+i-1}{p}\right]$ -th $-p$ or not.

(Received December 28, 1961.)

A THEOREM CONCERNING HAMILTON LINES

by

L. PÓSA

In this note we only consider graphs without loops and multiple edges. G. A. DIRAC proved the following theorem [1].

Let $G^{(n)}$ $(n \geqq 3)$ be a graph of n vertices. Assume that the valency of every vertex is $\geqq n/2$. Then $G^{(n)}$ is Hamiltonian.

The valency $v(x)$ of a vertex x is the number of edges incident to it. A graph is said to be Hamiltonian if it contains a Hamilton line (i. e. a circuit which contains every vertex of the graph).

Several sharpenings of this theorem are known ([2], [4], [5]). We now prove the following theorem which contains [2].

Theorem. *Let $n \geqq 3$. Assume that for every k, $1 \leqq k < (n-1)/2$, the number of vertices of $G^{(n)}$ of valency not exceeding k is less than k and for odd n the number of vertices of valency $(n-1)/2$ does not exceed $(n-1)/2$, then $G^{(n)}$ is Hamiltonian.*

Proof. (I). Assume that $G^{(n)}$ satisfies the conditions of the Theorem and is not Hamiltonian. By connecting (by an edge) vertices of $G^{(n)}$ which were not connected in $G^{(n)}$ (by an edge) we obtain a graph $G_*^{(n)}$ which is not Hamiltonian but which becomes Hamiltonian if we connect any two vertices of $G_*^{(n)}$ which are not connected by an edge. Since every complete graph of $n \geqq 3$ vertices is Hamiltonian, our graph $G_*^{(n)}$ exists. (A graph is said to be complete if every two of its vertices are connected by an edge.) Clearly $G_*^{(n)}$ has the same vertices as $G^{(n)}$ and $G_*^{(n)}$ also satisfies the conditions of our Theorem. Further if two vertices of $G_*^{(n)}$ are not connected by an edge they are connected by an open Hamilton line (i. e. by a path which contains every vertex of our graph, once and only once).

(II). First we show that in $G_*^{(n)}$ every vertex of valency $\geqq (n-1)/2$ is connected to every vertex of valency $\geqq n/2$. To show this let a_1 and a_n be two vertices with $v(a_1) \geqq (n-1)/2$, $v(a_n) \geqq n/2$, which are not connected by an edge. Then by (I) there is an open Hamilton line $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (i. e. the edges of the open Hamilton line are the edges connecting a_i with a_{i+1}, $1 \leqq i \leqq$ $\leqq n-1$). Let $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ $k = v(a_1)$, $2 = i_1 < \ldots < i_k \leqq n-1$ be the vertices connected with a_1 in $G_*^{(n)}$ by an edge. a_n can not be connected to a_{i_j-1}, $1 \leqq j \leqq k$ by an edge for otherwise $(a_1, \ldots, a_{i_j-1}, a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{i_j}, a_1)$ would be a Hamilton line of $G_*^{(n)}$. Thus

$$\frac{n}{2} \leqq v(a_n) \leqq n-1-k < \frac{n}{2}.$$

This contradiction establishes our assertion.

(III). From (II) it clearly follows that $G_*^{(n)}$ has vertices of valency $< n/2$ (since the complete graph of $n \geqq 3$ vertices is Hamiltonian). Let m be the maximal valency of these vertices and b_1 a vertex with $v(b_1) = m$. By our assumptions there are at most $m < n/2$ vertices of valency $\leqq m$, thus there are more than m vertices of valency $> m$, (by the maximality of m the valency of these vertices is $\geqq n/2$). Thus there exists a vertex b_n of valency $\geqq n/2$ which is not connected to b_1 by an edge. Hence by (II) $m < (n-1)/2$ and therefore we can assume that the number of vertices of valency $\leqq m$ is less than m.

Let now $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ be an open Hamilton line connecting b_1 and b_n and let $b_{i_1}, \ldots, b_{i_m}$ $(i_1 = 2 < i_2 < \ldots < i_m \leqq n-1)$ be the vertices connected to b_1 by an edge. As in (II) it follows that b_n can not be connected to b_{i_j-1}, $1 \leqq j \leqq m$ by an edge. By our assumption at least one of these vertices must have valency $> m$ and hence valency $\geqq n/2$. But this contradicts (II) and our Theorem is proved.

Remarks (1). Our Theorem is sharp. Let $1 \leqq k < (n-1)/2$ and G_1 be a complete graph of $k+1$ vertices and G_2 a complete graph of $n-k$ vertices. We assume that G_1 and G_2 have exactly one common vertex. Let G be the union of G_1 and G_2. Clearly G is not Hamiltonian (it has a cut point) and G has exactly k vertices of valency k. Now let n odd and $k = (n-1)/2$. We define the graph G as follows: The vertices of G are $x_1, \ldots, x_{2k+1}$ and its edges are (x_i, x_j), $1 \leqq i \leqq k < j \leqq 2k+1$. G is not Hamiltonian and G has exactly $(n+1)/2$ verties of valency $(n-1)/2$.

(2). (I) and (II) gives a very simple proof of DIRAC's theorem [1].

(Received August 2, 1962.)

REFERENCES

[1] DIRAC, G. A.: „Some theorems on abstract graphs." *Proc. London math. Soc.* (3), **2**(1952)69—81.

[2] ERDŐS, P.—GALLAI, T.: „On maximal paths and circuits of graphs." *Acta Math. Sci. Hung.* **10**(1959)337—356.

[3] NEWMAN, D. J.: „A problem in graph theory." *Amer. Math. Monthly* **65**(1958)611.

[4] ORE, O.: „Note on Hamilton circuits." *Amer. Math. Monthly* **67**(1960)55.

[5] ORE, O.: „Theory of graphs." *Amer. Math. Soc. Colloquium Publ.* **38**(1962)

ТЕОРЕМА, ОТНОСЯЩАЯСЯ К ГАМИЛЬТОНОВЫМ ЛИНИЯМ

L. PÓSA

Резюме

Для графов, не содержащих петель и кратных ребер, имеет силу следующая

Теорема. *Пусть число точек графа G не менее трех. Если для любого k, где $1 \leqq k < (n-1)/2$, число тех точек G, степень которых $\leqq k$ меньше k и, в случае нечетного n, число тех точек, степень которых $\leqq (n-1)/2$, не долее $(n-1)/2$, тогда G обладает Гамильтоновой линией, то есть такой окружностью, которая содержит все точки G. Теорема точна.*

REMARKS ON A PAPER OF PÓSA

by

P. ERDŐS

This note will use the terminology of PÓSA's paper. $G_l^{(n)}$ will denote a graph of n vertices and l edges and $G_l^{(n)}(k)$ denotes a graph of having n vertices l edges and every vertex of which has valency $\geqq k$. ORE [2] proved that if $l \geqq \binom{n-1}{2} + 2$ then every $G_l^{(n)}$ is Hamiltonian, and he showed that the result is false for $l = \binom{n-1}{2} + 1$. Now I prove the following more general

Theorem. *Let* $1 \leqq k < n/2$. *Put*

$$l_k = 1 + \max_{k \leqq t < \frac{n}{2}} \left[\binom{n-t}{2} + t^2 \right] =$$

$$= 1 + \max \left[\binom{n-k}{2} + k^2, \binom{n - \left[\frac{n-1}{2}\right]}{2} + \left[\frac{n-1}{2}\right]^2 \right]. \tag{1}$$

Then every $G_{l_k}^{(n)}(k)$ *is Hamiltonian. There further exists a* $G_{l_k-1}^{(n)}(k)$ *which is not Hamiltonian.*

First of all observe that by the theorem of DIRAC (see the preceding paper of PÓSA) if every vertex of G has valency $\geqq n/2$ then G is Hamiltonian, thus the condition $1 \leqq k < n/2$ can be assumed without loss of generality.

Next a simple computation shows that $\binom{n-t}{2} + t^2$ decreases for $1 \leqq t \leqq (n-2)/3$ and increases for $(n-2)/3 < t < n/2$, which proves the second equality of (1).

Now we are ready to prove our Theorem. If our $G^{(n)}(k)$ is not Hamiltonian then by the Theorem of PÓSA there exists a t, $k \leqq t < n/2$ so that $G^{(n)}(k)$ has at least t vertices $x_1, \ldots, x_t$ of valency not exceeding t. The number of edges of $G^{(n)}(k)$ which are not incident to any of the vertices $x_1, \ldots, x_t$ is clearly at most $\binom{n-t}{2}$ (i. e. if the vertices of $G^{(n)}(k)$ are $x_1, \ldots, x_n$ we obtain $\binom{n-t}{2}$ edges if every two of the vertices x_{j_1} and x_{j_2}, $t < j_1 < j_2 \leqq n$ are connected by an edge). The number of edges incident to one of the vertices $x_1, \ldots, x_t$ is at most t^2 (since each of them has valency $\leq t$). Thus our $G^{(n)}(k)$ has at most $\binom{n-t}{2} + t^2$ edges for some $k \leq t < n/2$ i. e. it can have at most $l_k - 1$ edges which proves (1).

To complete our proof we show that (1) is best possible. Let the vertices of $G^{(n)}_{l_t-1}(t)$ be $x_1, \ldots, x_n$. Its edges are:

$$(x_{j_1}, x_{j_2}) \,, \quad t < j_1 < j_2 \leqq n \quad \text{and} \quad (x_i, x_j) \,, \quad 1 \leqq i \leqq t < j \leqq 2t < n \,.$$

A simple argument shows that our $G^{(n)}_{l_t-1}(t)$ is not Hamiltonian (it clearly has $l_t - 1$ edges). It is easy to see that every $G^{(n)}_{l_t-1}(t)$ which is not Hamiltonian has this structure. (If $t = (n-1)/2$ (n odd) by Pósa's theorem we can assume that there are $t + 1 = (n+1)/2$ vertices of valency $\leqq t$ but by $\binom{t+1}{2} + t^2 = \binom{t}{2} + t(t+1)$ we do not obtain a better result by utilising this $(t+1)$-st vertex).

It is easy to see that the argument of Pósa's paper gives the following.

Theorem. *Let $G^{(n)}$ be a graph and assume that for every $1 \leq k < (n-1)/2$ $G^{(n)}$ has at most k vertices of valency $\leq k$. Then $G^{(n)}$ has an open Hamilton line. The theorem is best possible.*

The proof can be left to the reader of Pósa's paper. Using this result we obtain by the same argument as used in this paper that every $G^{(n)}_{\mu_k}(k)$ with

$$\mu_k = 1 + \max_{k \leqq t < \frac{n-1}{2}} \left[\binom{n-t-1}{2} + t(t+1) \right]$$

has an open Hamilton line. The theorem is best possible. Finally we mention that by the method of this paper we can prove the following sharpening of Lemma (3.2) of [1]. Let $G^{(n)}$ be a graph with the vertices $x_1, \ldots, x_n$ and $2 \leq k < n/2$. Assume that $v(x_1) \geq k$ and that there is a circuit containing the vertices $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Then if $G^{(n)}$ has $\geq l_k$ edges it is Hamiltonian. The result is best possible. We leave the simple proof to the reader.

(Received August 2, 1962)

REFERENCES

[1] Erdős, P.—Gallai, T.: On maximal paths and circuits of graphs." *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **10**(1959)337—356.

[2] Ore, O.: „Arc coverings of graphs." *Annali di Mathematica Pura ed Applicata.* IV. 55(1961)315—321.

[3] Pósa, L.: „A theorem concerning Hamilton lines." *Publications of the Math. Inst.* **7**(1962) A. 225—226

ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ОДНОЙ СТАТЬЕ PÓSA

P. ERDŐS

Для тех графов, которые не содержат петель и кратных ребер, исходя из одной теоремы PÓSA [3] автор доказывает следующее

Теорема. *Пусть* $1 \leqq k < \frac{n}{2}$ *и*

$$l_k = 1 + \max_{k \leqq t < \frac{n}{2}} \left[\binom{n-t}{2} + t^2\right] =$$

$$= 1 + \max\left[\binom{n-k}{2} + k^2, \binom{n - \left[\frac{n-1}{2}\right]}{2} + \left[\frac{n-1}{2}\right]^2\right].$$

Тогда в каждом графе G, который имеет n точек и в котором степень каждой точки $\geqq k$ и число ребер равно l_k, существует Гамильтонова линия, то есть окружность, содержающая все точки G. Теорема точна.

BIBLIOGRAPHY[1] LIST OF RECENT PAPERS AND BOOKS WRITTEN BY MEMBERS OF THE INSTITUTE, PUBLISHED OR IN PRINT ELSEWHERE IN FOREIGN LANGUAGES

БИБЛИОГРАФИЯ[1] СПИСОК НОВЫХ РАБОТ ЧЛЕНОВ ИНСТИТУТА, ОПУБЛИКОВАННЫХ В ДРУГИХ МЕСТАХ В ИНОСТРАННЫХ ЯЗЫКАХ

[1] ÁDÁM, A.: "Über die monotone Superposition der Wahrheitsfunktionen". *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **23** (1962).

[2] ADLER, GY.: "Principi di massimo relativi alle equazioni di tipo ellittico e parabolico nel caso di condizioni al contorno e condizioni iniziali rispettivamente non-continue e non-limitate". *Rendiconti dell Accademia Nazionale dei Lincei*, Ser. VII, **30** (1961) 178–191.

[3] ADLER, GY.: "Principes du maximum relatifs aux équations du type elliptique et parabolique dans le cas des conditions aux limites et des conditions initiales respectivement non-continues et non-limitées". *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae.**

[4] ADLER, GY.: "Maggiorazione del gradiente delle funzioni del colore". *Rendiconti dell Accademia Nazionale dei Lincei*, Serie VIII, **30** (1961) 357–361.

[5] ADLER, GY.: Maggiorazione delle funzioni armonidie con condizioni al contorno di tipo misto. *Atti della Accademia delle Scienze di Torino* **95** (1961) 1–10.

[6] ADLER, GY.: Maggiorazione del gradiente delle soluzioni delle $\Delta u = f$ e $\Delta u - au_t' = g$". *Rendiconti dell Accademia Nazionale dei Lincei*, Serie VIII, **30** (1961) 673–676.

[7] ADLER, GY.: Maggiorazione del gradiente delle funzioni armoniche mediante i loro valori al contorno. *Memorie Accademia Nazionale dei Lincei*, Serie VIII, **6** (1961) 185–201.

[8] ALEXITS, GY.: *Convergence Problems of Orthogonal Series.* Pergamon Press, London–Oxford–New York–Paris, 1961.

[9] ALEXITS, GY.–TANDORI, K.: "Über das Konvergenzverhalten einer Klasse von Orthogonalreihen". *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio Mathematica* **3–4** (1960/61) 15–18.

[10] BALÁZS, J.–TURÁN, P.: "Notes on interpolation VIII. (Mean convergence in infinite intervals)". *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **12** (1961) 469–474.

[11] BÁNKÖVI, GY.–HORVÁTH, J.–JAKOB, K.–SARKADI, K.: "Über Entwurf und Auswertung von Dieselölentschwefelungsversuchen mit mathematisch-statistischen Methoden." *Acta Chimica.**

[12] BOD, P.: "Quelques informations sur les recherches opérationnelles dans la République Populaire Hongroise". *Proceedings of the Second International Conference on Operational Research.* 752 és 769–770.

[13] CSÁKI, P.–FISCHER, J.: "Evaluation of reaction curves by extreme values". *Acta Medica.* *

[14] CSÁKI, P.–FISCHER, J.: "Analysis of reaction curves by extreme values"." *Acta Medica Academiae Scientiarum Hungaricae.**

[15] CSÁSZÁR, Á.: *Foundations of General Topology.* Akadémiai Kiadó–Pergamon Press.*

[1] Papers or books with incomplete bibliographical data, marked by an asterisk, are in print.

[1] Работы с неполными библиографическими данными, отмеченные звездочкой, находятся в печати.

[16] Császár, Á.: *Grundlagen der allgemeinen Topologie*. Akadémiai Kiadó—Akademie Verlag.*

[17] Császár, Á.: "Complétion et compactification d'éspaces syntopogènes". Proceedings of the International Symposium on General Topology.*

[18] Csiszár, I.: "On the dimension and entropy of order α of the mixture of probability distributions". *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*.*

[19] Csiszár, I.: "Some remarks on the dimension and entropy of random variables". *Acta Mathematica Scientiarum Hungaricae* **12** (1961) 399—408.

[20] Fenyő, I.: "Sur le logarithme d'un opérateur de Mikusiński". Revue de Mathématique, Bukarest, 1961.*

[21] Fischer, J.—Juvancz, I.—Zoltán, Ö. T.—Földi, M.: "Studies on the absorption of ^{131}I-albumin and ^{131}KI from the subcutaneous tissues of dog". *Acta Physiologica Academiae Scentiarum Hungaricae* (1962) 361—372.

Fischer, J.: see [13]—[14].

[22] Freud, G.: "Über trigonometrische Approximation und Fouriersche Reihen". *Mathematische Zeitschrift* **78** (1962) 252—262.

[23] Freud, G.: "Über die Konvergenz im Mittel von Lagrangeschen Interpolationspolynomfolgen". *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*.*

[24] Grätzer, Gy.—Schmidt, E. T.: "On congruence lattices of lattices". *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*.*

[25] Grätzer, Gy.—Schmidt, E. T.: "On congruence lattices of abstract algebras". *Transactions of the American Mathematical Society*.*

[26] Heppes, A.—Fejes Tóth, L.: "Über stabile Körpersysteme." *Compositio Mathematica*.*

Juvancz, I.: see [21].

[27] Kalmár, L.: "A practical infinitistic computer". Publications of the Symposium "Infinitistic Methods in the Foundations of Mathematics" (Warszawa, 1959), 347—362.

[28] Kalmár, L.: "A contribution to the translation of arithmetic operators (assignment statements) into the Machine Language of the M—3".*

[29] Kalmár, L.: "On the problem of foundation of our knowledge".*

[30] Kovács, I.: „Théorèmes ergodiques non commutatifs". *Comptes Rendus de l'Académie des Sceinces* **253** (1961) 770—771.

[31] Lee, A.: "Über einige Extremal-Aufgaben bezüglich Endlicher Körper". *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*.*

[32] Pollák, Gy.—Peák, I.: "Bemerkungen über Halbgruppen mit Minimalbedingung". *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio Mathematica* **3—4** (1960/61) 223—225.

[33] Rédei, L.: *Theorie der endlich erzeugbaren kommutativen Halbgruppen*. Budapest—Hamburg.*

[34] Rédei, L.: "Halbgruppen und Ringe mit Linkseinheiten ohne Linkseinselelemente". *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hunagricae* **11** (1960) 217—222.

[35] Rényi, A.: "On random generating elements of a finite Boolean algebra". *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **22** (1961) 75—81.

[36] Rényi, A.: „Statistical laws of accumulation of information". Communications of the 33rd Session of the ISI, Paris, 1961; 1—7.

[37] Rényi, A.: "Note on the book "Introduction to probability and statistics" by H. A. Alder and E. B. Roessler". Communications of ISI, 1961.

[38] Rényi, A.—Erdős, P.: "On a problem of A. Zygmund".*

[39] Rényi, A.: "On random subsets of a finite set". *Mathematica, Cluj*.*

[40] Rózsa, P.—Tassi, G.: „Eine Matrizenmethode zur Lösung statisch unbestimmter Systeme im elasto-plastischen Bereich". *Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität Dresden* **10** (1961) 1329—1332.

[41] Rózsa, P.—Lietzman, O.: "Allgemeine Behandlung primitiver idealer und nichtidealer Kristallgitter mit Anwendung der Theorie der Hypermatrizen". *Physica Status Solidi* **2** (1962) 28—41.

Sarkadi, K.: see [11].

Schmidt, T.: see [24]—[25].

[42] Surányi, J.—Hajós, Gy.—Neukomm, Gy.: *Hungarian problembook*. School Mathematics Study Group, New York.*

[43] Surányi, J.: "Über einen Satz von G. Szekeres in der Geometrie der Zahlen". *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio Mathematica* **3—4** (1960/61) 319—326.

[44] SURÁNYI, J.—ERDŐS, P.: *Selected topics in number theory*. Blaissdel land Co., New York.*

[45] SZABÓ, Á.: "Der älteste Versuch einer definitorisch-axiomatischen Grundlegung der Mathematik". Osiris, Commentationes de Scientiarum et Eruditionis Historia Rationeque, a G. Sarton conditae nunc vero editae ab A. Rome et J. Mogenet Brugis, Vol. XIV. 53—114.

[46] SZABÓ, Á.: "Analogia". Acta Antiqua.*

[47] SZABÓ, Á.: Aristoteles, Topik 3 p. 158 b. 29—36.

[48] SZÁSZ, F.: "Verbandstheoretische Bemerkungen zum Fuchsschen Zeroidradikal der nichtassoziativen Ringe". *Archiv der Mathematik.**

[49] SZÁSZ, F.: "Observations on the Brown-McCoy radical cf rings". *Proceedings of the Japanese Academy of Sciences.**

[50] SZÁSZ, F.: "Bemerkungen zu den assoziativen Hauptidealringen". *Indagationes Mathematicae.**

[51] SZÁSZ, F.: „Bemerkungen zu meiner Arbeit «Über Gruppen, deren sämtliche nichttriviale Potenzen zyklische Untergruppen sind»". *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged).*

[52] SZŐKEFALVI—NAGY, B.: "Bemerkungen zur vorstehenden Arbeit des Herrn Brehmer". *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **22** (1961) 112—115.

[53] SZŐKEFALVI-NAGY, B.—FOIAŞ, C.: "Sur les contractions de l'éspace de Hilbert. V." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged).**

[54] SZŐKEFALVI-NAGY, B.: "Przemówienie wygloszone na uroczystosci ku uczczeniu pamieci Stefana Banacha". *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria **II** : Wiadomosci Matematyczne* **4** (1961).*

[55] SZÜSZ, P.: "Über die metrische Theorie der diophantischen Approximation, II." *Acta Arithmetica.**

[56] SZÜSZ, P.: "Bemerkung zur vorangehenden Arbeit von Herrn Tomic". *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio Mathematica* **3—4** (1960/61) 347—350.

[57] TÓTH, K.—ALMÁR, I.—BALÁZS, B.: "Приближенный метод рассчета орбит космический ракет.» *Бюллетень Института, «теоретической астрономии.**

[58] TURÁN, P.: „On Lindelöff's conjecture concerning Riemann-zeta-function." *Illinois Journal of Mathematics.**

[59] TURÁN, P.—SZEGŐ, G.: "On the monotone convergence of certain Riemann-sums." *Publicationes Mathematicae (Debrecen).**

[60] TURÁN, P.: "On a certain problem in the theory of power-series with gaps."*

[61] TURÁN. P.—KNAPOWSKI, S.: "Comparative prime-number theory. I." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae.**

TURÁN, P.: see [10].

[62] VARGA, O.: "Zur Begründung der Hilbertschen Verallgemeinerung der nichteuklidischen Geometrie." *Monatshefte für Mathematik* **66** (1962).*

EXACT DATA OF PAPERS MENTIONED EARLIER WITH INCOMPLETE BIBLIOGRAPHICAL DATA[2]

ТОЧНЫЕ ДАННЫЕ РАБОТ ПРИВЕДЕННЫХ РАНЬШЕ С НЕПОЛНЫМИ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИМИ ДАННЫМИ[2]

V [33] Medgyessy, P.: *Decomposition of superpositions of distribution functions*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1961. 228 o.

V [69] Szüsz, P.: "Über die absolute Konvergenz lakunärer trigonometrischer Reihen". *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **12** (1961) 215—220.

V [70] Szüsz, P.: "Über einen Kusminschen Satz". *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **12** (1961) 447—454.

V [80] Turán, P.—Erdős, P.: "An extremal problem in the theory of interpolation". *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **12** (1961) 221—234.

VI [1] Ádám, A.: "On graphs in which two vertices are distinguished". *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **12** (1961) 377—397.

VI [2] Alpár, L.: "Sur la divergence de certaines séries de Taylor lacunaires". *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio Mathematica* **3—4** (1960/61) 19—26.

VI [4] Bognár, J.: «Об одном свойстве разрывности скалярного произведения в пространствах с индефинитной метрикой.» *Успехи математических наук* **17** (1962) 157—159.

VI [5] Császár, Á.: "Monotonité locale et dérivabilité approximatives de fonctions quelconques". *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio Mathematica* **3—4** (1960/61) 41—52.

VI [6] Császár, Á.: "Sur la représentation topologique des graphes". *Fundamenta Mathematicae* **50** (1961) 249—256.

VI [9] Fischer, J.—Inke, G.—Tóth, K.: "Rechenschieber zur Erleichterung karyometrischer Berechnungen". *Zeitschrift für mikroskopisch-anatomische Forschung*". **67** (1961) 104—120.

VI [11] Gallai, T.: "Maximum—Minimum Sätze und verallgemeinerte Faktoren von Graphen". *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **12** (1961) 131—173.

VI [14] Grätzer, Gy.—Schmidt, E. T.: "A note on a special type of fully invariant subgroups of abelian groups". *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio Mathematica* **3—4** (1960/61) 85—87.

VI [15] Grätzer, Gy.—Schmidt, E. T.: ,,On a problem of L. Fuchs concerning universal subroups and universal homomorphic images of abelian groups". *Indagationes Mathematicae* **23** (1961) 253—255.

VI [17] Heppes, A.: "Über Kreis- und Kugelwolken". *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **12** (1961) 209—214.

VI [19] Heppes, A.: "Ein Satz über gitterförmige Kugelpackungen". *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio Mathematica* **3—4** (1960/61) 89—90.

VI [20] Juvancz, I.: "Contraindication of non-parametric methods in medical experimentation". Quantitative Methods in pharmacology, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1961; 159—171.

VI [25] Kovács, I.: "Sur certains automorphismes des algebres hilbertiennes". *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **22** (1961) 234—242.

VI [27] Pollák, Gy.: "Über die Struktur kommutativer Hauptidealringe". *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **22** (1961) 62—74.

---

[2] The numbers preceding the serial numbers refer to the volume containing the respective list of papers.

[2] Римская цифра стоящая перед номером работы оказывает на том в котором фигурирует работа с неполными библиографическими данными.

VI [31*a*] RÉNYI, A.: "On measures of entropy and information". Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probabilyti, I. University of California Press, Berkeley, 1961; 547—561.
VI [32] RÉNYI, A.—ERDŐS, P.: "On the strength of connectedness of a random graph". *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **12** (1961) 261—267.
VI [33] RÉNYI, A.: "Legendre polynomials and probability theory". *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio Mathematica* **3—4** (1960/61) 247—251.
VI [37] RÓZSA, P.—JÁNOSSY, L.: "Maximum likelihood determination of the scattering constant of an emulsion track in the presence of noise". *Il Nuovo Cimento*, Serie X. **20** (1961) 817—836.
VI [38] RÓZSA, P.—FREY, T.: "Konvergenzschnelle des Differenzverfahrens der Poissonschen und der biharmonischen Differentialgleichung, I." *Periodica Polytechnica Engineering* **4** (1960) 4, 385—422.
VI [39] STEINFELD, O.: „Über das Zassenhaussche Lemma in allgemeinen algebraischen Strukturen". *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio Mathematica* **3—4** (1960/61) 309—314.
VI [40] STEINFELD, O.: "Verbandstheoretische Betrachtung gewisser idealtheoretischer Fragen". *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **22** (1961) 136—149.
VI [41] STEINFELD, O.: "Die einstufig nichtregulären bzw. nichtprimen Ringe". *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **22** (1961) 82—84.
VI [42] SURÁNYI, J.: "Über zerteilte Parallelogramme". *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **22** (1961) 85—90.
VI [46] SZÁSZ, F.: "Die Abelschen Gruppen, deren volle Endomorphismenringe die Minimalbedingung für Hauptrechtsideale erfüllen". *Monatshefte für Mathematik* **65** (2) (1961) 150—153.
VI [47] SZÁSZ, F.: "Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale, II." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **12** (1961) 417—439.
VI [49] SZÁSZ, F.: "Die Ringe mit lauter isomorphen nichttrivialen endlich erzeugbaren Unterringen". *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **22** (1961) 196—201.
VI [50] SZILÁRD, K.: "О теореме Фату для одного класса непрерывных отображений." Исследования по современным проблемам теории функции комплексного переменного. Гос. издат. физ.-мат. лит., Москва, 1961; 219—223.
VI [53] SZÜSZ, P.: "Verallgemeinerung und Anwendungen eines Kusminschen Satzes". *Acta Arithmetica* **7** (1962) 149—160.
VI [55] TURÁN, P.: "A remark on Hermite-Fejér interpolation". *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio Mathematica* **3—4** (1960/61) 369—377.
VI [56] TURÁN, P.: "Remark on a theorem of Erhard Schmidt". *Mathematica, Cluj* **2 (25)** (1960) 373—378.
VI [57] TURÁN, P.: "On some further one-sided theorems of new type in the theory of diophantine approximation". *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **12** (1961) 455—468.
VI [58] TURÁN, P.: "On eigen-values of matrices". *Annali di Matematica* **54** (1961) 397—402.
VI [61] VARGA, O.: "Über eine Kennzeichnung der Riemannschen Räume konstanter negativer und konstanter positiver Krümmung". *Annali di Matematica* **53** (1961) 105—117.
VI [62] VARGA, O.: "Bemerkung zur Winkelmetrik in Finslerschen Räumen". *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio Mathematica* **3—4** (1960/61) 379—382.
VI [63] VARGA, O.: "Über den inneren und induzierten Zusammenhang für Hyperflächen in Finslerschen Räumen". *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* **8** (1961) 208—217.
VI [64] VARGA, O.: „Über eine Charakterisierung der Finslerschen Räume konstanter Krümmung". *Monatshefte für Mathematik* **65** (1961) 277—286.
VI [65] VAS, É.: "Bemerkung zur Arbeit von K. Stange". *Metrika* **3** (1960) 212—214.
VI [66] VINCZE, I.: "On two-sample tests based on order statistics". Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, I., University of California Press, Berkeley, 1961; 695—705.

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki felelős: Vidosa László
A kézirat nyomdába érkezett: 1962. V. 15. — Példányszám: 800 — Terjedelem: 20,6 (A/5) ív

Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK

KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI: RÉNYI ALFRÉD

TECHNIKAI SZERKESZTŐK: BOGNÁR KATALIN, RÉVÉSZ PÁL

A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEI az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb matematikai, valamint a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden kötete két sorozatban jelenik meg (A. és B. sorozat). Az A. sorozat idegen nyelvű, a B. sorozat magyar nyelvű. Évente egy kötet jelenik meg kb. 30 nyomdaív terjedelemben, amely az A. sorozat 3 és a B. sorozat 1 füzetéből áll. A dolgozatokhoz azoktól különböző nyelvű kivonatok csatlakoznak. Közlésre szánt dolgozatokat kérjük két gépelt példányban kivonattal ellátva a szerkesztő címére küldeni (Budapest V., Reáltanoda u. 13—15.).

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEInek előfizetési ára kötetenként belföldi címre 50,— Ft, külföldi címre 70,— Ft. (Kötetenként 5 $.) *Belföldön* előfizethető a Posta Központi Hírlapirodánál (Budapest V., József nádor tér 1.) vagy bármely Postahivatalnál. Egyéni előfizetők a 61257. számú, közületek a 61066. számú csekkbefizetési lap felhasználásával, vagy az MNB 8. számú egyszámlára való átutalással rendelhetik meg a folyóiratot. *Külföldi* megrendelések a Kultúra (Budapest, 62, POB 149) útján eszközölhetők. A folyóirat egyes füzetei 15,— Ft-os árban az Akadémiai Könyvesboltban kaphatók (Budapest V., Váci u. 22.). Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük az Intézet Könyvtárához fordulni (Budapest V., Reáltanoda u. 13—15.).

ТРУДЫ

МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

РЕДАКТОР: ALFRÉD RÉNYI

ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕДАКТОРЫ: KATALIN BOGNÁR, PÁL RÉVÉSZ

АДРЕС: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15., ВЕНГРИЯ

В ТРУДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи, содержащие результаты научно-исследовательской работы Института, и другие математические работы, а также статьи, связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала состоит из двух серий: серия А и В. Серия А выходит на иностранных языках, Серия В — на венгерском языке. В каждом году выходит один том, который содержит приблизительно 30 печатных листов, и состоит из 3 выпусков серии А и одного выпуска серии В. К кашдой работе примыкает резюме на языке, отличном от языка статьи. Работы, предназначенные для опудликования в журнале, вместе с их резюме следует направлять по адресу редакции (Budapest, V., Reáltanoda u. 13—15.) в двух напечатанных на машинке экземплярах.

Цена подписки на ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА в Венгрии 50 форинтов, на заграничный адрес 70 форинтов ($ 5 — за каждый том). Заграничные заказы принимает Культура, (Budapest, 62, POB 149). По поводу отношения обмена просим обращаться к Библиотеке Института (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15., Венгрия).

PUBLICATIONS

OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

EDITOR: ALFRÉD RÉNYI

TECHNICAL EDITORS: KATALIN BOGNÁR, PÁL RÉVÉSZ

ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15, HUNGARY

The PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of scientific work of the Institute and other mathematical papers on the practical applications of mathematics. Each volume of the journal is published in two series (series A and B). Series A is published in foreign languages series B in Hungarian. In every year one volume appears, consisting of about 30 printed lists and containing 3 fasciculi of series A and one fasciculus of series B. The papers are provided with abstracts in languages different from that of the corresponding paper. Papers intended for publication in the journal should be sent to the editor in 2 typewritten copies, with an abstract.

The price of a volume of the PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE is 50,— Ft to an adress in Hungary and 70,— Ft ($ 5.— the volume) to abroad. Subscriptions can be made at the Kultúra from abroad (Budapest, 62, POB 149). For establishing exchange relations please write to the Library of the Mathematical Institute (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15. Hungary).

Ára: 30,— Ft

INDEX

СОДЕРЖАНИЕ

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI

VII. ÉVFOLYAM A. SOROZAT, 3. FÜZET

1962

*

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ VII, СЕРИЯ А, ВЫПУСК 3.

1962

*

PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE

HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME VII, SERIES A, FASC. 3.

1962

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST

1962

INDEX СОДЕРЖАНИЕ

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI

VII. ÉVFOLYAM A. SOROZAT, 3. FÜZET

1962

★

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ VII, СЕРИЯ А, ВЫПУСК 3.

1962

★

PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE

HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME VII, SERIES A, FASC. 3.

1962

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST

1962

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK

KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI: RÉNYI ALFRÉD

TECHNIKAI SZERKESZTŐK: BOGNÁR KATALIN, RÉVÉSZ PÁL

A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEI az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb matematikai, valamint a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden kötete két sorozatban jelenik meg (A. és B. sorozat). Az A. sorozat idegen nyelvű, a B. sorozat magyar nyelvű. Évente egy kötet jelenik meg kb. 30 nyomdaív terjedelemben, amely az A. sorozat 3 és a B. sorozat 1 füzetéből áll. A dolgozatokhoz azoktól különböző nyelvű kivonatok csatlakoznak. Közlésre szánt dolgozatokat kérjük két gépelt példányban kivonattal ellátva a szerkesztő címére küldeni (Budapest V., Reáltanoda u. 13—15.).

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEInek előfizetési ára kötetenként belföldi címre 50,— Ft, külföldi címre 70,— Ft. (Kötetenként 7 $.) *Belföldön* előfizethető a Posta Központi Hirlapirodánál (Budapest V., József nádor tér 1.) vagy bármely Postahivatalnál. Egyéni előfizetők a 61257. számú, közületek a 61066. számú csekkbefizetési lap felhasználásával, vagy az MNB 8. számú egyszámlára való átutalással rendelhetik meg a folyóiratot. *Külföldi* megrendelések a Kultúra (Budapest, 62, POB 149) útján eszközölhetők. A folyóirat egyes füzetei 15,— Ft-os árban az Akadémiai Könyvesboltban kaphatók (Budapest V., Váci u. 22.). Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük az Intézet Könyvtárához fordulni (Budapest V., Reáltanoda u. 13—15.).

ТРУДЫ

МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

РЕДАКТОР: ALFRÉD RÉNYI

ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕДАКТОРЫ: KATALIN BOGNÁR, PÁL RÉVÉSZ

АДРЕС: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15., ВЕНГРИЯ

В ТРУДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи, содержащие результаты научно-исследовательской работы Института, и другие математические работы, а также статьи, связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала состоит из двух серий: серия А и В. Серия А выходит на иностранных языках, Серия В — на венгерском языке. В каждом году выходит один том, который содержит приблизительно 30 печатных листов, и состоит из 3 выпусков серии А и одного выпуска серии В. К кашдой работе примыкает резюме на языке, отличном от языка статьи. Работы, предназначенные для опудликования в журнале, вместе с их резюме следует направлять по адресу редакции (Budapest, V., Reáltanoda u. 13—15.) в двух напечатанных на машинке экземплярах.

Цена подписки на ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА в Венгрии 50 форинтов, на заграничный адрес 70 форинтов ($ 7 — за каждый том). Заграничные заказы принимает Культура, cBudapest, 62, POB 149). По поводу отношения обмена просим обращаться к Библиотеке Института cBudapest V., Reáltanoda u. 13/15., Венгрия).

PUBLICATIONS

OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

EDITOR: ALFRÉD RÉNYI

TECHNICAL EDITORS: KATALIN BOGNÁR, PÁL RÉVÉSZ

ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15, HUNGARY

The PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of scientific work of the Institute and other mathematical papers on the practical applications of mathematics. Each volume of the journal is published in two series (series A and B). Series A is published in foreign languages series B in Hungarian. In every year one volume appears, consisting of about 30 printed lists and containing 3 fasciculi of series A and one fasciculus of series B. The papers are provided with abstracts in languages different from that of the corresponding paper. Papers intended for publication in the journal should be sent to the editor in 2 typewritten copies, with an abstract.

The price of a volume of the PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE is 50,— Ft to an adress in Hungary and 70,— Ft ($ 7.— the volume) to abroad. Subscriptions can be made at the Kultúra from abroad (Budapest, 62, POB 149). For establishing exchange relations please write to the Library of the Mathematical Institute (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15. Hungary).

ON THE POSITION OF THE SAMPLE MEAN AMONG THE ORDERED SAMPLE ELEMENTS

by

KÁROLY SARKADI, EDIT SCHNELL[1] and ISTVÁN VINCZE

Introduction

Let $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ be independent and identically distributed random variables with continuous distribution function $F(x)$ and with density function $F'(x) = f(x)$. Let us arrange these variables according to their order of magnitude: $\xi_1^* < \xi_2^* < \ldots < \xi_n^*$ and denote their mean value by $\bar{\xi}$, i.e. $\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i$.

In the following the probabilities

$$p_k = \mathbf{P}(\xi_{k-1}^* \leqq \bar{\xi} < \xi_k^*), \qquad k = 2, 3, \ldots n \tag{1}$$

are considered.

Although the examination of these probabilities lies close at hand, as far as we know this problem has not yet been treated in the literature[2].

A distribution-free solution cannot be expected. It is obvious that if $F(x)$ is symmetrical (i.e. $F(x) = 1 - F[\mathbf{M}(\xi) - x]$) the equality $p_k = p_{n-k+1}$ must be valid. We shall see in the following that for exponentially distributed variables this symmetry is not fulfilled.

The explicit determination of the probabilities (1) seems to be very complicated in the general case. The formula based on the joint distribution of $(\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots \xi_n^*)$ is rather unmanageable; concerning the exact joint distribution of $(\bar{\xi}, \xi_k^*)$ only for normally distributed variables is a recursion formula known and even this is very complicated [4]. In § 1 we shall determine the probabilities (1) explicitly for the exponential case, making use of the additive Markovian property of the ordered sample elements in this case; in § 2 an alternative elementary proof is given. In § 3 for the general case the limiting joint distribution of $\bar{\xi}$ and ξ_k^* is derived under weak conditions and is shown to be a two dimensional Gaussian one. As a consequence of this the limiting Gaussian distribution for the problem will be given in § 4.

§ 1. Exponentially distributed random variables

1. Let the random variables $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ be independent identically and exponentially distributed, i.e.

$$\mathbf{P}(\xi_i < x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad i = 1, 2, \ldots n \tag{1.1}$$

[1] Hungarian Central Statistical Office.

[2] Added in proof: Our paper was already in print as the paper of DAVID [10] appeared which contains some of our results but considers only normal distribution.

We wish to remark that from the identity

$$p_k = \mathbf{P}(\xi_{k-1}^* \leqq \bar{\xi} < \xi_k^*) = \mathbf{P}(\lambda\xi_{k-1}^* \leqq \lambda\bar{\xi} < \lambda\xi_k^*)$$

there follows the independence of the probabilities p_k from the value $\lambda > 0$ and thus it is sufficient to consider only the case $\lambda = 1$.

2. We shall make use of the following well known relation: (see e.g. [1] p. 232) if $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_k$ are independent, exponentially distributed random variables with parameters $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ then the density function $g_k(t)$ of the variable $\vartheta = \sum_{i=1}^{k} \vartheta_i$ is equal to

(1.2)

$$g_k(t) = (-1)^{k-1} \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k \sum_{i=1}^{k} \frac{e^{-\lambda_i t}}{(\lambda_i - \lambda_1) \ldots (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \ldots (\lambda_i - \lambda_k)} .$$

If $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = \lambda$ then we obtain from (1.2) the following well known formula:

$$g_k(t) = \frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} . \tag{1.3}$$

3. We shall apply the following well known theorem: if $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ are independent, identically and exponentially distributed random variables with the parameter $\lambda = 1$ and $\xi_1^* < \xi_2^* < \ldots < \xi_n^*$ ($\xi_0^* = 0$) the set of the same variables rearranged in increasing order of magnitude, then the increments $\delta_k = \xi_k^* - \xi_{k-1}^*$ are independent and exponentially distributed with distribution functions

$$F(x) = \mathbf{P}(\delta_k < x) = 1 - e^{-(n-k+1)x}, \qquad x \geqq 0, \ k = 1, 2, \ldots n$$

(see for example [1] p. 585).

4. Let us turn now to the determination of probabilities:

$$P_k = p_1 + p_2 + \ldots + p_k = \mathbf{P}(\bar{\xi} < \xi_k^*), \qquad k = 1, 2, \ldots n$$

where $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ are independent exponentially distributed random variables with parameters λ_i ($i = 1, 2, \ldots n$).

With our notation the following relations hold:

$$\xi_k^* = \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_k$$

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k^* = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k} \delta_i \right) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)\, \delta_k = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \delta_k .$$

Thus

$$P_k = \mathbf{P}(\bar{\xi} < \xi_k^*) = \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{i-1}{n}\right)\delta_i < \sum_{i=1}^{k}\delta_i\right) =$$

$$(1.4) \qquad = \mathbf{P}\left(\sum_{i=k+1}^{n}\left(1 - \frac{i-1}{n}\right)\delta_i < \sum_{j=2}^{k}\frac{j-1}{n}\delta_j\right).$$

Let us introduce the following new variables:

$$\eta_i = \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)\delta_i, \quad \vartheta_j = j\delta_{j+1}$$

for the distribution function of which

$$\mathbf{P}(\eta_i < x) = 1 - e^{-nx} \text{ resp. } \mathbf{P}(\vartheta_j < y) = 1 - e^{-\left(\frac{n}{j} - 1\right)y}$$

is valid.

In consequence of the independence of the variables η_i, the density function $\gamma_{n-k}(x)$ of $\eta = \eta_{k+1} + \eta_{k+2} + \ldots + \eta_n$ is the following:

$$\gamma_{n-k}(x) = \frac{n^{n-k}}{(n-k-1)!}x^{n-k-1}e^{-nx},$$

further — because of (1.2) the density function $g_k(x)$ of the variable $\vartheta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k-1}\vartheta_i$ equals

$$g_k(x) = n\binom{n-1}{k-1}e^{nx}\sum_{r=1}^{k-1}(-1)^{r-1}\binom{k-1}{r}\left(-\frac{r}{n}\right)^{k-2}e^{-\frac{n^2}{r}x}.$$

Consequently our formula (1.4) may be written — because of the idependence of η and ϑ — as follows:

$$P_k = \mathbf{P}(\eta < \vartheta) = \int_0^\infty\left(\int_x^\infty g_k(u)\,du\right)\gamma_{n-k}(x)\,dx =$$

$$= \frac{n^{n-k+1}}{(n-k-1)!}\binom{n-1}{k-1}\sum_{r=1}^{k-1}(-1)^{r-1}\binom{k-1}{r}\times$$

$$\times\left(-\frac{r}{n}\right)^{k-2}\int_0^\infty\left(\int_x^\infty e^{-\left(\frac{n^2}{r}-n\right)u}\,du\right)x^{n-k-1}e^{-nx}\,dx.$$

Carrying out the integration and using a slight modification — we obtain

$$(1.5) \qquad P_k = \frac{(-1)^k}{n^{n-1}} \binom{n}{k} \sum_{r=1}^{k-1} (-1)^{r-1} r^{n-1} \frac{k-r}{n-r} \binom{k}{r} \qquad k = 2, 3, \ldots n .$$

Thus we have determined the probabilities mentioned in (1.4) for the exponential case.

Obviously P_n must be equal to 1 ($\bar{\xi} < \xi_n^*$ being a certain event). If in (1.5) k is replaced by n we obtain

$$P_n = \frac{(-1)^n}{n^{n-1}} \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{r-1} r^{n-1} \binom{n}{r} = \frac{1}{n^{n-1}} \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{n-1+r} \binom{n}{r} r^{n-1} .$$

N. H. ABEL has proved the identity (see [2])

$$(b-n) \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{r} (a+r)^r (b-r)^{n-r-1} = (a+b)^n ,$$

which holds for every real value of a, b and for every integer $n \geqq 0$.

Let us apply Abel's identity for $a = b = 0$ and take into consideration that for $r = 0$ the left side of the equality equals 0, accordingly:

$$-n \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} r^{n-1} (-1)^{n-r-1} + n^n = 0 ;$$

from this

$$\sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{n-r-1} \binom{n}{r} r^{n-1} = n^{n-1} .$$

Obviously $(-1)^{n-r-1} = (-1)^{n-r+1}$ and thus it is verified that our formula gives $P_n = 1$.

5. For the probabilities $p_k = P_k - P_{k-1}$ from (1.5) the following formulae are obtained:

$$(1.6) \qquad p_k = \frac{(-1)^k}{n^{n-1}} \binom{n}{k-1} \sum_{r=1}^{k-1} (-1)^{r-1} r^{n-1} \binom{k-1}{r}$$

or

$$(1.7) \qquad p_k = \frac{\binom{n}{k-1} (k-1)!}{n^{n-1}} \mathfrak{S}_{n-1}^{k-1} ,$$

where the $\mathfrak{S}_r^k$ denote the so called Stirling numbers of the second kind (see e.g. [3] p. 168—181; tabulated in [5]).

The above distribution is a special case of the occupancy distribution. It is known that putting randomly r objects into n cells, the probability that k cells will be occupied and $n - k$ will be empty is

$$\frac{\binom{n}{k} k!}{n^r} \mathfrak{S}_r^k$$

(see e.g. [3] p. 178). Thus (1.7) gives the probability that putting $n-1$ objects into n cells, $k-1$ cells will be occupied and $n-k+1$ will be empty. Confidence limits for the occupancy distribution are tabulated in [9].

6. From formula (1.5) we obtain for every n:

$$P_2 = \frac{1}{n^{n-2}} \qquad P_3 = \frac{1}{n^{n-2}}[2^{n-2}(n-1)-(n-2)]$$

$$P_4 = \frac{1}{n^{n-2}}\,\frac{1}{2}[3^{n-2}(n-1)(n-2) - 2^{n-1}(n-1)(n-3) + (n-2)(n-3)] .$$

7. From above formulae in the case $n = 3$ we obtain

$$p_2 = \frac{1}{3}, \qquad p_3 = \frac{2}{3} \qquad (p_1 = 0)$$

and in the case $n = 4$

$$p_2 = \frac{1}{16}, \qquad p_3 = \frac{9}{16}, \qquad p_4 = \frac{6}{16} \qquad (p_1 = 0) .$$

§ 2. An alternative proof

1. We now turn to an other proof of (1.7) which is based on combinatorial models.

It will be shown that the determination of the probabilities $p_k = \mathbf{P}(\xi^*_{k-1} \leqq \bar{\xi} < \xi^*_k)$ can be reduced in case of exponential parent distribution (Model A) to the above mentioned occupancy problem (Model B).

2. First of all we will show that Model A is equivalent with the following Model C: let us divide the interval [0,1) by $n-1$ mutually independent variates distributed uniformly in the interval [0,1). We consider the probability of exactly $k-1$ random intervals having lengths $\leqq \frac{1}{n}$. In the following it is shown that this probability equals

$$p_k = \mathbf{P}(\xi^*_{k-1} \leqq \bar{\xi} < \xi^*_k) .$$

For this purpose it suffices to verify that the joint distribution of the quantities $\xi_i / \sum_{j=1}^{n} \xi_j$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ is identical with that of the random intervals obtained by above procedure. These two random vectors have the same set of possible values: each component must be nonnegative and the sum of all components equals 1. The latter vector has a uniform distribution within this set. We show that the same holds for the former vector variate as well. It is clear from the form of the density function of the vector $\{\xi_i\}$ that the conditional distribution of $\xi_i / \sum_{j=1}^{n} \xi_j$ with respect to $\sum_{j=1}^{n} \xi_j$ is uniform within the set of the possible values. As this set (and thus the distribution) does not depend on the actual value of $\sum_{j=1}^{n} \xi_j$ the unconditional distribution of $\xi_i / \sum_{j=1}^{n} \xi_j$ agrees with the conditional one. This proves the equivalence of Models A and C.

3. Evidently Model B can be formulated in the following way: The interval $[0,1)$ is divided into n intervals of length $1/n$. We are interested in the probability that exactly $k-1$ of these intervals will contain at least one of $n-1$ random points, independently and uniformly distributed in the whole interval.

It must be shown only that Model C is equivalent with Model B. For this purpose we give a transformation, mapping Model B into Model C.

The transformation between the values $0 \leqq \eta_1 \leqq \eta_2 \leqq \ldots \leqq \eta_{n-1} < 1$ and $0 \leqq \eta'_1 \leqq \eta'_2 \leqq \ldots \leqq \eta'_{n-1} < 1$ given below will have the following properties:

a) it will be $1:1$,

b) if $\{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}\}$ is distributed according to the order statistics of a sample of size $n-1$ from a $[0,1)$ uniform distribution then $\{\eta'_1, \eta'_2, \ldots, \eta'_{n-1}\}$ follows the same law,

c) if the interval $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$ contains at least one of the values $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, then $\eta'_1 - \eta'_{i-1} \leqq 1/n$; otherwise $\eta'_i - \eta'_{i-1} > 1/n$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1;$ $\eta'_0 = 0,\ \eta'_n = 1)$.

Evidently above conditions assure the equivalence of Models B and C.

The transformation is as follows:

Let be

$$\zeta_i = n\eta_i - [n\eta_i] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{2.1}$$

where $[x]$ denotes the greatest integer $\leqq x$. Let be further

$$\beta_1 = 0$$

$$\beta_i = \begin{cases} \beta_{i-1} & \text{if } \zeta_i \geqq \zeta_{i-1} \\ \beta_{i-1} + 1 & \text{if } \zeta_i < \zeta_{i-1} \end{cases} \qquad (i = 2, 3, \ldots, n-1) \tag{2.2}$$

and

$$\alpha_i = [n\eta_i] - \beta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{2.3}$$

Evidently the sequences $\{\alpha_i\}$ and $\{\beta_i\}$ are monotonically increasing,

$$0 \leqq \beta_i + \zeta_i - \beta_{i-1} - \zeta_{i-1} < 1 \quad (i = 2, 3, \ldots, n-1) \tag{2.4}$$

and

$$\eta_i = \frac{\alpha_i + \beta_i + \zeta_i}{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{2.5}$$

Let us denote by $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_s$ the indices of those β_i $(i = 2, \ldots, n-1)$ for which

$$\beta_{\gamma_j} = \beta_{\gamma_j - 1} \tag{2.6}$$

and by $\delta_1 < \delta_2 < \ldots \delta_{n-k}$ the indices of those γ_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ for which

$$\alpha_{\gamma_{\delta_j}} = \alpha_{\gamma_{\delta_j} - 1}. \tag{2.7}$$

Here the symbol k is used according to its former interpretation. It follows namely that $\alpha_j + \beta_j = \alpha_{j-1} + \beta_{j-1}$ if and only if $j = \gamma_{\delta_i}$ for some i. This means that $\alpha_j + \beta_j$ takes on $k - 1$ different values, in other words, $k - 1$ is the number of "occupied" intervals, i.e. the intervals $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$ $(1 \leqq i \leqq n)$ each of which contain at least one of the points η_j.

We denote these $k - 1$ values of $\alpha_j + \beta_j$ by

$$\bar{\varepsilon}_1 < \bar{\varepsilon}_2 < \ldots \bar{\varepsilon}_{k-1} \tag{2.8}$$

whereas the remainder members of the sequence $0, 1, \ldots, n - 1$ are denoted by

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \ldots < \varepsilon_{n-k+1} \cdot$$

Let α_i' be defined by the relations

$$\begin{aligned} \alpha'_{\varepsilon_i+1} &= \delta_i & (i = 1, 2, \ldots, n - k + 1) \\ \alpha'_{\bar{\varepsilon}_i+1} &= \alpha'_{\bar{\varepsilon}_i} & (i = 1, 2, \ldots, k - 1) \end{aligned} \tag{2.9}$$

where $\alpha_0' = 0$, $\delta_{n-k+1} = s + 1$. (Note that $\delta_{n-k} \leqq s$ by definition).

Let us define now the transformed values

$$\eta_i' = \frac{\alpha_i' + \beta_i + \zeta_i}{n}. \tag{2.10}$$

It follows from (2.9) that $\alpha'_{n-1} \leqq s + 1$ and from (2.2) and (2.6) that

$$\beta_{n-1} = n - 2 - s. \tag{2.11}$$

This and (2.4) assure the fulfilment of the condition $0 \leqq \eta_1' \leqq \eta_2' \leqq \leqq \ldots \leqq \eta_{n-1}' < 1$.

We now go over to the proof that the transformation (2.10) is one by one, i.e. the quantities $\{\eta_i\}$ can be also uniquely determined from the quantities $\{\eta_i'\}$. In fact, if $0 \leqq \eta_1' \leqq \eta_2' \leqq \ldots \leqq \eta_{n-1}' < 1$ are given, the sequence $\{\eta_i\}$ can be uniquely determined in the following way: the sequences $\{ {}_1' \}$, $\{\beta_i\}$, $\{\zeta_i\}$, can be determined from (2.1) — (2.3), putting η_i' and α_i' instead of η_i and α_i, respectively. Then the sequence $\{\gamma_i\}$ will follow from (2.6).

Putting $\alpha_0' = 0$, $\alpha_n' = s + 1$ ($\alpha_n' \geqq \alpha_{n-1}'$ is assured by (2.11)) and, in accordance with (2.9), denoting by

$$\delta_0 = 0 < \delta_1 < \delta_2 < \ldots < \delta_{n-k} < \delta_{n-k+1} = s + 1$$

the values taken on by $\alpha_0', \alpha_1', \ldots, \alpha_n'$, the sequences $\{\varepsilon_i\}$ and $\{\bar{\varepsilon}_i\}$ will be defined by (2.9).

Let be $\varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_{n-1}$ the complementary set of the sequence $\gamma_{\delta_1}, \gamma_{\delta_2}, \ldots, \gamma_{\delta_{n-k}}$ within the sequence $1, 2, \ldots, n - 1$ and let us define in accordance with (2.7)

$$\begin{aligned} \alpha_{\varphi_i} &= \bar{\varepsilon}_i - \beta_{\varphi_i} & (i = 1, 2, \ldots, k - 1), \\ \alpha_{\gamma_{\delta_i}} &= \alpha_{\gamma_{\delta_i} - 1} & (i = 1, 2, \ldots, n - k) \end{aligned}$$

from which by (2.5) we obtain the sequence $0 \leqq \eta_1 \leqq \eta_2 \leqq \ldots \leqq \eta_{n-1} < 1$

Thus it is proved that the transformation (2.10) is one by one and that the vectors $\{\eta_i\}$ and $\{\eta_i'\}$ have the same set of possible values.

We now have to prove that the transformation preserves the measure. The space of the vector $\{\eta_i\}$ can be divided into a finite number of subsets for each of which the vectors $\{\alpha_i\}$ and $\{\beta_i\}$ are constant; evidently these subsets are measurable. Our transformation means a simple translation for such a subset thus it is measure-preserving. As under the circumstances of the condition b) the distribution of $\{\eta_i\}$ is uniform over the set of its possible values and $\{\eta_i'\}$ has the same set of possible values, the distributions of $\{\eta_i\}$ and $\{\eta_i'\}$ are identical.

Finally we see from (2.8) that the interval $\left[\frac{\varepsilon_i}{n}, \frac{\varepsilon_i+1}{n}\right)$ does not contain any of the values $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ and the interval $\left[\frac{\bar{\varepsilon}_j}{n}, \frac{\bar{\varepsilon}_j+1}{n}\right)$ contains at least one of them; on the other hand, (2.9), (2.10) and (2.4) assure that

$$\eta'_{\varepsilon_i+1} - \eta'_{\varepsilon_i} > 1/n, \qquad \eta'_{\bar{\varepsilon}_j+1} - \eta'_{\bar{\varepsilon}_j} \leqq 1/n$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n-k+1; \;\; j = 1, 2, \ldots, k-1).$$

Thus the transformation has the property c) as well.

Thus we have proved the equivalency of Models C and B, i.e. that of A and B too.

§ 3. The asymptotic joint distribution of the mean and the k-th ordered sample element

It is supposed in this and in the first part of the following § that the common density function of the independent random variables $\xi_1, \xi_2; \ldots, \xi_n$ is continuous and positive in intervals, which contain the expected value $\mathbf{M}(\xi_i)$ and the quantiles considered in the following as inner points. Let be for the sake of simplicity

$$\mathbf{M}(\xi) = 0, \quad \mathbf{M}(\xi^2) = \mathbf{D}^2(\xi) = 1.$$

We shall introduce in the following some new notations for quantities depending on n but without indicating this circumstance. Let us have now a sequence of integers $k = k(n)$ for which we assume that

$$q = q_n = \frac{k(n)}{n} \to \bar{q}, \qquad 0 < \bar{q} < 1,$$

as $n \to \infty$ or in short $\lim\limits_{n\to\infty} q = \bar{q}$.

We shall use further the following notations:

$$t = t(q_n) = F^{-1}(q_n), \qquad \bar{t} = F^{-1}(\bar{q}),$$

$$\sigma^2 = \sigma^2(q_n) = \frac{q(1-q)}{f^2(t)}, \quad \bar{\sigma} = \sigma(\bar{q}),$$

$$m = m(q_n) = \frac{1}{q_n} \int\limits_{-\infty}^{t} u f(u)\, du, \quad \bar{m} = m(\bar{q})$$

and

$$\eta_k^* = \frac{\xi_k^* - t}{\sigma}\sqrt{n},$$

(here naturally $k = k(n)$, $t = t(q_n)$ and $\sigma = \sigma(q_n)$).

It will be shown *that in the case of $f(\bar{q}) \neq 0$ the joint limiting distribution of $\bar{\xi}$ and ξ_k^* is normal, more precisely, that*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\bar{\xi} + z\,\eta_k^* \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1 - 2\dfrac{qm}{f(q)} z + \sigma^2 z^2}} \sqrt{n} < y,\ \eta_k^* < w \right) =$$

(3.1)

$$= \frac{1}{2\pi(1-\varrho^2)} \int_{-\infty}^{w} \int_{-\infty}^{y} \exp\left(- \frac{u^2 + v^2 - 2\varrho uv}{2(1-\varrho^2)} \right) du\, dv\,,$$

where

$$\varrho = \frac{\bar{\sigma}\left(z - \dfrac{f(\bar{t})\,\overline{m}}{1-\bar{q}} \right)}{\sqrt{1 - 2\dfrac{\bar{q}\,\overline{m}}{f(\bar{t})} z + \sigma^2 z^2}}\,.$$

Proof. We begin with investigating the conditional distribution of $\bar{\xi}$ with respect to ξ_k^*. Evidently under the condition $\xi_k^* = t'$ the conditional distribution of $\xi_1^* + \xi_2^* + \ldots + \xi_{k-1}^*$ is identical to that of the sum of $k-1$ independent variates with the common distribution function

$$\mathbf{P}(\zeta_i < x) = \frac{1}{F(t')} \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du\,, \qquad (-\infty < x \leq t';\, i = 1, 2, \ldots, k-1)$$

and, similarly $\xi_{k+1}^* + \ldots + \xi_n^*$ is conditionally distributed as the sum of $n-k$ independent variates with the common distribution function

$$\mathbf{P}(\zeta_i < x) = \frac{1}{1 - F(t')} \int_{t'}^{x} f(u)\, du \qquad (t' \leq x \leq \infty,\, i = k+1, \ldots, n)\,.$$

The variables ζ_i have the expectations and variances

$$\mathbf{M}(\zeta_i) = \frac{1}{F(t')} \int_{-\infty}^{t'} u f(u)\, du\,,$$

$$\mathbf{D}^2(\zeta_i)=\frac{1}{F(t')}\int_{-\infty}^{t'} u^2 f(u)\,du-\left(\frac{1}{F(t')}\int_{-\infty}^{t'} uf(u)\,du\right)^2,$$

$$i=1,2,\ldots k-1,$$

$$\mathbf{M}(\zeta_i)=-\frac{1}{1-F(t')}\int_{-\infty}^{t'} uf(u)\,du\,,$$

$$\mathbf{D}^2(\zeta_i)=\frac{1}{1-F(t')}\left(1-\int_{-\infty}^{t'} u^2 f(u)\,du\right)-\left(\frac{1}{1-F(t')}\int_{-\infty}^{t'} uf(u)\,du\right)^2,$$

$$i=k+1,k+2,\ldots n\,.$$

Thus it follows that the conditional expectation and variance of $\bar{\xi}$ is — with the notation $q'=\dfrac{k-1}{n}$ —

$$\mathbf{M}(\bar{\xi}\,|\,\xi_k^*=t')=\frac{n-1}{n}\int_{-\infty}^{t'} uf(u)\,du\,\frac{q'-F(t')}{F(t')\big(1-F(t')\big)}+\frac{t'}{n},$$

$$\mathbf{D}^2(\bar{\xi}\,|\,\xi_k^*=t')=\frac{n-1}{n^2}\left[\frac{1-q'}{1-F(t')}+\int_{-\infty}^{t'} u^2 f(u)\,du\,\frac{q'-F(t')}{F(t')\big(1-F(t')\big)}-\right.$$

$$\left.-\left(\int_{-\infty}^{t'} uf(u)\,du\right)^2\frac{q'\big(1-F(t')\big)^2+(1-q')\,F(t')^2}{F(t')^2\big(1-F(t')\big)^2}\right].$$

Let be $\varphi(x)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$ and $\Phi(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{t'}\varphi(t)\,dt$.

According to the central limit theorem we have

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\frac{\bar{\xi}-\mathbf{M}(\bar{\xi}\,|\,\xi_k^*=t')}{\mathbf{D}(\bar{\xi}\,|\,\xi_k^*=t')}<y\,|\,\xi_k^*=t'\right)=\Phi(y)\tag{3.2}$$

uniformly in y.

It is known furthermore that denoting the distribution function and density function of ξ_k^* by $F_k(u)$ and $f_k(u)$, respectively, we have [8] $\left(t=F^{-1}\left(\dfrac{k}{n}\right)\right)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} f_k\left(t + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,\omega\right) = \varphi(w) \tag{3.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} F_k\left(t + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} w\right) = \Phi(w) \tag{3.4}$$

uniformly in w.

For the conditional expectation and variance we have

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}(\bar{\xi} \mid \xi_k^* = t + x) = -\,x \int_{-\infty}^{\bar{t}} u f(u)\,du\, \frac{f(\bar{t})}{\bar{q}(1-\bar{q})} + o(x) =$$

$$= -\,\frac{x\overline{m}f(\bar{t})}{1-\bar{q}} + o(x)\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mathbf{D}^2(\bar{\xi} \mid \xi_k^* = t + x) = 1 - \frac{\overline{m}^2\,\bar{q}}{1-\bar{q}} + O(x)\,.$$

Hence

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}(\bar{\xi} + z\,\xi_k^* \mid \xi_k^* = t + x) = z\bar{t} + x\left(z - \frac{\overline{m}f(\bar{t})}{1-\bar{q}}\right) + o(x)\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mathbf{D}^2(\bar{\xi} + z\,\xi_k^* \mid \xi_k^* = t + x) = 1 - \frac{\overline{m}^2\,\bar{q}}{1-\bar{q}} + O(x)\,.$$

Thus from (3.2) — ξ_k^* being given — it follows that for each $\varepsilon > 0$, we can find a positive constant δ, such that for sufficiently large n

$$\left| \mathbf{P}\left(\bar{\xi} + z\,\xi_k^* < zt + x\left(z - \frac{mf(t)}{1-q}\right) + \right.\right. \tag{3.5}$$
$$\left.\left. + \frac{y'}{\sqrt{n}}\sqrt{1 - \frac{m^2 q}{1-q}}\;\right|\; \xi_k^* = t + x\right) - \Phi(y') \Bigg| < \frac{\varepsilon}{4K}\,,$$

whenever $|x| < \delta$; here K shall fulfill the condition

$$\Phi(-K) < \frac{\varepsilon}{6}\,. \tag{3.6}$$

Further for sufficiently large n (see (3.4)) we have

$$F_k\left(t - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,K\right) < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{3.7}$$

Now the probability in the left hand side of (3.1) equals

$$I_n(q) = \int_{-\infty}^{w} \mathbf{P}\left(\bar{\xi} + z\,\xi_k^* < zt + \frac{y}{\sqrt{n}}\sqrt{1 - 2\frac{qm}{f(t)}z + \sigma^2 z^2}\;\middle|\; \xi_k^* = t + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\tau\right) \times$$

(3.8)

$$\times f_k\left(t + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\tau\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,d\tau\,.$$

Let be

$$I(\bar{q}) = \int_{-\infty}^{w} \Phi\left(y\sqrt{\frac{1 - 2\frac{\bar{q}\bar{m}}{f(\bar{t})}z + \bar{\sigma}^2 z^2}{1 - \frac{\bar{m}^2\bar{q}}{1-\bar{q}}}} - \tau\frac{z - \frac{\bar{m}f(\bar{t})}{1-\bar{q}}}{\sqrt{1 - \frac{\bar{m}^2\bar{q}}{1-\bar{q}}}}\right)\varphi(\tau)\,d\tau\,. \tag{3.9}$$

The difference between $I_n(q)$ and $I(\bar{q})$ can be made smaller than ε as shown in the following:

First we can denote the argument of Φ in $I(\bar{q})$ by y', then apply (3.5) putting $x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\tau$. Dividing the integration interval $(-\infty, w)$ into $(-\infty, -K)$ and $(-K, w)$ (here $-K$ can be chosen smaller than $-|w|$), in consequence of (3.6) and (3.7) the first part of the difference becomes smaller then $\frac{\varepsilon}{2}$. Concerning the second part we refer to (3.3) and (3.5), namely for sufficiently large n we obtain from (3.3) the inequality

$$\left|\frac{\sigma}{\sqrt{n}}f_k\left(t + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\tau\right) - \varphi(\tau)\right| < \frac{\varepsilon}{6K}\,.$$

I.e. for sufficiently large n

$$|\,I_n(q) - I(\bar{q})\,| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Let us turn now to the evaluation of $I(\bar{q})$; denoting the coefficients of y and τ by A and B, resp.

$$\int_{-\infty}^{w}\Phi(By - A\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{w}\left(\int_{-\infty}^{By-A\tau} e^{-\frac{u^2}{2}}du\right)e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau =$$

$$= \frac{B}{2\pi}\int_{-\infty}^{w}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{B^2}{2}\left(u^2 - 2\frac{A}{B}u\tau + \tau^2\right)}du\,d\tau.$$

From this we have the relation (3.1) and the expression of ϱ.

§ 4. The asymptotic normality of the distribution P_k

In this § we shall use of our previous assumptions

$$\mathbf{M}(\xi) = 0\,, \quad \mathbf{M}(\xi^2) = \mathbf{D}^2(\xi) = 1\,.$$

Let us denote by q_0 the quantile corresponding to the expectation $\mathbf{M}(\xi) = 0$, i.e.

$$q_0 = F(\mathbf{M}(\xi)) = F(0)\,.$$

Let further be

$$m_0 = \mathbf{M}(\xi \mid \xi < 0) = \frac{1}{q_0} \int_{-\infty}^{0} u f(u)\, du\,.$$

In order to obtain for the probabilities $P_k = \mathbf{P}(\bar{\xi} < \xi_k^*)$ a reasonable limiting distribution let $q \to q_0$ according to $\frac{k}{n} = q = q_0 + \frac{x}{\sqrt{n}}$.

In this case we obtain the following relations

$$m = m(q) = m_0 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$$t = t(q) = \frac{x}{f(0)\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$$f(t) = f(0) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Substituting $z = -1$, $\omega = +\infty$ and

$$y = \frac{t}{\sqrt{1 - 2\frac{mq}{f(t)} + \sigma^2}} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{q_0(1-q_0) + 2\,q_0\, m_0 f(0) + f(0)^2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

in (3.1) we obtain for large n the asymptotic relation

$$\mathbf{P}(\bar{\xi} < \xi_k^*) \sim \Phi\left(x\, \frac{1}{\sqrt{q_0(1-q_0) + 2\, m_0\, q_0 f(0) + f(0)^2}}\right).$$

Denoting by $\varkappa_n = \varkappa$ the random variable for which the event $(\xi_{\varkappa-1}^* \leq \bar{\xi} < \xi_\varkappa^*)$ occurs, the relation

$$\mathbf{P}(\varkappa_n < k+1) = \mathbf{P}(\bar{\xi} < \xi_k^*)$$

holds and we obtain

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\frac{\varkappa_n}{n} - q_0}{\frac{1}{\sqrt{n}}} < x\right) = \Phi\left(x\,\frac{1}{\sqrt{q_0(1-q_0) + 2\,m_0\,q_0\,f(0) + f(0)^2}}\right).$$

and hence

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\varkappa_n - nq_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)+2\,m\,q_0\,f(0)+f(0)^2}} < y\sqrt{n}\right) = \Phi(y)\,. \tag{4.1}$$

We show now that this theorem can be extended for the case $f(0) = 0$ under the assumption that $f(x)$ is continuous in a neighbourhood of the origin.

In this case we obtain the simple form

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\varkappa_n - nq_0}{\sqrt{q_0(1-q_0)}} < y\sqrt{n}\right) = \Phi(y)\,.$$

This means that $\varkappa_n$ has the same limiting distribution as the variate $\overline{\varkappa}_n$ defined by the relation[3]

$$\xi^*_{\varkappa-1} < \mathbf{M}(\xi) < \xi^*_{\varkappa}\,.$$

Proof. By virtue of the central limit theorem we can find a positive constant K such that for sufficiently large n $\mathbf{P}\left(|\bar{\xi}| > \frac{K}{\sqrt{n}}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$, but in this case

$$\mathbf{P}\left(\xi^*_k > \frac{K}{\sqrt{n}},\ |\bar{\xi}| > \frac{K}{\sqrt{n}}\right) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{too.} \tag{4.2}$$

Since

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F\left(\frac{K}{\sqrt{n}}\right) - F\left(-\frac{K}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{\frac{q(1-q)}{\sqrt{n}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\,Kf\left(\frac{K}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{q(1-q)}} = 0$$

moreover, $F(\xi^*_k)$ is asymptotically normally distributed with parameters q, $\frac{q(1-q)}{n}$, therefore for sufficiently large n

$$\mathbf{P}\left(|\xi^*_k| < \frac{K}{\sqrt{n}}\right) = \mathbf{P}\left(F\left(-\frac{K}{\sqrt{n}}\right) < F(\xi^*_k) < F\left(\frac{K}{\sqrt{n}}\right)\right) < \frac{\varepsilon}{2}\,, \tag{4.3}$$

---

[3] This remark is due to A. Rényi.

i.e. it follows from (4.2) and (4.3) that

$$\mathbf{P}(|\xi_k^*| < |\bar{\xi}|) < \varepsilon .$$

This proves that

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|\xi_k^*| < |\bar{\xi}|) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|\xi_k^*| < 0).$$

i.e. $\varkappa_n$ and $\bar{\varkappa}_n$ have the same limiting distribution.

Consider now the special case of (4.1) when ξ is exponentially distributed in the interval $(-1, \infty)$, i.e.

$$F(x) = 1 - e^{-(x+1)} .$$

Then $\mathbf{M}(\xi) = 0$, $q_0 = 1 - e^{-1}$, $m_0 = (e - 1)^{-1}$ and we have

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\varkappa_n - n\dfrac{e-1}{e}}{\dfrac{1}{e}\sqrt{n(e-2)}} < y\right) = \Phi(y) .$$

This agrees with the known limiting form of the occupancy distribution [5, 6].

(Received June 6, 1961)

REFERENCES

[1] RÉNYI, A.: *Valószínűségszámítás.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.

[2] ABEL, N. H.: *Oeuvres Complètes.* C. Groendahl, Christiania, 1839. Vol. 1., p. 102.

[3] JORDAN, C.: *Calculus of finite differences.* Eggenberger, Budapest, 1939.

[4] PEARSON, E. S. and HARTLEY, H. O. (eds.): *Biometrika Tables for Statisticians,* I. Cambridge University Press, 1954.

[5] SCHÄFER, W.: „Das Mutungsproblem der Besetzungs-Verteilung." *Mitteilungsblatt für mathematische Statistik* **6** (1954) 1—38.

[6] RÉNYI, A.: "Some remarks on the theory of trees." *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences* **4** (1959) 73—85.

[7] WILKS, S. S.: "Order statistics". *Bulletin of the American Mathematical Society* **54** (1948) 6—50.

[8] CRAMÉR, H.: *Mathematical methods of statistics.* Princeton University Press, 1946.

[9] NICHOLSON, W. L.: "Occupancy probability distribution critical points". *Biometrika* **48** (1961) 175—181.

[10] DAVID, H. T.: "On sample mean among the moderate order statistics." *Annals of Mathematical Statistics* **33** (1962) 1160—1166.

МЕСТО ВЫБОРОЧНОГО СРЕДНЕГО СРЕДИ ЭЛЕМЕНТОВ ВАРИДЦИОННОГО РЯДА

K. SARKADI, E. SCHNELL и I. VINCZE

Резюме

Авторы в своей статье занимаются следующей проблемой:

Пусть будут $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимые элементы выборки из некоторого совокупности с непрерывным распределением, спрашивается, какая вероятность того, что выборочное среднее

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

попадет между $(k-1)$-ым и k-ым елементом вариационного ряда, иными словами, надо определить вероятности

$$p_k = \mathbf{P}(\xi^*_{k-1} \leqq \bar{\xi} \leqq \xi^*_k)\,.$$

где через ξ^*_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ обозначается k-тый элемент вариационного ряда. Удалось определить в явном виде вероятности p_k для случая экспоненциального распределения; в § 1 при помощи аддитивного Марковского свойства вариационного ряда следующая формула:

$$p_k = \frac{\binom{n}{k-1}(k-1)\,!}{n^{n-1}} \mathfrak{S}^{k-1}_{n-1} \tag{1.6}$$

где через $\mathfrak{S}^k_n$ обозначается так называемое Стирлинговое число второго рода.

Распределение, характеризуемое формулой (1.6) является частным случаем распределения занятия (см. напр. [5]).

С использованием этого факта авторы в § 2 вторично доказывают формулу (1.6). Сущность этого доказательства следующая: Задается такое преобразование с сохранением меры, которое последовательность $0 \leqq \eta_1 \leqq \leqq \eta_2 \leqq \ldots \leqq \eta_{n-1} < 1$ преобразует в последовательность $0 = \eta'_0 \leqq \eta'_1 \leqq \leqq \eta'_2 \leqq \ldots \leqq \eta'_{n-1} < \eta'_n = 1$ таким образом, что неравнество $\eta'_i - \eta'_{i-1} < < 1/n$ имеет силу тогда и только тогда, если среди чисел $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{n-1}$ по крайней мере одно попадает в интервал $\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$.

В § 3—4 доказывается относительно общего случая при некоторых слабых допущениях, что предельным распределением является Гауссовое распределение.

CONVERGENCE IN MODIFIED (0,2) INTERPOLATION

by

R. B. SAXENA[1]

1. In an earlier work [6] I solved an interpolation problem of degree $2n+1$ atmost which consists in finding unique polynomial

$$(1.1)\qquad R_n(x,f)=\sum_{\nu=1}^{n} f(x_{\nu n})\, r_{\nu n}(x)+\sum_{\nu=1}^{n} f''(x_{\nu n})\, \varrho_{\nu n}(x)+\gamma_{1n}\,\sigma_{1n}(x)+\gamma_{nn}\,\sigma_{nn}(x)\,,$$

of degree $\leqq 2n+1$ which takes at n points $x_{\nu n}$, the given values $f(x_{\nu n})$, whose second derivative takes at the same points the values $f''(x_{\nu n})$ and the third derivative takes at the points x_{1n} & x_{nn} the arbitrary values γ_{1n} and γ_{nn} respectively. In this inhomogeneous[2] case of Lacunary interpolation, the problem has been solved by choosing the points $x_{\nu n}$ as the real zeros of

$$(1.2)\qquad \pi_n(x)=-\,n(n-1)\int_{-1}^{x} P_{n-1}(x)\,dx\equiv(1-x^2)\,P'_{n-1}(x)$$

where $P_{n-1}(x)$ denotes the $(n-1)$ th Legendre polynomial and the unique polynomial exists only when n is even.[3] For the explicit expression of this polynomial we have the form (1.1) where $r_{\nu n}(x)$, $\varrho_{\nu n}(x)$, $\sigma_{1n}(x)$ and $\sigma_{nn}(x)$[4] are uniquely determined polynomials each of degree $2n+1$. We give in § 4 the expressions of these fundamental polynomials as obtained in [6].

In this paper I propose to solve the convergence of the interpolation process. However we shall prove the following

Theorem. *Let $f''(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha\left(\alpha>\frac{1}{2}\right)$ in $[-1,+1]$ and the numbers γ_1 and γ_n satisfy*

$$(1.3)\qquad \gamma_1=o(n^4)\,,\qquad \gamma_n=o(n^4)\,.$$

Then the sequence $R_n(x,f)$ converges uniformly to $f(x)$ in $[-1,+1]$.

The proof of the theorem mainly depends upon the estimation of the fundamental polynomials $r_\nu(x)$, $\varrho_\nu(x)$; $\sigma_1(x)$ and $\sigma_n(x)$. In § 2 we mention these estimations in the form of lemmas, the proof of which have been given

---

[1] Mathematics Department. University of Lucknow (India).

[2] The homogeneous case of this process will be (0, 2, 3)-interpolation where the third derivative is also prescribed at all the n points.

[3] Throughout this paper we shall take n to be even.

[4] If no ambiguity arises, we shall further write x_ν for $x_{\nu n}$, $r_\nu(x)$ for $r_{\nu n}(x)$ and so on.

in §§ 6—8. Further we prove an important lemma on approximating polynomial and thus in § 3 we complete the proof of the Theorem.

2. For the estimation of the fundamental polynomials we have the following lemmas:

Lemma 2.1. *For* $n = 4, 6, \ldots$ *and* $-1 \leqq x \leqq +1$,

$$|r_1(x)| \leqq n^2, \qquad |r_n(x)| \leqq n^2; \tag{2.1}$$

$$|r_\nu(x)| \leqq 681\,\pi \frac{n^2}{\sqrt{\nu}}, \qquad 2 \leqq \nu \leqq \tfrac{1}{2} n,$$

$$|r_\nu(x)| \leqq 681\,\pi \frac{n^2}{\sqrt{n-\nu}}, \qquad \tfrac{1}{2} n < \nu \leqq n - 1. \tag{2.2}$$

Lemma 2.2. *For* $n = 4, 6, \ldots$ *and* $-1 \leqq x \leqq +1$,

$$|\varrho_1(x)| \leqq \frac{10}{3\sqrt{2\pi}} n^{-\frac{3}{2}}, \qquad |\varrho_n(x)| \leqq \frac{10}{3\sqrt{2\pi}} n^{-\frac{3}{2}}; \tag{2.3}$$

$$|\varrho_\nu(x)| \leqq 39\,\pi \frac{\nu^{3/2}}{n^2}, \qquad 2 \leqq \nu \leqq \tfrac{1}{2} n,$$

$$|\varrho_\nu(x)| \leqq 39\,\pi \frac{(n-\nu)^{3/2}}{n^2}, \qquad \tfrac{1}{2} n < \nu \leqq n - 1. \tag{2.4}$$

Lemma 2.3. *For* $n = 4, 6, \ldots$ *and* $-1 \leqq x \leqq +1$,

$$|\sigma_1(x)| \leqq \frac{7}{18\sqrt{\pi}} n^{-4}, \qquad |\sigma_n(x)| \leqq \frac{7}{18\sqrt{\pi}} n^{-4}. \tag{2.5}$$

We shall further prove the[5]

Lemma 2.4. *Let* $f''(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ *in* $[-1, 1]$, *then there is a sequence of polynomials* $\{\Phi_n(x)\}$ *of degree n atmost with the following properties:*

$$|f(x) - \Phi_n(x)| \leqq \frac{C_1}{n^{2+\alpha}} \left\{ (\sqrt{1-x^2})^{2+\alpha} + \frac{1}{n^{2+\alpha}} \right\}, \tag{2.6}$$

$$|f''(x) - \Phi_n''(x)| \leqq \frac{C_2}{n^2} \left\{ (\sqrt{1-x^2})^{\alpha} + \frac{1}{n^{\alpha}} \right\}, \tag{2.7}$$

and

$$|\Phi_n'''(x)| \leqq c_3\, n^{2-2\alpha} \tag{2.8}$$

uniformly in $x \in [-1, 1]$ *where* C_1, C_2, C_3 *are positive numerical constants.*[6]

---

[5] The author is deeply indebted to Prof. G. Freud for the helpful suggestions in the proof of this lemma.

[6] In what follows $C_1, C_2, \ldots$ denote numerical positive constants.

Proof. For the proof of this lemma (2.6) is the particular case of the theorem of DZYADYK while (2.7) and (2.8) are the consequences of (2.6).

To prove (2.7) we define the numbers

$$n_i = 2^i n \qquad (i = 0, 1, 2, \dots). \tag{2.9}$$

Then we have

$$\begin{aligned} f(x) &= \Phi_n(x) + [\Phi_{2^1 n}(x) - \Phi_{2^0 n}(x)] + \dots + [\Phi_{2^{i+1}n}(x) - \Phi_{2^i n}(x)] + \dots \\ &= \Phi_n(x) + U_{2^1 n}(x) + \dots + U_{2^{i+1}n}(x) + \dots \end{aligned} \tag{2.10}$$

where

$$U_{2^{i+1}n}(x) = \Phi_{2^{i+1}n}(x) - \Phi_{2^i n}(x), \qquad i = 0, 1, 2 \dots \tag{2.11}$$

From (2.11) we have owing to (2.6)

$$\begin{aligned} |U_{2^{i+1}n}(x)| &\leq |\Phi_{2^{i+1}n}(x) - \Phi_{2^i n}(x)| \\ &\leq |\Phi_{2^{i+1}n}(x) - f(x)| + |f(x) - \Phi_{2^i n}(x)| \\ &\leq \frac{2^{\alpha+3} C_1}{(2^i n)^{2+\alpha}} \left\{ (\sqrt{1-x^2})^{2+\alpha} + \frac{1}{(2^{i+1} n)^{2+\alpha}} \right\}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Applying the inequality of DZYADYK to (2.12) we have

$$|U''_{2^{i+1}n}(x)| \leq \frac{2^{\alpha+5} C_4 C_1}{(2^i n)^\alpha} \left\{ (\sqrt{1-x^2})^\alpha + \frac{1}{(2^{i+1} n)^\alpha} \right\}. \tag{2.13}$$

Now from (2.10) we have

$$\begin{aligned} f''(x) &= \Phi''_n(x) + U''_{2^1 n}(x) + \dots + U''_{2^{i+1}n}(x) + \dots \\ &= \Phi''_n(x) + \sum_{i=0}^{\infty} U''_{2^{i+1}n}(x). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Therefore from (2.13) and (2.14) we have

$$|f''(x) - \Phi''_n(x)| \leq \frac{C_2}{n^\alpha} \left\{ (\sqrt{1-x^2})^\alpha + \frac{1}{n^\alpha} \right\}. \tag{2.15}$$

To prove (2.8) we define the numbers

$$\begin{aligned} n_0 = n, \dots, n_{j+1} &= \left[\frac{n_j}{2}\right], \dots, n_r = 1 \\ r &= \left[\frac{\log n}{\log 2}\right] + 1. \end{aligned} \tag{2.16}$$

So that

$$\Phi_n(x) = \sum_{j=0}^{r-1} \left(\Phi_{n_j}(x) - \Phi_{n_{j+1}}(x)\right) + \Phi_1(x). \tag{2.17}$$

Using (2.6) we get

$$|\Phi_{n_j}(x) - \Phi_{n_{j+1}}(x)| \leqq \frac{C_5 C_1}{n_j^{2+\alpha}} \left\{ (\sqrt{1-x^2})^{\alpha+2} + \frac{1}{n_j^{2+\alpha}} \right\}.$$

Applying again the inequality of DZYADYK we have

$$|\Phi'''_{n_j}(x) - \Phi'''_{n_{j+1}}(x)| \leqq C_6 C_1 n_j^{1-\alpha} \{ (\sqrt{1-x^2})^{-1+\alpha} + n_j^{1-\alpha} \}$$

$$\leqq C_7 \left(\frac{n}{2^j} \right)^{2-2\alpha}.$$

Hence from (2.17)

$$|\Phi'''_n(x)| \leqq \sum_{j=0}^{r-1} C_7 \left(\frac{n}{2^j} \right)^{2-2\alpha}. \leqq C_3 n^{2-2\alpha}.$$

3. The proof of the theorem. We now apply the usual argument. We have $R_n(x, f)$ our interpolating polynomial and $\Phi_n(x)$ an arbitrary polynomial of atmost degree n. Then there holds

$$R_n(x, f) - f(x) = R_n(x, f - \Phi_n) + \Phi_n(x) - f(x). \tag{3.1}$$

From (1.1) and (2.6) we get

$$R_n(x, f) - f(x) = \sum_{\nu=1}^{n} [f(x_\nu) - \Phi_n(x_\nu)] r_\nu(x) + \tag{3.2}$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n} [f''(x_\nu) - \Phi''_n(x_\nu)] \varrho_\nu(x) + [r_1 - \Phi'''_n(1)] \sigma_1(x) + [r_n - \Phi'''_n(-1)] \sigma_n(x) + o(1).$$

Owing to (2.1), (2.2), (5.11) and (2.6) we have

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{n}{2}} [f(x_\nu) - \Phi_n(x_\nu)] r_\nu(x) = O(n^{-2-2\alpha}) + \sum_{\nu=2}^{\frac{n}{2}} O(n^{-2-2\alpha}) \frac{\nu^{2+\alpha}}{n^{2+\alpha}} O(n^2) \nu^{-\frac{1}{2}} \tag{3.3}$$

$$= O(n^{-2-2\alpha}) + O(n^{-2-2\alpha}) \sum_{\nu=2}^{\frac{n}{2}} \nu^{\frac{3}{2}+\alpha}$$

$$= O(n^{\frac{1}{2}-\alpha}) = o(1) \qquad \left(\alpha > \frac{1}{2}\right)$$

and from (2.3), (2.4), (5.11) and (2.7)

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{n}{2}} [f''(x_\nu) - \Phi''_n(x_\nu)] \varrho_\nu(x) = O(n^{-\frac{3}{2}-2\alpha}) + \sum_{\nu=2}^{\frac{n}{2}} O(n^{-\alpha}) \frac{\nu^\alpha}{n^\alpha} O(n^{-2}) \nu^{\frac{3}{2}}$$

$$= O(n^{-\frac{3}{2}-2\alpha}) + O(n^{-2-2\alpha}) \sum_{\nu=2}^{\frac{n}{2}} \nu^{\frac{3}{2}+\alpha} \tag{3.4}$$

$$= O(n^{\frac{1}{2}-\alpha}) = o(1) \qquad \left(\alpha > \frac{1}{2}\right).$$

Finally from (1.3), (2.5) and (2.8) we have

$$(3.5)\qquad [\gamma_1 - \Phi_n'''(1)]\,\sigma_1(x) = o(1)\,.$$

In the same way we can obtain

$$(3.6)\qquad \sum_{\nu=\frac{n}{2}+1}^{n} [f(x_\nu) - \Phi_n(x_\nu)]\, r_\nu(x) = o(1)\,,$$

$$(3.7)\qquad \sum_{\nu=\frac{n}{2}+1}^{n} [f''(x_\nu) - \Phi_n''(x_\nu)]\, \varrho_\nu(x) = o(1)$$

and

$$(3.8)\qquad [\gamma_n - \Phi_n'''(-1)]\,\sigma_n(x) = o(1)\,.$$

Thus (3.1) and (3.2) — (3.8) complete the proof of the theorem.

Expressions and estimations of the fundamental polynomials

4. Here we shall give the forms of the fundamental polynomials which we have found in [6]. They are given by[7]:

(a)

$$\sigma_1(x) = -\frac{\pi_n(x)}{6n^2(n-1)^2}\left[\int_{-1}^{x}\left(x^2 + \frac{24}{7n^2-7n+10}x - 1\right)P_{n-1}'(x)\,dx - \right.$$

$$(4.1)\qquad \left. - \frac{48}{7n^2-7n+10}\right],$$

$$\sigma_n(x) = -\frac{\pi_n(x)}{6n^2(n-1)^2}\left[\int_{-1}^{x}\left(x^2 - \frac{24}{7n^2-7n+10}x - 1\right)P_{n-1}'(x)\,dx + \right.$$

$$(4.2)\qquad \left. + \frac{48}{7n^2-7n+10}\right].$$

(b)

$$\varrho_1(x) = \frac{\pi_n(x)}{36n^2(n-1)^2}\left[\int_{-1}^{x}\left\{(5n^2-5n-4)x^2 + \frac{36(n-2)(n+1)}{7n^2-7n+10}x - \right.\right.$$

$$(4.3)\qquad \left.\left. -(5n^2-5n+8)\right\}P_{n-1}'(x)\,dx + \frac{48(5n^2-5n+2)}{7n^2-7n+10}\right],$$

$$\varrho_n(x) = -\frac{\pi_n(x)}{36n^2(n-1)^2}\left[\int_{-1}^{x}\left\{(5n^2-5n-4)x^2 - \frac{36(n-2)(n+1)}{7n^2-7n+10}x - \right.\right.$$

$$(4.4)\qquad \left.\left. -(5n^2-5n+8)\right\}P_{n-1}'(x)\,dx + \frac{24(17n^2-17n+14)}{7n^2-7n+10}\right]$$

[7] There has been some printing mistakes in [6] in the constants occurring in the expressions for the fundamental polynomials which have been corrected here.

and for $2 \leqq \nu \leqq n-1$,

$$\varrho_\nu(x) = \frac{\pi_n(x)}{2\pi_n'(x_\nu)P_{n-1}''(x_\nu)} \left[\int_{-1}^{x} \frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_\nu}\, dt + \right.$$

$$\left. + \int_{-1}^{x} (a_1 t^2 + a_2 t + a_3)\, P_{n-1}'(t)\, dt + a_4 \right] \tag{4.5}$$

where

$$a_1 = \frac{x_\nu(1+x_\nu^2)}{(1-x_\nu^2)^2} - \frac{7n^2-7n-2}{72(1-x_\nu^2)\, P_{n-1}(x_\nu)} \tag{4.6}$$

$$a_2 = -\frac{1}{1-x_\nu^2} + \frac{24}{(7n^2-7n+10)\,(1-x_\nu^2)^2} \tag{4.7}$$

$$a_3 = \frac{7n^2-7n+22}{72(1-x_\nu^2)\, P_{n-1}(x_\nu)} - \frac{3-x_\nu^2}{(1-x_\nu^2)^2} \tag{4.8}$$

$$a_4 = \frac{2}{3(1-x_\nu^2)\, P_{n-1}(x_\nu)} - \frac{48}{(7n^2-7n+10)\,(1-x_\nu^2)^2}\,. \tag{4.9}$$

(c)

$$r_1(x) = \frac{3+x}{4} l_1^2(x) - \frac{1-x^2}{4} l_1(x)\cdot l_1'(x) + \pi_n(x)\, \Big[\int_{-1}^{x} k_1 t^2 + \tag{4.10}$$

$$+ k_2 t + k_3)\, P_{n-1}'(t)\, dt + k_4\Big]$$

$$r_n(x) = \frac{3-x}{4} l_n^2(x) + \frac{1-x^2}{4} l_n(x)\cdot l_n'(x) + \pi_n(x)\, \Big[\int_{-1}^{x} (-k_1 t^2 + \tag{4.11}$$

$$+ k_2 t - k_3)\, P_{n-1}'(t)\, dt + k_5\Big]$$

where

$$k_1 = \frac{1}{32} + \frac{n^2-n+2}{32\, n^2(n-1)^2} - \frac{51 n^4 - 102 n^3 + 103 n^2 - 52 n - 20}{2304\, n(n-1)}\,, \tag{4.12}$$

$$k_2 = \frac{1}{7n^2-7n+10} \times \tag{4.13}$$

$$\times \left[\frac{3}{4} + \frac{19 n^4 - 38 n^3 - 25 n^2 + 44 n + 12}{96\, n(n-1)} - \frac{3n^2-3n+6}{4 n^2(n-1)^2}\right]$$

$$k_3 = -\frac{1}{32} - \frac{n^2-n+2}{32\, n^2(n-1)^2} + \frac{51 n^4 - 102 n^3 + 343 n^2 - 292 n + 76}{2304\, n(n-1)} \tag{4.14}$$

$$(4.15)\qquad k_4 = \frac{1}{7n^2 - 7n + 10} \times$$

$$\times \left[-\frac{3}{2} + \frac{51n^4 - 102n^3 + 223n^2 - 172n + 28}{48n(n-1)} + \frac{3n^2 - 3n + 6}{2n^2(n-1)^2} \right]$$

$$(4.16)\qquad k_5 = \frac{1}{7n^2 - 7n + 10} \times$$

$$\times \left[-\frac{3}{2} + \frac{121n^4 - 242n^3 + 421n^2 - 300n + 68}{48n(n-1)} + \frac{3n^2 - 3n + 6}{2n^2(n-1)^2} \right]$$

and for $2 \leqq \nu \leqq n-1$,

$$(4.17)\qquad r_\nu(x) = l_\nu^2(x) + \frac{\pi_n(x)}{\pi_n'(x_\nu)} \left[\int_x^1 \frac{l_\nu'(t)}{t - x_\nu}\,dt + \int_{-1}^x (d_1t^2 + d_2t + d_3)\,P_{n-1}'(t)dt + d_4 \right]$$

where

$$(4.18)\qquad d_1 = \frac{1}{2\pi_n'(x_\nu)} \left\{ \frac{1}{(1+x_\nu)^3} - \frac{1}{(1-x_\nu)^3} \right\} + \frac{7n^2 - 7n - 2}{144(1 - x_\nu^2)\,P_{n-1}^2(x_\nu)}$$

$$(4.19)\qquad d_2 = \frac{12}{(7n^2 - 7n + 10)\,\pi_n'(x_\nu)} \left\{ \frac{1}{(1-x_\nu)^3} + \frac{1}{(1+x_\nu)^3} \right\}$$

$$(4.20)\qquad d_3 = -\frac{1}{\pi_n'(x_\nu)} \left\{ \frac{1}{(1+x_\nu)^3} - \frac{1}{(1-x_\nu)^3} \right\} - \frac{7n^2 - 7n + 22}{144(1 - x_\nu^2)\,P_{n-1}^2(x_\nu)}$$

$$(4.21)\qquad d_4 = \frac{24}{(7n^2 - 7n + 10)\,\pi_n'(x_\nu)} \left\{ \frac{1}{(1+x_\nu)^3} + \frac{1}{(1-x_\nu)^3} \right\} +$$

$$+ \frac{2}{3(1 - x_\nu^2)\,P_{n-1}^2(x_\nu)}\,.$$

In the above expression, $l_\nu(x)$ denotes the fundamental polynomials of Lagrange interpolation based on our x_ν-points and have for it the expression

$$(4.22)\qquad l_\nu(x) = \frac{\pi_n(x)}{(x - x_\nu)\,\pi_n'(x_\nu)}\,.$$

5. Before actually go to estimate the fundamental polynomials, we evaluate the integral

$$(5.1)\qquad I = \int_{-1}^{x} (at^2 + bt + c)\,P_{n-1}'(t)\,dt$$

in some convenient form which we shall later use for the estimation purposes.

On integrating by parts we have

$$(5.2)\qquad I = (ax^2 + bx + c)\, P_{n-1}(x) + (a - b + c) - \int_{-1}^{x} (2\,at + b)\, P_{n-1}(t)\, dt.$$

The well-known recurrence relations for the Legendre polynomials give

$$(5.3)\qquad P_n(x) = \frac{1}{2\,n + 1}\,[P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)]$$

and

$$(5.4)\qquad xP_{n-1}(x) = \frac{n}{4\,n^2 - 1}\, P'_{n+1}(x) + $$

$$+ \frac{P'_{n-1}(x)}{(2\,n+1)\,(2\,n-3)} - \frac{n-1}{(2\,n-1)\,(2\,n-3)}\, P'_{n-3}(x)\,.$$

Thus from (5.3), (5.4) and (5.2) on actual integration we have

$$(5.5)\qquad I = (ax^2 + bx + c)\, P_{n-1}(x) + (a - b + c) -$$

$$- 2\,a \left[\frac{n}{4\,n^2 - 1}\, P_{n+1}(x) + \frac{1}{(2\,n+1)\,(2\,n-3)}\, P_{n-1}(x) - \right.$$

$$\left. - \frac{n-1}{(2\,n-1)\,(2\,n-3)}\, P_{n-3}(x)\right] - \frac{b}{2\,n-1}\,[P_n(x) - P_{n-2}(x)] -$$

$$- 2\,a \left[\frac{n}{4\,n^2 - 1} - \frac{n-1}{(2\,n-1)\,(2\,n-3)} + \frac{1}{(2\,n+1)\,(2\,n-3)}\right].$$

Further we shall, in the following, mention few well-known results which we shall repeatedly make use of.

For $-1 \leqq x \leqq 1$

$$(5.6)\qquad |\, P_m(x)\,| \leqq 1\,,$$

S. Bernstein inequalities [3, p. 201.]

$$(5.7)\qquad |\,P_m(x)| \leqq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{\sqrt{m}\,\sqrt[4]{1 - x^2}}\,;$$

$$(5.8)\qquad (1 - x^2)^{\frac{3}{4}}\, |\,P'_{n-1}(x)\,| \leqq \sqrt{2\,n}$$

$$(5.9)\qquad |\pi_n(x)| \leqq \sqrt{\frac{2\,n}{\pi}}$$

and the differential equation:

$$(5.10)\qquad (1 - x^2)\, P''_m(x) - 2\,x\, P'_m(x) + m(m+1)\, P_m(x) = 0\,.$$

We have further for $n = 4, 6, \ldots; \nu = 2, 3, \ldots, \frac{n}{2}$

$$(5.11)\qquad \begin{gathered}(1 - x_\nu^2) > \frac{\nu^2}{4(n-1)^2} \quad [2, \text{p. } 207]\\ c_8 \frac{\nu}{n} \leqq (1 - x_\nu^2)^{\frac{1}{2}} \leqq c_9 \frac{\nu}{n}, \quad [4, \text{p } 339]\end{gathered}$$

$$(5.12)\qquad |P_{n-1}(x_\nu)| \geqq \frac{1}{\sqrt{8\nu\pi}}, \quad [2, \text{p. } 202].$$

Lastly for the polynomials $l_j(x)$, Fejér's beautiful result:

$$(5.13)\qquad l_j^2(x) \leqq \sum_{\nu=1}^{n} |l_j^2(x)| \leqq 1 \quad (-1 \leqq x \leqq 1; j = 1, \ldots, n).$$

6. Proof of Lemma 2.1. For estimating the quantity $|r_\nu(x)|$ $(2 \leqq \leqq \nu \leqq n-1)$, we find that the form (4.17) does not suit to our purpose and we shall have to choose some alternative forms which are very easily obtained by using the relations [1, p. 208 and p. 211]

$$(6.1)\quad \int_{-1}^{+1} \frac{P'_{n-1}(t)}{t - x_\nu} dt = \frac{2x_\nu}{1 - x_\nu^2} - \frac{2}{1 - x_\nu^2} \cdot \frac{1}{P_{n-1}(x_\nu)} \quad (\nu = 2, 3, \ldots, n-1; n \text{ even})$$

and

$$(6.2)\qquad \int_{-1}^{+1} \frac{l'_\nu(t)}{t - x_\nu} dt = -\frac{1}{(1 - x_\nu^2) P_{n-1}^2(x_\nu)} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n-1).$$

Thus we have

$$r_\nu(x) = l_\nu^2(x) - \frac{\pi_n(x)}{\pi'_n(x_\nu)} \int_{+1}^{x} \frac{l'_\nu(t)}{t - x_\nu} dt + \frac{\pi_n(x)}{\pi'_n(x_\nu)} \int_{-1}^{x} (d_1 t^2 + d_2 t + d_3) P'_{n-1}(t)\, dt +$$
$$+ \frac{\pi_n(x)}{\pi'_n(x_\nu)} \left[\frac{24}{(7n^2 - 7n + 10)\pi'_n(x_\nu)} \left\{ \frac{1}{(1 + x_\nu)^3} + \frac{1}{(1 - x_\nu)^3} \right\} + \right.$$
$$(6.3)\quad \left. + \frac{2}{3(1 - x_\nu^2) P_{n-1}^2(x_\nu)} \right]$$

and

$$r_\nu(x) = l_\nu^2(x) - \frac{\pi_n(x)}{\pi'_n(x_\nu)} \int_{-1}^{x} \frac{l'_\nu(t)}{t - x_\nu} dt + \frac{\pi_n(x)}{\pi'_n(x_\nu)} \int_{-1}^{x} (d_1 t^2 + d_2 t + d_3) P'_{n-1}(t)\, dt +$$
$$+ \frac{\pi_n(x)}{\pi'_n(x_\nu)} \left[\frac{24}{(7n^2 - 7n + 10)\pi'_n(x_\nu)} \left\{ \frac{1}{(1 + x_\nu)^3} + \frac{1}{(1 - x_\nu^3)} \right\} + \right.$$
$$(6.4)\quad \left. + \frac{1}{3(1 - x_\nu^2) P_{n-1}^2(x_\nu)} \right].$$

On integrating by parts and using $l_\nu(\pm 1) = 0$, we have for these forms:

$$r_\nu(x) = \frac{\pi_n(x)}{\pi_n'(x_\nu)} \int_1^x \frac{l_\nu(t)}{(t-x_\nu)^2}\,dt + \frac{\pi_n(x)}{\pi_n'(x_\nu)} \int_{-1}^x (d_1 t^2 + d_2 t + d_3) P_{n-1}'(t)\,dt + \tag{6.5}$$

$$+ \frac{\pi_n(x)}{\pi_n'(x_\nu)} \left[\frac{24}{(7n^2 - 7n + 10)\pi_n'(x_\nu)} \left\{ \frac{1}{(1+x_\nu)^3} + \frac{1}{(1-x_\nu)^3} \right\} + \frac{2}{3(1-x_\nu^2) P_{n-1}^2(x_\nu)} \right]$$

for $x_\nu < x$

and

$$r_\nu(x) = \frac{\pi_n(x)}{\pi_n'(x_\nu)} \int_{-1}^x \frac{l_\nu(t)}{(t-x_\nu)^2}\,dt + \frac{\pi_n(x)}{\pi_n'(x_\nu)} \int_{-1}^x (d_1 t^2 + d_2 t + d_3) P_{n-1}'(t)\,dt + \tag{6.6}$$

$$+ \frac{\pi_n(x)}{\pi_n'(x_\nu)} \left[\frac{24}{(7n^2 - 7n + 10)\pi_n'(x_\nu)} \left\{ \frac{1}{(1+x_\nu)^3} + \frac{1}{(1-x_\nu)^3} \right\} + \frac{1}{3(1-x_\nu^2) P_{n-1}^2(x_\nu)} \right]$$

for $x < x_\nu$.

For the proof of this lemma, we shall confine ourselves to the case $2 \leq \nu \leq \frac{n}{2}$.

Let $x < x_\nu$ then for (6.6) we write

$$r_\nu(x) = J_1 + J_2 + J_3 .$$

$$|J_1| \leq \left| \frac{\pi_n(x)}{\pi_n'(x_\nu)} \int_{-1}^x \frac{l_\nu(t)}{(t-x_\nu)^2}\,dt \right|$$

$$\leq \left| (x - x_\nu)\, l_\nu(t) \int_{-1}^x \frac{l_\nu(t)}{(t-x_\nu)^2}\,dt \right|$$

$$\leq |x - x_\nu| \int_{-\infty}^x \frac{dt}{(t-x_\nu)^2} \leq 1 . \tag{6.7}$$

$$|J_3| \leq \left| \frac{\pi_n(x)}{\pi_n'(x_\nu)} \left[\frac{24}{(7n^2 - 7n + 10)\pi_n'(x_\nu)} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left\{ \frac{1}{(1+x_\nu)^3} + \frac{1}{(1-x_\nu)^3} \right\} + \frac{1}{3(1-x_\nu^2) P_{n-1}^2(x_\nu)} \right] \right|$$

$$\leq \frac{96\sqrt{\dfrac{2n}{\pi}}}{n^2(n-1)^2(7n^2 - 7n + 10)} \cdot \frac{1}{(1-x_\nu^2)^3 P_{n-1}^2(x_\nu)} +$$

$$+ \frac{\sqrt{\dfrac{2n}{\pi}}}{3n(n-1)(1-x_\nu^2)\,|P_{n-1}^3(x_\nu)|}$$

which owing to (5.11) and (5.12) gives

$$|J_3| \leqq 2^{13}\pi\frac{\sqrt{n}}{\nu^5} + 2^8\pi\sqrt{\frac{n}{\nu}} < 2^{10}\pi\sqrt{\frac{n}{\nu}}. \tag{6.8}$$

For

$$J_2 = \frac{\pi_n(x)}{\pi_n'(x_\nu)}\int_{-1}^{x}(d_1 t^2 + d_2 t + d_3)\, P_{n-1}'(t)\, dt,$$

we use (5.5) for the values of d_1, d_2, d_3 given by (4.18), (4.19) and (4.20).

Since

$$d_1 + d_3 = -\frac{1}{6(1-x_\nu^2)\, P_{n-1}^2(x_\nu)},$$

$$J_2 = \frac{\pi_n(x)}{\pi_n'(x_\nu)}\Bigg[\left(d_1 x^2 + d_2 x - d_1 - \frac{1}{6(1-x_\nu^2)\,P_{n-1}^2(x_\nu)}\right)P_{n-1}(x) - d_2 -$$

$$- 2d_1\left\{\frac{n}{4n^2-1}P_{n+1}(x) + \frac{1}{(2n+1)(2n-3)}P_{n-1}(x) -\right.$$

$$\left. - \frac{n-1}{(2n-1)(2n-3)}P_{n-3}(x)\right\} - \frac{d_2}{2n-1}\{P_n(x) - P_{n-2}(x)\} -$$

$$- 2d_1\left\{\frac{n}{4n^2-1} - \frac{n-1}{(2n-1)(2n-3)} + \frac{1}{(2n+1)(2n-3)}\right\}\Bigg].$$

Using (5.6) we have

$$|J_2| \leqq \frac{2|\pi_n(x)||P_{n-1}(x)|}{n(n-1)|P_{n-1}(x_\nu)|}|d_1| + \frac{|\pi_n(x)||P_{n-1}(x)|}{6n(n-1)(1-x_\nu^2)|P_{n-1}^3(x_\nu)|} +$$

$$+ \frac{3|\pi_n(x)||d_2|}{n(n-1)|P_{n-1}(x_\nu)|} + \frac{2|\pi_n(x)||d_1|}{n^2(n-1)|P_{n-1}(x_\nu)|}.$$

Now using (5.7), (5.8) and (5.9) we get

$$|J_2| \leqq \frac{8}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{|d_1|}{n(n-1)|P_{n-1}(x_\nu)|} + \frac{2}{3\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{n(n-1)(1-x_\nu^2)|P_{n-1}^3(x_\nu)|} +$$

$$+ \frac{6}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{|d_2|}{\sqrt{n}(n-1)|P_{n-1}(x_\nu)|} + \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{|d_1|}{n^{3/2}(n-1)|P_{n-1}(x_\nu)|}.$$

Putting from (4.18) and (4.19), the values of d_1 and d_2 we get

$$|J_2| \leqq \frac{1}{\sqrt{2n}}\cdot\frac{10}{n(n-1)|P_{n-1}(x_\nu)|}\left\{\frac{4}{n(n-1)(1-x_\nu^2)^3|P_{n-1}(x_\nu)|} +\right.$$

$$\left. + \frac{n^2}{18(1-x_\nu^2)P_{n-1}^2(x_\nu)}\right\} + \frac{2}{3\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{n(n-1)(1-x_\nu^2)|P_{n-1}^3(x_\nu)|} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{144}{\sqrt{n}\,(n-1)^2 P_{n-1}^2(x_\nu)\,(1-x_\nu^2)^3}\leqq$$

$$\leqq\frac{5}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{n^2(n-1)^2(1-x_\nu^2)^3 P_{n-1}^2(x_\nu)}+\frac{7}{6\sqrt{2\pi}(1-x_\nu^2)\,|P_{n-1}^3(x_\nu)|}.$$

Finally from (5.11) and (5.12) we get

$$|J_2|\leqq 58\sqrt{2\pi}\,\frac{256\,n^2}{\nu^5}+\frac{7}{3}\pi\,\frac{32\,n^2}{\sqrt{\nu}}<616\pi\,\frac{n^2}{\sqrt{\nu}}. \tag{6.9}$$

The results (6.7), (6.8) and (6.9) give for $r_\nu(x)$, the estimation

$$|r_\nu(x)|\leqq 681\,\pi\,\frac{n^2}{\sqrt{\nu}}. \tag{6.10}$$

For $x > x_\nu$, this follows analogously, starting from (6.3) instead of (6.4). At $x = x_\nu$, the lemma obviously holds. Hence the part (2.2) of the lemma 2.1 is completed.

For proving the part (2.1) of the same lemma, we first need to estimate the quantity:

$$J_4\equiv\left|\pi_n(x)\int_{-1}^{x}(k_1 t^2+k_2 t+k_3)\,P'_{n-1}(t)\,dt+k_4\right|$$

with the values of k_1, k_2, k_3, and k_4 given by (4.12) — (4.15). The proof follows similar to that of J_2.

Here

$$k_1+k_3=\frac{1}{24\,n(n-1)}.$$

We have from (5.5)

$$|J_4|\leqq|\pi_n(x)|\,|P_{n-1}(x)|\,(|k_1|+|k_3|)+\frac{|\pi_n(x)|}{24\,n(n-1)}+$$

$$+|\pi_n(x)|\,(3|k_2|+|k_4|)+\frac{2}{n}|\pi_n(x)|\,|k_1|<$$

$$<\frac{6}{\sqrt{2\pi}}|k_1|+\frac{4}{\sqrt{2\pi}}|k_3|+3\sqrt{\frac{2n}{\pi}}\left(3|k_2|+|k_4|+\frac{1}{4}\right)$$

$$<\frac{5}{27\sqrt{2\pi}}\cdot n^2+\frac{19}{9\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{n}<\frac{n^2}{4\sqrt{2\pi}}. \tag{6.11}$$

We now have from (4.10), owing to (5.13)

$$|r_1(x)|\leqq 1+\frac{1-x^2}{4}\,|l_1'(x)|+\frac{n^2}{4\sqrt{2\pi}},$$

which on using Markov's inequality gives:

$$|r_1(x)| < n^2.$$

Similarly we can prove the result for $r_n(x)$.

7. Proof of lemma 4.2. Again we require some alternative forms of $\varrho_\nu(x)$. From (6.1), we have

$$\varrho_\nu(x) = \frac{\pi_n(x)}{2\pi_n'(x_\nu)P_{n-1}''(x_\nu)}\left[\int_{-1}^{x}\frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_\nu}dt + \int_{-1}^{x}(a_1t^2+a_2t+a_3)P_{n-1}'(t)\,dt + \right.$$

(7.1)
$$\left. + \left\{\frac{2}{3(1-x_\nu^2)P_{n-1}(x_\nu)} - \frac{48}{(7n^2-7n+10)(1-x_\nu^2)^2}\right\}\right]$$

and

$$\varrho_\nu(x) = \frac{\pi_n(x)}{2\pi_n'(x_\nu)P_{n-1}''(x_\nu)}\left[\int_{1}^{x}\frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_\nu}dt + \int_{-1}^{x}(a_1t^2+a_2t+a_3)P_{n-1}'(t)\,dt - \right.$$

(7.2)
$$\left. - \left\{\frac{2}{3(1-x_\nu^2)P_{n-1}(x_\nu)} + \frac{48}{(7n^2-7n+10)(1-x_\nu^2)^2} - \frac{2x_\nu}{1-x_\nu^2}\right\}\right].$$

For proving the part (2.4) it suffices to prove the first assertion. Let first be $x < x_\nu$. Then we use (7.1) and write

$$\varrho_\nu(x) = J_5 + J_6 + J_7. \tag{7.3}$$

For

$$J_7 = \frac{\pi_n(x)}{2\pi_n'(x_\nu)P_{n-1}''(x_\nu)}\left[\frac{2}{3(1-x_\nu^2)P_{n-1}(x_\nu)} - \frac{48}{(7n^2-7n+10)(1-x_\nu^2)^2}\right],$$

we have on using the differential equation (5.10)

$$|J_7| \leq \left|\frac{\pi_n(x)}{n^2(n-1)^2P_{n-1}^2(x_\nu)}\left\{\frac{1}{3P_{n-1}(x_\nu)} - \frac{24}{(7n^2-7n+10)(1-x_\nu^2)}\right\}\right| \leq$$

$$\leq \frac{|\pi_n(x)|}{3n^2(n-1)^2|P_{n-1}^3(x_\nu)|} + \frac{24|\pi_n(x)|}{(7n^2-7n+10)n^2(n-1)^2(1-x_\nu^2)P_{n-1}^2(x_\nu)}$$

and owing to (5.9); (5.11) and (5.12) give

$$|J_7| \leq \frac{32\pi}{3}\cdot\frac{\nu^{3/2}}{n^{3/2}(n-1)^2} + \frac{768\sqrt{2\pi}}{7n^2-7n+10}\cdot\frac{1}{\nu n^2} < \frac{19\pi\nu^{3/2}}{n^{3/2}(n-1)^2}. \tag{7.4}$$

For the estimation of

$$J_5 = \frac{\pi_n(x)}{2\pi_n'(x_\nu)P_{n-1}''(x_\nu)}\int_{-1}^{x}\frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_\nu}dt$$

we see that

$$\int_{-1}^{x} \frac{P'_{n-1}(t)}{t-x_\nu}\,dt = \frac{P_{n-1}(x)}{x-x_\nu} - \frac{1}{1+x_\nu} + \int_{-1}^{x} \frac{P_{n-1}(t)}{(t-x_\nu)^2}\,dt$$

i.e.,

$$\left| \int_{-1}^{x} \frac{P'_{n-1}(t)}{t-x_\nu}\,dt \right| \leqq \frac{2}{x_\nu - x} + \frac{1}{1+x_\nu} < 2\left(\frac{1}{x_\nu - x} + \frac{1}{1-x_\nu}\right).$$

Hence owing to (5.13)

$$\begin{aligned}
|J_5| &\leqq \frac{|l_\nu(x)|}{|P''_{n-1}(x_\nu)|} + \frac{|\pi_n(x)|}{|\pi'_n(x_\nu)|\,|(1-x_\nu^2)\,P''_{n-1}(x_\nu)|} \\
&\leqq \frac{(1-x_\nu^2)\,|l_\nu(x)|}{n(n-1)\,|P_{n-1}(x_\nu)|} + \frac{|\pi_n(x)|}{n^2(n-1)^2\,P^2_{n-1}(x_\nu)} \\
&\leqq \frac{\sqrt{8\pi}\,(1-x_\nu^2)\,|l_\nu(x)\,\sqrt{\nu}}{n(n-1)} + \frac{4\sqrt{8\pi}\,\nu}{n^{3/2}(n-1)^2}
\end{aligned}$$

$$< 2\sqrt{\pi}\,\frac{\nu}{n(n-1)} + 8\sqrt{2\pi}\,\frac{\nu}{n^{3/2}(n-1)^2} < \frac{10\sqrt{\pi}\,\nu}{3\,n(n-1)}\,. \tag{7.5}$$

Lastly we estimate

$$J_6 = \frac{\pi_n(x)}{2\,\pi'_n(x_\nu)\,P''_{n-1}(x_\nu)} \int_{-1}^{x} (a_1 t + a_2 t + a_3)\,P'_{n-1}(t)\,dt$$

with the values of a_1, a_2, a_3 given by (4.6), (4.7) and (4.8) respectively. We again use (5.2) with

$$a_1 + a_3 = \frac{1}{3(1-x_\nu^2)\,P_{n-1}(x_\nu)} - \frac{x_\nu}{1-x_\nu^2}$$

and have for

$$\begin{aligned}
J_6 = \frac{\pi_n(x)}{2\,\pi'_n(x_\nu)\,P''_{n-1}(x_\nu)} \Bigg[\Bigg\{ & \frac{1}{3(1-x_\nu^2)\,P_{n-1}(x_\nu)} - \frac{x_\nu}{1-x_\nu^2} + a_2 x + \\
& + (1-x^2)\,a_1 \Bigg\} P_{n-1}(x) + \left\{ \frac{1}{3(1-x_\nu^2)\,P_{n-1}(x_\nu)} - \frac{x_\nu}{1-x_\nu^2} - a_2 \right\} - \\
& - 2\,a_1 \left\{ \frac{n}{4\,n^2-1}\,P_{n+1}(x) + \frac{P_{n-1}(x)}{(2\,n+1)\,(2\,n-3)} - \right. \\
& \left. - \frac{n-1}{(2\,n-1)\,(2\,n-3)}\,P_{n-3}(x) \right\} - \frac{a_2}{2\,n-1} \left\{ P_n(x) - P_{n-2}(x) \right\} - \\
& - 2\,a_1 \left\{ \frac{n}{4\,n^2-1} - \frac{n-1}{(2\,n-1)\,(2\,n-3)} + \frac{1}{(2\,n+1)\,(2\,n-3)} \right\} \Bigg].
\end{aligned}$$

Hence using (5.6)

$$|J_6| \leqq \frac{4\,|\pi_n(x)|}{3\,n^2(n-1)^2\,|P_{n-1}^3(x_\nu)|} + \frac{5\,|\pi_n(x)|\,(1-x_\nu^2)\,|a_2|}{4\,n^2(n-1)^2\,P_{n-1}^2(x_\nu)} +$$

$$+ \frac{|\pi_n(x)|\,|P_{n-1}(x)|\,(1-x_\nu^2)\,|a_1|}{2\,n^2(n-1)^2\,P_{n-1}^2(x_\nu)} + \frac{2\,|\pi_n(x)|\,(1-x_\nu^2)\,|a_1|}{n^3(n-1)^2\,P_{n-1}^2(x_\nu)}.$$

Putting the values of a_1 and a_2 from (4.6) and (4.7)

$$|J_6| \leqq \frac{4\,|\pi_n(x)|}{3\,n^2(n-1)^2\,|P_{n-1}^3(x_\nu)|} + \frac{5\,|\pi_n(x)|}{4\,n^2(n-1)^2\,P_{n-1}^2(x_\nu)} \left| -1 + \right.$$

$$\left. + \frac{24}{(7\,n^2-7\,n+10)\,(1-x_\nu^2)} \right| + \frac{|\pi_n(x)|\,|P_{n-1}(x)|}{2\,n^2(n-1)^2\,P_{n-1}^2(x_\nu)} \left| \frac{x_\nu(1+x_\nu^2)}{1-x_\nu^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{7\,n^2-7\,n-2}{72\,P_{n-1}(x_\nu)} \right| + \frac{2\,|\pi_n(x)|}{n^3(n-1)^2\,P_{n-1}^2(x_\nu)} \left| \frac{x_\nu(1+x_\nu^2)}{1-x_\nu^2} - \frac{7\,n^2-7\,n-2}{72\,P_{n-1}(x_\nu)} \right|$$

$$\leqq \frac{|\pi_n(x)|\,|P_{n-1}(x)|}{2\,n^2(n-1)^2\,P_{n-1}^2(x_\nu)\,(1-x_\nu^2)} + \frac{|\pi_n(x)|\,|P_{n-1}(x)|}{18(n-1)^2\,|P_{n-1}^3(x_\nu)|} +$$

$$+ \frac{7\,|\pi_n(x)|}{2\,n^3(n-1)^2\,(1-x_\nu^2)\,P_{n-1}^2(x_\nu)} + \frac{2\,|\pi_n(x)|}{n(n-1)^2\,|P_{n-1}^3(x_\nu)|}$$

$$\leqq \frac{32\sqrt{\pi}}{\nu\,n^2} + \frac{8\sqrt{8}\,\pi}{9} \cdot \frac{\nu^{\frac{3}{2}}}{(n-1)^2} + \frac{56\sqrt{2\pi}}{\nu\,n^{5/2}} + \frac{64\,\pi\,\nu^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n}\,(n-1)^2}$$

$$\leqq \frac{88\sqrt{\pi}}{\nu\,n^2} + 18\,\pi\,\frac{\nu^{\frac{3}{2}}}{n^2} < 29\,\pi\,\frac{\nu^{\frac{3}{2}}}{n^2}. \tag{7.6}$$

Thus (7.4), (7.5) and (7.6) prove (2.4) for $x < x_\nu$. For $x > x_\nu$, it follows similarly and for $x = x_\nu$, the (2.4) is trivial.

We shall now prove part (2.3) of the above lemma. It is sufficient to prove the lemma for $\varrho_1(x)$ only.

It can be easily verified that

$$\left| \int_{-1}^{x} \left\{ (5\,n^2-5\,n-4)\,x^2 + \frac{36(n-2)\,(n+1)}{7\,n^2-7\,n+10}\,x - (5\,n^2-5\,n+8) \right\} P'_{n-1}(x)\,dx - \right.$$

$$\left. - \frac{48(5\,n^2-5\,n+2)}{7\,n^2-7\,n+10} \right|$$

$$\leqq 30\,n^2.$$

Henct from (4.3) we atonce have

$$|\varrho_1(x)| \leqq \frac{5\,|\pi_n(x)|}{6(n-1)^2} < \frac{10}{3\sqrt{2\pi}} \cdot n^{-\frac{3}{2}}.$$

8. Proof of Lemma 4.3. Again we prove the result for $\sigma_1(x)$ only. Here also we use (5.5) and have from (4.1)

$$J_8 \equiv \int_{-1}^{x} \left(x^2 + \frac{24}{7n^2 - 7n + 10}\,x - 1\right) P'_{n-1}(x)\,dx - \frac{48}{7n^2 - 7n + 10}$$

$$= \left(x^2 + \frac{24}{7n^2 - 7n + 10}\,x - 1\right) P_{n-1}(x) - \frac{72}{7n^2 - 7n + 10} -$$

$$- 2\left[\frac{n}{2n^2 - 1} P_{n+1}(x) + \frac{1}{(2n+1)(2n-3)} P_{n-1}(x) - \right.$$

$$\left. - \frac{n-1}{(2n-1)(2n-3)} P'_{n-3}(x)\right] - \frac{24}{(2n-1)(7n^2 - 7n + 10)} \times$$

$$\times [P_n(x) - P_{n-2}(x)] - 2\left[\frac{n}{4n^2 - 1} - \frac{n-1}{(2n-1)(2n-3)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(2n+1)(2n-3)}\right].$$

So

$$|J_8| \leqq 3\,|P_{n-1}(x)| + 8/n.$$

Hence

$$|\sigma_1(x)| \leqq \frac{|\pi_n(x)|\,|P_{n-1}(x)|}{12\,n^2(n-1)^2} + \frac{2\,|\pi_n(x)|}{9\,n^3(n-1)^2}$$

which owing to (5.7), (5.8) and (5.9) gives

$$|\sigma_1(x)| < \frac{7}{18\sqrt{\pi}}\,n^{-4}.$$

Similarly we can estimate $\sigma_n(x)$.

This work has been done under the National Research Fellowship Scheme sponsored by the Government of India.

(Received 28 August, 1961)

REFERENCES

[1] BALÁZS, J.—TURÁN, P.: "Notes on interpolation II". *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **8** (1957) 201—215.

[2] BALÁZS, J.—TURÁN, P.: "Notes on Interpolation III" Ibid., **9** (1958) 195—214.

[3] DZYADYK, V. K.: "Constructive Characterization of Functions satisfying the condition Lip α $(0 < \alpha < 1)$ on a finite segment of the real axis". *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. mat.* **20** (1956) 623—642 (Russian).

[4] FREUD, G.: "Bemerkung über die Konvergenz eines Interpolationsverfahrens von P. Turán". *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **9** (1958) 337—341.

[5] FREUD, G.: "Über Differenzierte Folgen der Lagrangeschen Interpolation." Ibid, **6** (1955) 467—473.

[6] SAXENA, R. B.: "On modified (0, 2) interpolation". Ibid., **10** (1959) 177—192.

[7] SZEGŐ, G.: *Orthogonal Polynomials.* Amer. Math. Soc. Coll. Publ. (1939).

СХОДИМОСТИ МОДИФИЦИРОВАННОЙ (0,2) ИНТЕРПОЛЯЦИИ

R. B. SAXENA

Резюме

Пусть обозначается через $\{x_{\nu n}\}$; $(\nu=1, 2, \ldots, n; n=2, 4, 6, \ldots)$ треугольная матрица составленная из корней многочленов

$$\pi_n(x) = -\, n(n-1) \int_{-1}^{x} P_{n-1}(t)\, dt\,.$$

Если функция $f(x)$ определена в интревале $-1 \leqq x \leqq 1$ где $f''(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(\alpha > 1/2)$ и если $R_n(x, f)$ означает тот многочлен степени не более $2n+1$, для которого выполнены равенства

$$\{R_n(x, f)\}_{x=x_{\nu n}} = f(x_{\nu n}), \quad \left\{\frac{d^2}{dx^2} R_n(x, f)\right\}_{x=x_{\nu n}} = f''(x_{\nu n}) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\left\{\frac{d^3}{dx^3} R_n(x, f)\right\}_{x=x_{in}} = \sigma_{in}\,,$$

где σ_{in} $(i = 1, n\,;\; n = 2, 4, 6, \ldots)$ заданные действительные числа, для которых имеет силу соотношение $\sigma_{in} = o(n^4)$, тогда автор доказывает, что последовательность многочленов $R_n(x; f)$, $(n = 2, 4, 6, \ldots)$ равномерно сходится к функции $f(x)$ в интервале $[-1, +1]$.

ON THE METHOD OF CHARACTERISTICS

by

L. VEIDINGER[1]

1. Introduction

The classical method of characteristics, discovered by J. MASSAU, is one of the standard numerical methods for solving initial value problems for quasi-linear hyperbolic systems involving n unknown functions and two independent variables. Since an initial value problem for a general nonlinear system can always be transformed into a quasilinear one containing a larger number of equations and unknowns (see, for example, [1] p. 35), the method is applicable to any nonlinear hyperbolic system in two independent variables.

Although the method of characteristics has been much used in practice (see, for example [5], p. 133), as far as the author knows, no attempt has been made to estimate the error of the process in the general case; even the convergence of the process for $n > 2$ has never been proved.

In the present work we shall prove that under some, rather trivial assumptions the error is of order $O(h)$, where h is the maximum distance between two adjacent grid points on the initial curve. Thus the order of the error is the same as in the finite difference method of COURANT, ISAACSON and REES (see [2]). The method of characteristics, however, may be more advantageous in certain cases, since practically no restrictive conditions are required to ensure stability and convergence.

In the special case $n = 2$ a simpler proof of this result is given in [3].

2. The initial value problem for quasilinear hyperbolic systems in two independent variables

Let us consider the following quasilinear system, written in matrix form:

$$\boldsymbol{u}_x + \mathbf{A}\,\boldsymbol{u}_y + \boldsymbol{h} = \mathbf{O}\,, \tag{2.1}$$

where $\boldsymbol{u}_x$ and $\boldsymbol{u}_y$ are partial derivatives of the column vector $\boldsymbol{u} = [u_i]$ whose components u_i are unknown functions of the variables x and y; $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ is a $n \times n$ matrix, and $\boldsymbol{h} = [h_i]$ is a column vector; the elements a_{ij} and h_i may depend on x, y and $\boldsymbol{u}$ (but not on $\boldsymbol{u}_x$ and $\boldsymbol{u}_y$).

We assume that the system (2.1) is of hyperbolic type in an open region Γ of the $n+2$-dimensional $x, y, \boldsymbol{u}$-space, that is, the matrix $\mathbf{A}$ has n real eigenvalues $\lambda_1(x,y,\boldsymbol{u}) \leq \lambda_2(x,y,\boldsymbol{u}) \leq \lambda_n(x,y,\boldsymbol{u})$ at every point of Γ, and to these eigen-

[1] Computing Centre of the Hungarian Academy of Sciences.

values correspond n linearly independent eigenrows $\boldsymbol{b}_1^*(x, y, \boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{b}_2^*(x, y, \boldsymbol{u})$, $\ldots$, $\boldsymbol{b}_n^*(x, y, \boldsymbol{u})$ such that

$$\boldsymbol{b}_i^*(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}) = \mathbf{O}^* , \tag{2.2}$$

where $\mathbf{E}$ is the unit matrix, and $\mathbf{O}^*$ is the zero row. The eigenvalues λ_i, the eigenrows $\boldsymbol{b}_i^*$, and the vector $\boldsymbol{h}$ should have bounded second partial derivatives in Γ. Moreover, let $\lambda_n - \lambda_1 > c_1$ and $|\det \mathbf{B}| > c_2$, where[2] $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{b}_n^* \end{bmatrix}$.

We suppose for convenience that the initial curve is a segment AB of the y-axis (this assumption can always be satisfied by introducing new coordinates instead of x and y). The components $u_{0i}(y)$ of the initial (vector) function $\boldsymbol{u}_0(y)$ should have derivatives that satisfy a Lipschitz condition in AB. Finally, we assume that every point $(0, y, u_{01}(y), \ldots, u_{0n}(y))$ for which $(0, y) \in AB$ lies in the region Γ.

Let us put $\lambda_{\max} = \max[0, \max \lambda_n(x, y, \boldsymbol{u})]$ and $\lambda_{\min} = \min[0, \min\limits_{(x,y,\boldsymbol{u})\in\Gamma} \lambda_1(x, y, \boldsymbol{u})]$. By the existence theorem of A. SCHMIDT (see [4]) from the preceding assumptions it follows that our initial value problem has a unique solution inside a trapezoid[3] Δ, bounded by the segment AB, two sides with slopes $\lambda_{\max}$ and $\lambda_{\min}$ through A and B respectively, and a line parallel to the y-axis; moreover, the partial derivatives of the solution satisfy a Lipschitz condition inside Δ.

3. The method of characteristics

If $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x, y)$ is a solution of the system (2.1), then along the line element $dy = \lambda_i\, dx$ we have

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dx} = \boldsymbol{u}_x + \lambda_i \boldsymbol{u}_y = -(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})\, \boldsymbol{u}_y - \boldsymbol{h} ,$$

whence by (2.2)

$$\boldsymbol{b}_i^* \frac{d\boldsymbol{u}}{dx} = -\boldsymbol{b}_i^* \boldsymbol{h} = d_i . \tag{3.1}$$

The simplest variant of MASSAU's method of characteristic can now be described as follows. We choose a sequence of grid points (that are not necessarily equally spaced) on the initial segment. These points will be called grid points at the 0-th level. The values of $\boldsymbol{u}$ at these points can be determined from the initial condition. If P_0 is a grid point at the 0-th level then we put $y_0(P_0) = y(P_0)$. Let now P, P' be two adjacent grid points at the ν-th level such that $y_0(P) > y_0(P')$. We assume that the approximate values of $\boldsymbol{u}$ at these points,

$$\overline{\boldsymbol{u}}(P) = \overline{\boldsymbol{u}}(x(P), y(P)) \quad \text{and} \quad \overline{\boldsymbol{u}}(P') = \overline{\boldsymbol{u}}(x(P'), y(P'))$$

are already computed. If Q is the intersection of the line with slope $\bar{\lambda}_1(P) = \lambda_1(x(P), y(P), \overline{\boldsymbol{u}}(P))$ through P and the line with slope $\bar{\lambda}_n(P) = \lambda_n(x(P), y(P), \overline{\boldsymbol{u}}(P))$ through P', then Q will be called a grid point at the $\nu+1$-th level, and we shall put $y_0(Q) = y_0(P)$. It will be proved in the sequel that

---

[2] In this paper $c_1, \ldots, c_{19}$ are positive constants that depend on the bounds and the Lipschitz constants of a_{ij}, h_i, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}_x$ and $\boldsymbol{u}_y$.

[3] In what follows we shall regard the half-plane $x > 0$ only.

if the maximum distance between two adjacent grid points at the 0-th level is small, and the points P, P' lie near to the y-axis, then Q always (exists and) lies right to the points P and P'. The coordinates of Q can be determined from the equations

(3.2.a) $$y(Q) - y(P) = \lambda_1(P)\,(x(Q) - x(P))$$

(3.2.b) $$y(Q) - y(P') = \bar{\lambda}_n(P)\,(x(Q) - x(P'))\,.$$

The components of the vector $\overline{\boldsymbol{u}}(Q)$ are computed from the equations

(3.3) $$\overline{\boldsymbol{b}}_i^*(P)\,(\overline{\boldsymbol{u}}(Q) - \overline{\boldsymbol{u}}(P_i)) = \bar{d}_i(P)\,(x(Q) - x(P_i))\,,$$

where $\overline{\boldsymbol{b}}_i^*(P) = \boldsymbol{b}_i^*(x(P),\ y(P),\ \overline{\boldsymbol{u}}(P))$, $\bar{d}_i(P) = d_i(x(P),\ y(P),\ \overline{\boldsymbol{u}}(P))$ and P_i is the intersection of the line with slope $\bar{\lambda}_i(P)$ through Q and the line PP'. (Thus $P_1 = P$ and $P_n = P'$). Since Q lies right to the points P and P' all points P_i lie between P and P' (see Fig. 1). The vectors $\overline{\boldsymbol{u}}(P_i)$ are defined by linear interpolation between P and P':

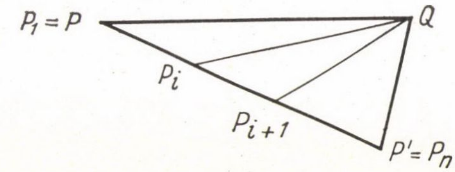


Figure 1.

(3.4) $$\overline{\boldsymbol{u}}(P_i) = \overline{\boldsymbol{u}}(P) + t(P_i)\,(\overline{\boldsymbol{u}}(P') - \overline{\boldsymbol{u}}(P))\,,$$

where

$$t(P_i) = \frac{y(P_i) - y(P)}{y(P') - y(P)}\,; \qquad 0 \leqq t(P_i) \leqq 1\,.$$

It is clear that by successive application of this method we can find the values of $\overline{\boldsymbol{u}}$ in a system of irregularly spaced grid points, bounded by the segment AB and two broken lines that approximate the "highest" characteristic curve through A and the "lowest" characteristic curve through B respectively (see Fig. 2). Thus the method of characteristics automatically yields the domain of determinacy of the segment AB.

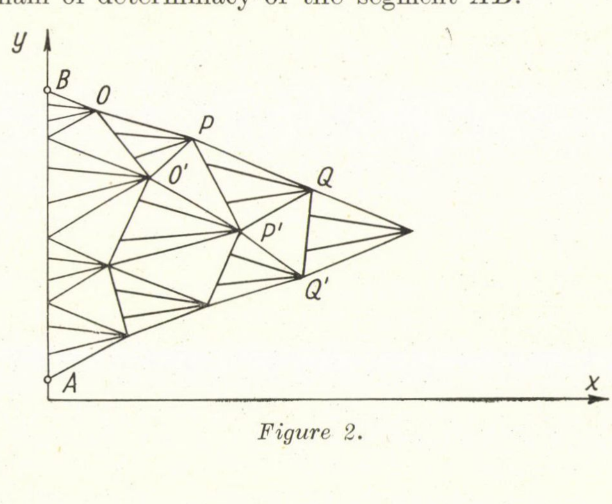


Figure 2.

Let us denote by h and k the maximum resp. minimum distance between two adjacent grid points on the initial segment. We shall prove the following theorem:

If the assumptions of section 2 are satisfied, and $h = O(k)$ then as long as the grid point R lies in a trapezoid Δ' (that may be narrower than the trapezoid Δ of the existence theorem) we have

$$\boldsymbol{u}(R) - \overline{\boldsymbol{u}}(R) = \boldsymbol{O}(h),$$

where $\boldsymbol{O}(h)$ denotes a vector whose components are of order $O(h)$.[4]

4. Two lemmas

The proof of the above theorem will be based on two lemmas. The validity of these lemmas will be proved in section 6.

First lemma: As long as the grid point R lies inside the trapezoid Δ', the point $\big(x(R), y(R), \overline{u}_1(R), \ldots, \overline{u}_n(R)\big)$ lies in the region Γ. ($\overline{u}_1(R), \ldots, \overline{u}_n(R)$ are the components of the vector $\overline{\boldsymbol{u}}(R)$).

Second lemma: If R and R' are two adjacent grid points at the same level inside Δ' such that $y_0(R) > y_0(R')$ then

$$c_3 h < y(R) - y(R') - \bar{\lambda}_i(R)\,(x(R) - x(R')) < c_4 h \tag{4.1}$$

for $i = 1, 2, \ldots, n$.

From these lemmas we can immediately derive upper and lower bounds for the difference of the abscissas, and upper bounds for the difference of the ordinates of corresponding grid points at two consecutive levels. Namely, (3.2.a) may be rewritten as

$$y(Q) - y(P') + y(P') - y(P) = \bar{\lambda}_1(P)\,[x(Q) - x(P') + x(P') - x(P)]\,,$$

whence by (3.2.b) we have

$$\begin{aligned}(\bar{\lambda}_n(P) - \bar{\lambda}_1(P))\,(x(Q) - x(P')) = \bar{\lambda}_1(P)\,(x(P') - x(P)) - \\ - (y(P') - y(P))\,.\end{aligned} \tag{4.2}$$

Similarly

$$\begin{aligned}(\bar{\lambda}_1(P) - \bar{\lambda}_n(P))\,(x(Q) - x(P)) = \bar{\lambda}_n(P)\,(x(P) - x(P')) - \\ - (y(P) - y(P'))\,.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Since the eigenvalues λ_i are bounded in Γ, from the first lemma it follows that $\bar{\lambda}_n(P) - \bar{\lambda}_1(P) < c_5$, provided the points P and P' lie in Δ'. Thus by the second lemma, (4.2) and (4.3) we obtain:

$$x(Q) - x(P) > c_6 h\,;\; x(Q) - x(P') > c_6 h \tag{4.4}$$

so that the point Q lies right to the points P and P'.

---

[4] It is possible that the distance of a grid point from the y-axis is less than the altitude of Δ', but it lies outside Δ'. The assertion of the theorem may be extended to these grid points if we continue the initial function $\boldsymbol{u}_0(y)$ beyond the segment AB so that the Lipschitz-condition for $\boldsymbol{u}_0'(y)$ should remain valid.

From the condition $\lambda_n - \lambda_1 > c_1$ by the first lemma it follows that $\lambda_n(P) - \bar{\lambda}_1(P) > c_1$; consequently, by the second lemma, (4.2), (4.3), (3.2.a) and (3.2.b) we have

$$(4.5) \qquad x(Q) - x(P) < c_7 h\,;\; x(Q) - x(P') < c_7 h\,;\; |y(Q) - y(P)| < c_8 h$$
$$|y(Q) - y(P')| < c_9 h\,.$$

The differences $x(P) - x(P')$ and $y(P) - y(P')$ may be expressed from the system of linear inequalities

$$|y(P) - y(P') - \bar{\lambda}_1(P)\,(x(P) - x(P')| < c_4 h$$
$$|y(P) - y(P') - \bar{\lambda}_n(P)\,(x(P) - x(P')| < c_4 h\,,$$

since the determinant of this system is equal to $\bar{\lambda}_1(P) - \bar{\lambda}_n(P)$ consequently

$$(4.6) \qquad |x(P) - x(P')| < c_{10} h;\; |y(P) - y(P')| < c_{11} h\,.$$

5. The error of the method of characteristics

Let $\boldsymbol{u}(x, y)$ be any vector function of two variables, whose partial derivatives satisfy a Lipschitz-condition in Δ'. From the construction of the points Q and P_i by (4.5) and (4.6) it follows that

$$\boldsymbol{u}(Q) - \boldsymbol{u}(P_i) = (\boldsymbol{u}_x(P_i) + \bar{\lambda}_i(P)\,\boldsymbol{u}_y(P_i))\,(x(Q) - x(P_i)) + \boldsymbol{O}(x(Q) - x(P_i))^2 =$$
$$= (\boldsymbol{u}_x(P) + \bar{\lambda}_i(P)\boldsymbol{u}_y\,P))\,(x(Q) - x(P_i)) + \boldsymbol{O}(h^2)\,,$$

provided the points P, P' and Q lie inside Δ'.

If $\boldsymbol{u}(x, y)$ is the solution of our initial value problem, then by (3.1)

$$(5.1) \qquad \boldsymbol{b}_i^*(P)\,(\boldsymbol{u}(Q) - \boldsymbol{u}(P_i)) = d_i(P)\,(x(Q) - x(P_i)) +$$
$$+ O(|\lambda_i(P) - \bar{\lambda}_i(P)|\,h + h^2)\,.$$

Let us put

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}}$$

then because of the continuous differentiability of the eigenvalues λ_i and the eigenrows $\boldsymbol{b}_i^*$ by the first lemma we have[5]

$$\bar{\lambda}_i(P) - \lambda_i(P) = O(|\boldsymbol{z}(P)|)\,,$$
$$\bar{\boldsymbol{b}}_i^*(P) - \boldsymbol{b}_i^*(P) = \boldsymbol{O}(|\boldsymbol{z}(P)|)\,.$$

Thus from (5.1) we get if we replace $\boldsymbol{b}_i^*$ by $\bar{\boldsymbol{b}}_i^*$

$$\bar{\boldsymbol{b}}_i^*(P)\,\big(\boldsymbol{u}(Q) - \boldsymbol{u}(P_i)\big) = d_i(P)\,\big(x(Q) - x(P_i)\big) + O\big(|\boldsymbol{z}(P)|\,h + h^2\big)\,.$$

Subtracting (3.3) from this we obtain

$$\bar{\boldsymbol{b}}_i^*(P)\,\big(\boldsymbol{z}(Q) - \boldsymbol{z}(P_i)\big) = \big(d_i(P) - \bar{d}_i(P)\big)\big(x(Q) - x(P_i)\big) +$$
$$+ O\big(|\boldsymbol{z}(P)|\,h + h^2\big) = O\big(|\boldsymbol{z}(P)|\,h + h^2\big)\,,$$

[5] If $\boldsymbol{a}$ is a vector, then by $|\boldsymbol{a}|$ we denote the maximum absolute value of the components of $\boldsymbol{a}$.

or after some rearrangements

$$\bar{\boldsymbol{b}}_i^*(P)\, z(Q) = \bar{\boldsymbol{b}}_i^*(O)\, z(P_i) + \left(\bar{\boldsymbol{b}}_i^*(P) - \bar{\boldsymbol{b}}_i^*(O)\right) z(P_i) + O\left(|z(P)|\, h + h^2\right) \tag{5.2}$$

where O is the grid point corresponding to P at the $\nu - 1$-th level (see Fig. 2; it is convenient to introduce grid points at the $\nu - 1$-th level, since the lemmas will be proved by induction on ν).

By the well-known estimation of the remainder-term in the linear interpolation formula from (4.6) we have

$$\boldsymbol{u}(P_i) = \boldsymbol{u}(P) + t(P_i)\left(\boldsymbol{u}(P') - \boldsymbol{u}(P)\right) + \boldsymbol{O}(h^2). \tag{5.3}$$

Subtracting (3.4) from (5.3) we obtain

$$z(P_i) = z(P) + t(P_i)\left(z(P') - z(P)\right) + \boldsymbol{O}(h^2).$$

Insertion of this into (5.2) yields

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{b}}_i^*(P)\, z(Q) &= \bar{\boldsymbol{b}}_i^*(O)\, z(P) + t(P_i)\left(\bar{\boldsymbol{b}}_i^*(O)\, z(P') - \bar{\boldsymbol{b}}_i^*(O)\, z(P)\right) + \\ &+ \left(\bar{\boldsymbol{b}}_i^*(P) - \bar{\boldsymbol{b}}_i^*(O)\right) z(P_i) + O\left(|z(P)|\, h + h^2\right). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Because of the continuous differentiability of $\boldsymbol{u}$ using (4.5) it follows that

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{u}}(P) - \bar{\boldsymbol{u}}(O) &= \bar{\boldsymbol{u}}(P) - \boldsymbol{u}(P) + \boldsymbol{u}(P) - \boldsymbol{u}(O) + \boldsymbol{u}(O) - \bar{\boldsymbol{u}}(O) = \\ &= \boldsymbol{O}\left(|z(O)| + |z(P)| + h\right). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Hence by (4.5) and the first lemma

$$\bar{\boldsymbol{b}}_i^*(P) - \bar{\boldsymbol{b}}_i^*(O) = \boldsymbol{O}\left(|z(O)| + |z(P)| + h\right).$$

Similarly we have

$$\bar{\boldsymbol{b}}_i^*(O) - \bar{\boldsymbol{b}}_i^*(O') = \boldsymbol{O}\left(|z(O)| + |z(O')| + h\right).$$

Inserting these inequalities into (5.4) we get

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{b}}_i^*(P)\, z(Q) &= \bar{\boldsymbol{b}}_i^*(O)\, z(P) + t(P_i)\left(\bar{\boldsymbol{b}}_i^*(O')\, z(P') - \bar{\boldsymbol{b}}_i^*(O)\, z(P)\right) + \\ &+ O\big(|z(P)|\, |z(P_i)| + |z(P_i)|\, h + |z(O)|\, |z(P_i)| + |z(O)|\, |z(P')| + \\ &+ |z(P')|\, h + |z(O')|\, |z(P')| + |z(P)|\, h + h^2\big). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Denote by M_ν the maximum of $|\, z(R)\, |$ for all grid points R at the ν-th level, and by N_ν the maximum of $|\, \boldsymbol{b}_i^*(S)\, z(R)\, |$ for $i = 1, 2, \ldots, n$ and for all pairs of corresponding grid points S, R at the $\nu - 1$-th and the ν-th level respectively. Since $c_2 < |\det \boldsymbol{B}| < c_{12}$ in Γ, from the first lemma it follows that

$$M_\nu = O(N_\nu)\,; \quad N_\nu = O(M_\nu)\,. \tag{5.7}$$

(5.6) and (5.7)yield

$$N_{\nu+1} \leqq N_\nu + c_{13}(N_\nu^2 + N_\nu N_{\nu-1} + N_\nu h + h^2)\,. \tag{5.8}$$

We shall show that if E_ν is the solution of the linear difference problem

$$E_{\nu+1} = E_\nu + c_{14}E_\nu h\,; \quad E_0 = c_{15}h$$

with suitably chosen constants c_{14} and c_{15}, then $E_\nu \geqq N_\nu$.

Let us denote by d the altitude of the trapezoid Δ'. From (4.4) it follows that $\nu < c_{16}\, dh^{-1}$, therefore

$$E_\nu = E_0(1 + c_{14}h^\nu) < c_{15}he^{c_{14}h\nu} < c_{15}he^{c_{14}c_{16}d}. \tag{5.9}$$

Thus, if $c_{15} > 1$; $c_{14} > 4c_{15}(c_{13} + 1)$ and

$$d < \frac{\log(c_{13}+1) - \log c_{13}}{c_{14}c_{16}}$$

then $c_{13} + 1 > c_{13}e^{c_{14}c_{16}d}$; $c_{14}h > 4\,c_{13}c_{15}he^{c_{14}c_{16}d} > 4\,c_{13}E_\nu$; $E_\nu > h$ and, consequently

$$E_{\nu+1} \geqq E_\nu + c_{13}(E_\nu^2 + E_\nu E_{\nu-1} + E_\nu h + h^2). \tag{5.10}$$

It is easy to see that $N_0 = 0$ and $N_1 < c_{17}\, h$. Thus if $c_{15} > c_{17}$, then from (5.8) and (5.10) it follows that $E_\nu \geqq N_\nu$. Finally, by (5.7) and (5.9) we have

$$E_\nu = O(h)\,; \quad N_\nu = O(h)\,; \quad M_\nu = O(h). \tag{5.11}$$

This proves our theorem in section 3 provided the two lemmas of section 4 are true. We must still prove these lemmas.

6. Proof of the lemmas.

The two lemmas will be proved simultaneously by induction.

Let P_0, P_0' be two adjacent grid points on the y-axis. From the condition $h = O(k)$ it follows that $c_{18}\, h < y(P_0) - y(P_0') \leqq h$. Thus the second lemma is true on the initial segment provided $c_4 > 1$ and $c_{18} > c_3$. Since the first lemma is trivial, both lemmas are valid at the 0-th level.

Now let us assume both lemmas are proved for all grid points at the 0-th, $\ldots$, ν-th level inside Δ' and let Q be a grid at the $\nu + 1$-th level. From (5.11) it follows that

$$\boldsymbol{u}(Q) - \overline{\boldsymbol{u}}(Q) = O(h). \tag{6.1}$$

(It should be observed that in the proof of the inequalities (5.11) for the grid points at the $\nu + 1$-th level the two lemmas have been used only at the 0-th, $\ldots$, ν-th levels). If Γ' is a closed subregion of Γ containing the points $(0, y, \boldsymbol{u}_0(y))$, and the altitude d of the trapezoid Δ' is small enough, then as long as the point (x, y) lies in Δ', the point $(x, y, \boldsymbol{u}(x, y))$ lies in Γ'. In particular, the point $(x(Q), y(Q), \boldsymbol{u}(Q))$ lies in Γ'. But then from (6.1) it follows that if h is small enough, the point $(x(Q), y(Q), \overline{\boldsymbol{u}}(Q))$ lies in Γ.

Now let P, P' be at the μ-th level, and let Q, Q' be the corresponding grid points at the $\mu+1$-th level, where $\mu \leqq \nu$. Subtracting (3.2.a) from

$$y(Q') - y(P') = \bar{\lambda}_1(P')\bigl(x(Q') - x(P')\bigr)$$

we get

$$y(Q') - y(Q) = y(P') - y(P) + \bar{\lambda}_1(P')\bigl(x(Q') - x(P')\bigr) - \tag{6.2}$$
$$- \bar{\lambda}_1(P)\bigl(x(Q) - x(P)\bigr).$$

From (4.5) and (5.11) it follows that

$$\bar{\lambda}_1(Q) - \bar{\lambda}_1(P) = O(h).$$

Similarly we have

$$\bar{\lambda}_1(P) - \bar{\lambda}_1(P') = O(h).$$

Using these inequalities and (4.4) from (6.2) we get

$$y(Q') - y(Q) - \bar{\lambda}_1(Q)\bigl(x(Q') - x(Q)\bigr) =$$
$$= y(P') - y(P) - \bar{\lambda}_1(P)\bigl(x(P') - x(P)\bigr) + O\bigl(h\bigl(x(Q) - x(P)\bigr)\bigr).$$

Summing this inequality for $\mu = 0, 1, \ldots, \nu$, we find that if Q and Q' are at the $\nu+1$-th level, and P_0, P_0' are the corresponding grid points at the 0-th level, then

$$y(Q') - y(Q) - \bar{\lambda}_1(Q)\bigl(x(Q') - x(Q)\bigr) = y(P_0') - y(P_0) + O(hd),$$

whence

$$(c_{18} - c_{19}d)\,h < y(Q) - y(Q') - \bar{\lambda}_1(Q)\bigl(x(Q) - x(Q')\bigr) < (1 + c_{19}d)\,h.$$

Thus the second lemma is true for the points Q, Q' and for $i = 1$, provided d is small enough (but independent of h and ν). The case $i = n$ can be treated in the same way.

(Received september 13, 1961)

REFERENCES

[1] COURANT, R.—HILBERT, D.: *Methoden der mathematischen Physik*, Vol. 2., J. Springer, Berlin, 1937.

[2] COURANT, R., ISAACSON, E. and REES, M.: "On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences" *Comm. Pure Appl. Math.* **5** (1952). 243—255

[3] VEIDINGER, L.: "Error estimation for Massau's method of characteristics" *Publ. of the Math. Institute of the Hungarian Academy of Sciences* **6** (1961) 323—331.

[4] SCHMIDT, A.: "Existenz, Unität und Konstruktion der Lösung für das Anfangswertproblem bei gewissen Systemen quasilinearer partieller Differentialgleichungen." *Math. Nachrichten* **7** (1952) 261—287.

[5] SAUER, R.: *Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen*. 2. edition. J. Springer, Berlin, 1958.

О МЕТОДЕ ХАРАКТЕРИСТИК

L. VEIDINGER

Резюме

В настоящей статье рассматривается численное решение задачи Коши для системы n квазилинейных гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными по методу характеристик (по методу Массо). Доказывается следующая теорема:

Пусть матрица **A**, вектор $\boldsymbol{h}$ и началные условия для системы (2.1) удовлетворяют требованиям, перечисленным в пункте 2, и пусть $h = O(k)$ где h-максимальное, k-минимальное расстояние между двумя соседними точками сетки на начальном отрезке. Тогда для каждой точки сетки R лежащей внутри некоторой трапеции Δ', ограниченной начальным отрезком AB мы имеем

$$\boldsymbol{u}(R) - \overline{\boldsymbol{u}}(R) = \boldsymbol{O}(h)\,,$$

где $\boldsymbol{u}(R)$ — значение решения системы (2.1) в точке R, а $\overline{\boldsymbol{u}}(R)$ — приближенное значение по методу Массо.

ON A PROBLEM OF TURÁN

by

J. W. MOON[1] – L. MOSER[1]

Abstract

Turán has asked the following question: What is the smallest number, $f(n)$, such that for any system φ of more than $f(n)$ triplets formed from n given elements there are always four elements all four triplets of which occur in φ. The following closely related problem is solved: What is the least number, $g(n)$, such that for any system φ of more than $g(n)$ triplets formed from n given elements there are always four elements each pair of which occurs in some triplet of φ. It is shown that $g(n) = \frac{n^3}{27}, \frac{(n+2)(n-1)^2}{27}$, or $\frac{(n-2)(n+1)^2}{27}$, according as n is congruent to 0, 1, or 2, respectively, modulo 3.

In a recent paper P. Erdős [1] has stated an unsolved problem due to Turán, namely, what is the smallest number, $f(n)$, such that for every system φ of more than $f(n)$ triplets formed from n given elements there are always four elements all four triplets of which occur in φ. We will treat the following closely related question: Given an ordinary graph on n points (with no loops or multiple edges), with the property that each of its edges belongs to at least one triangle, i.e. a complete subgraph of order 3. What is the least number, $g(n)$, such that every such graph containing more than $g(n)$ triangles contains at least one complete quadrilateral, i.e. a complete subraph of order 4. The main object of this note is to prove the following result:

Theorem.

$$g(n) = \begin{cases} \dfrac{n^3}{27}, & \textit{if} \quad n \equiv 0(3)\,; \\[2ex] \dfrac{(n+2)(n-1)^2}{27}, & \textit{if} \quad n \equiv 1(3)\,; \\[2ex] \dfrac{(n-2)(n+1)^2}{27}, & \textit{if} \quad n \equiv 2(3)\,. \end{cases} \tag{1}$$

We first derive a lower bound for Q, the number of complete quadrilaterals in a graph of the given type on n points, in terms of T and E, the number of triangles and edges, respectively, contained in the graph.

[1] University of Alberta, Edmonton, Canada.

Let the points of the graph be labelled $P_1, P_2, \ldots, P_n$. For every pair of distinct points, (P_i, P_j), which are joined by an edge, let $t(i, j)$ denote the number of triangles in the graph which contain the edge joining P_i to P_j.

$$\Sigma\, t(i, j) = 3T, \tag{2}$$

where the summation (here and elsewhere in general), is over all sets of points in the graph for which the expression being summed is defined.

If the distinct points P_i, P_j and P_k form a triangle in the graph define $w(i, j, k)$ and $r(i, j, k)$ as follows:

$$w(i, j, k) = t(i, j) + t(j, k) + t(i, k), \tag{3}$$

and

$$r(i, j, k) = w(i, j, k) - 2(\text{number of points } P_l,\ l \neq i, j, k, \tag{4}$$

$$\text{such that } P_l \text{ is joined by an edge to } P_i, P_j, \text{ and } P_k).$$

It is easily seen that

$$w(i, j, k) = r(i, j, k) + 2Q(i, j, k), \tag{5}$$

where $Q(i, j, k)$ denotes the number of complete quadrilaterals containing the points P_i, P_j, and P_k.

Summing (5) over all triangles in the graph gives

$$8Q = \Sigma\, t^2(i, j) - \Sigma\, r(i, j, k), \tag{6}$$

since each complete quadrilateral is counted four times and the edge joining P_i to P_j contributes, $t(i, j)$ times, an amount equal to $t(i, j)$ to the sum of the $w(i, j, k)$'s.

There are T non-zero terms in the sum of the $r(i, j, k)$'s each of which is less than or equal to n, the number of points in the graph, from (4). Also, a lower bound for the sum of the squares of the $t(i, j)$'s is obtained by setting each of the E non-zero terms equal to $\frac{3T}{E}$, from (2).

Hence,

$$8Q \geq E\left(\frac{3T}{E}\right)^2 - nT = T\left(\frac{9T}{E} - n\right). \tag{7}$$

We now return to the original problem.

Consider first the case where $n \equiv 1(3)$.

If $E > \frac{n^2 - 1}{3}$ in such a graph then, by a theorem of TURÁN [3], it contains at least one complete quadrilateral regardless of the value of T.

If $E = \frac{n^2 - 1}{3}$ then, appealing to TURÁN's theorem again, there is, in the sense of isomorphism, only one such graph having this many edges and no complete quadrilaterals, and this graph contains $\frac{(n+2)(n-1)^2}{27}$ triangles.

If $E \leq \frac{n^2 - 1}{3} - 1 = \frac{n^2 - 4}{3}$ then it follows from (7) that if $T > \frac{n(n^2 - 4)}{27}$ then $Q > 0$.

Thus, no matter how many edges the graph has, if $n \equiv 1(3)$, it can have at most $\frac{(n+2)(n-1)^2}{27}$ triangles without containing a complete quadrilateral, and there is essentially only one graph with this many triangles and no complete quadrilaterals.

This completes the proof of part of the theorem stated in (1). The remaining parts may be demonstrated in a similar fashion except that when $n \equiv 0(3)$ it is necessary to consider only two cases. We remark that the same sort of argument may be used to show that

$$3T \geqq \frac{E}{n}(4E - n^2)\,. \tag{8}$$

This has also been proved by NORDHAUS and STEWART, (see [2]).

Substituting this inequality into (7) yields the following lower bound for the number of complete quadrilaterals a graph on n points contains, in terms of the number of its edges:

$$6Q \geqq \frac{E}{n^2}(4E - n^2)(3E - n^2)\,. \tag{9}$$

More generally if S_i denotes the number of complete subgraphs of order i in a graph on n points the type of argument used above yields the following inequality:

$$k(k-2)S_k \geqq S_{k-1}\left[\frac{(k-1)^2 S_{k-1}}{S_{k-2}} - n\right]. \tag{10}$$

(Received November 20, 1961)

REFERENCES

[1] ERDŐS, P.: "Some unsolved problems." *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences* **6**(1961) 221—254.
[2] NORDHAUS, E. A. —STEWART, B. M.: "Triangles in an ordinary graph." *Canadian Journal of Math.* **15** (1963) 33—41.
[3] TURÁN, P.: "On the theory of graphs." *Colloquium Mathematicum* **3** (1954) 19—30.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ TURÁN-A

J. W. MOON – L. MOSER

Резюме

TURÁN ставил следующий вопрос: Какое число $f(n)$ является наименьшим с таким свойством, что если из n заданных элементов образовать какую либо систему φ из более чем $f(n)$ триплетов, тогда всегда существует

четыре элемента такие, что все четыре триплета образованные из них находятся в φ. Здесь решается следующий, близкий к приведеннему вопрос: Какое число $g(n)$ является наименьшим с таким свойством, что если из n заданных элементов образовать какую либо систему φ из более чем $g(n)$ примеров, тогда всегда существует четыре элемента такие, что каждая пара образованная из них находится в некотором триплете системы φ. Здесь показано, что

$$g(n) = \frac{n^3}{27}, \quad \frac{(n+2)(n-1)^2}{27} \quad \text{или} \quad \frac{(n-2)(n+1)^2}{27}$$

смотря тому, является ли n сравнивым с 0, 1 или 2 соответственно, по модулю 3.

SUR CERTAINES TRANSFORMÉES DES SÉRIES DE PUISSANCE ABSOLUMENT CONVERGENTES SUR LA FRONTIÈRE DE LEUR CERCLE DE CONVERGENCE

par

LÁSZLÓ ALPÁR

§ 1. Introduction

Soit $f_1(z)$ une fonction régulière dans le cercle $|z| < 1$ et $\zeta_0 = re^{i\alpha}$ $(0 < r < 1,\ 0 \leqq \alpha \leqq 2\pi)$ un point fixe. La fonction $f_2(z)$ définie par la relation

$$f_1\left(\frac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z}\right) = f_2(z) \tag{1.1}$$

est alors également régulière pour $|z| < 1$. Désignons par

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \tag{1.2}$$

et

$$f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) z^\nu \tag{1.3}$$

leurs séries de puissance respectives développées autour de l'origine.

M. P. TURÁN a démontré [1] que la convergence de la série (1.2) pour $z = 1$ n'entraîne pas toujours la convergence de la série (1.3) au point correspondant $z = \dfrac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}$ solution de l'équation $\dfrac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z} = 1$. En généralisant le résultat de M. TURÁN nous avons montré [2] que la transformation (1.1) ne conserve pas non plus la sommabilité (C, k) $(k > 0)$. Plus exactement la sommabilité (C, k) de la série $\sum_\nu a_\nu$ assure la sommabilité $(C, k + {}^1/_2)$ de la série $\sum_\nu b_\nu(\zeta_0)\left(\dfrac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^\nu$, mais elle n'implique pas la sommabilité $(C, k + \delta)$ de cette dernière si $\delta < {}^1/_2$.

Les théorèmes cités portent sur certaines propriétés locales des fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ et de leurs séries de Taylor respectives. Plus récemment nous avons obtenu [3] un théorème qui concerne le comportement des séries (1.2) et (1.3) sur la circonférence $|z| = 1$ et qui s'énonce comme suit:

Théorème 1. — *Étant donné un point fixe ζ_0 $(0 < |\zeta_0| < 1)$, on peut trouver des fonctions $f_1(z)$ régulières pour $|z| < 1$ se développant en séries de puissance $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ absolument convergentes pour $|z| = 1$, c'est-à-dire*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| = a < \infty\,, \tag{1.4}$$

telles que les séries de puissance définies par la relation

$$f_1\left(\frac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z}\right)=f_2(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0)\, z^\nu$$

ne soient pas absolument convergente pour $|z|=1$, *donc telles que*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |b_\nu(\zeta_0)| = \infty\,.$$ [1]

Nous nous proposons d'étudier dans cet ouvrage le problème suivant qui se rattache au théorème 1: La relation (1.4) supposée vérifiée, entraîne-t-elle pour $|z|=1$ la convergence ordinaire de la série (1.3)? La réponse affirmative s'exprime par le théorème ci-dessous:

Théorème 2. — *Soient* $f_1(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ *une fonction régulière pour* $|z|<1$, $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| < \infty$, ζ_0 $(0<|\zeta_0|<1)$ *un point fixe,* $|z_1|=1$, $|z_2|=1$ *deux points liés par la relation*

$$z_1=\frac{z_2-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z_2}\,. \tag{1.5}$$

Alors la série de puissance obtenue par la transformation

$$f_1\left(\frac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z}\right)=f_2(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0)\, z^\nu$$

est uniformément convergente sur la circonférence $|z|=1$ *et*

$$f_1(z_1)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z_1^\nu = f_2(z_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0)\, z_2^\nu\,. \tag{1.6}$$

Si, considérant la relation (1.6), on compare les théorèmes 1 et 2, on peut constater l'existence des couples de fonctions, telles que $f_1(z)$ et $f_2(z)$, admettant les mêmes valeurs dans la même succession lorsque z_1 et z_2, liés par (1.5), parcourent la circonférence $|z|=1$, et malgré cela $f_1(z)$ est représentée par une série de puissance absolument convergente pour $|z|=1$, tandis que la série entière qui représente $f_2(z)$ n'est pas absolutment, mais seulement uniformément convergente pour $|z|=1$. Des séries de puissance d'un tel genre, qui sont uniformément mais non absolument convergente sur la frontière de leur cercle de convergence, ont été déjà trouvées par G. H. Hardy ([4], pp. 157—160), et d'après une conjecture de L. Fejér par M. Riesz et par Fejér lui-même ([5], pp. 48—50). Néanmoins les séries faisant l'object de leurs recherches, ne sont pas en relation avec une autre série de Taylor qui, sur la frontière de son cercle de convergence, est absolument convergente.

---

[1] La note [3] étant rédigée en hongrois, nous avons tenu opportun de reprendre, dans le § 2, la démonstration du théorème 1.

Ces réflexions nous ont amenés à chercher l'inverse du théorème 2 et à soulever la question suivante: À partir des séries de puissance convenables absolument convergentes sur la frontière de leurs cercles de convergence, peut-on faire dériver au moyen d'une transformation du type (1.1) chaque série de puissance uniformément mais non absolument convergente sur la frontière de son cercle de convergence, ou bien l'ensemble des séries de la seconde espèce se subdivise en deux catégories: l'une contenant les séries qui s'obtiennent par une telle transformation, l'autre les série qu'on ne peut déduire de cette façon? Comme $\dfrac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z}$ et sa fonction inverse ont la même structure, la question posée peut être formulée d'une autre manière encore: Désignons par $f_1(z)$ une fonction régulière pour $|z| < 1$ dont la série de Taylor est uniformément mais non absolument convergente pour $|z| = 1$. Peut-on donner pour chaque $f_1(z)$ un nombre complexe ζ_0 $(0 < |\zeta_0| < 1)$ tel que le développement Taylorien de la fonction $f_2(z)$ obtenue par la transformation (1.1) soit absolument convergent pour $|z| = 1$, ou bien existe-t-il des fonctions $f_1(z)$ pour lesquelles on ne peut pas trouver de tel ζ_0? La réponse est formulée par le théorème suivant:

Théorème 3. — *Il existe des fonctions $f_1(z)$ régulières pour $|z| < 1$, se développant en une série de puissance $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ uniformément mais non absolument convergente pour $|z| = 1$ et qui se change par la transformation $f_1\left(\dfrac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z}\right)$ en une fonction $f_2(z)$ dont la série de puissance $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) z^\nu$ n'est absolument convergente sur la circonférence $|z| = 1$ pour aucune valeur de ζ_0 $(0 < |\zeta_0| < 1)$.*[2]

Pour démontrer le théorème 1, on établira

$$b_n(\zeta_0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu}(\zeta_0)\, a_\nu\,, \tag{1.7}$$

où les quantités $\gamma_{n\nu}(\zeta_0)$ sont indépendantes du choix spécial de $f_1(z)$. L'expression (1.7) représente un procédé de sommation linéaire et on démontrera que la matrice $[\gamma_{n\nu}(\zeta_0)]$ ne remplit pas les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elle transforme chaque série absolument convergente en une série absolument convergente (§ 2).

La démonstration du théorème 2 est plus compliquée: Selon (1.7)

$$b_n(\zeta_0)\, z_2^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu}(\zeta_0, z_1)\,(a_\nu z_1^\nu) \tag{1.8}$$

où $\gamma_{n\nu}(\zeta_0, z_1) = \gamma_{n\nu}(\zeta_0)\, z_1^{-\nu} z_2^n$. L'expression (1.8) définit également un procédé de sommation linéaire qui doit transformer la série absolument convergente $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z_1^\nu$ dans la série convergente $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\zeta_0)\, z_2^n$. Il sera demontré que la matrice

[2] J'avais communiqué ma conjecture concernant l'existence de deux sortes des séries de puissance en question à M. P. Erdős qui en a fait part dans une lettre à M. G. Piranian. Dans sa réponse, M. Piranian a déjà exposé une démonstration intéressante du théorème 3 qu'on lira dans le § 8.

$\mathcal{M} = [\gamma_{n\nu}(\zeta_0, z_1)]$ jouit de cette propriété. À cet effet on donnera aux élements de $\mathcal{M}$ une forme plus adéquate au calcul (§ 3). On établira ensuite le lemme 1 qui fournira les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une matrice infinie transforme toute série absolument convergente en une série convergente (§ 4). On vérifiera dans les §§ 5 et 6 que $\mathcal{M}$ satisfait aux conditions établies dans le § 4.

Le § 5 contient deux lemmes permettant de majorer $|\gamma_{n\nu}(\zeta_0, z_1)|$. On montrera d'abord (lemme 2) que $|\gamma_{n\nu}(\zeta_0, z_1)| = O(\nu^{-1/3})$ uniformément en z_1 et n, et l'on prouvera ensuite (lemme 3) que $|\gamma_{n\nu}(\zeta_0, z_1)| = O(\nu^{-1/3-\varepsilon/2})$ uniformément en z_1 et n si $\left|\frac{n}{\nu} - \frac{1+r}{1-r}\right| \left|\frac{n}{\nu} - \frac{1-r}{1+r}\right| \geqq c_2 \nu^{-2/3+2\varepsilon}$, où c_2 est une constante indépendante de n et ν, et $\varepsilon \in [0, 1/3]$ désigne un paramètre. Le lemme 3 sera démontré à l'aide de la méthode du col en discutant les différentes formes et positions des courbes de niveau de la fonction $\left|\left(\frac{w-r}{1-rw}\right)^{\nu} w^{-n}\right|$ qui varient avec $\lambda = \frac{n}{\nu}$. Un changement de variable permettra de ramener les cas où $\lambda < 1$ à ceux où $\lambda \geqq 1$. Nous aurons à évaluer l'intégrale

$$\gamma_{n\nu}(r_1, 1) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_\lambda} \left(\frac{w-r}{1-rw}\right)^{\nu} \frac{dw}{w^{n+1}}, \tag{1.9}$$

où L_λ est une courbe fermée qui entoure l'origine et passe, suivant le cas, par un ou deux cols, notés w_1 et w_2. L'application de la méthode du col se heurte à des obstacles lorsque $w_1 = w_2 = 1$ ou bien si $w_1 - 1 \to 0$ et $w_2 - 1 \to 0$ avec $\nu \to \infty$. C'est ce qui arrive si $\left|\lambda - \frac{1+r}{1-r}\right|$ s'anulle ou tend vers zéro avec $\nu \to \infty$.

Le § 5 prépare les calculs effectués dans le § 6. Le point essentiel de notre démonstration est d'établir que les sommes partielles $\sigma_{m\nu}(\zeta_0, z_1) = \sum_{n=0}^{m} \gamma_{n\nu}(\zeta_0, z_1)$ sont uniformément bornées en z_1, m et ν. Ce qui revient à prouver que les intégrales

$$I_{m\nu} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_\lambda} \left(\frac{w-r}{1-rw}\right)^{\nu} \frac{dw}{w^{m+1}(w - e^{i\beta})} \tag{1.10}$$

sont uniformément bornées en β, m et ν, où $\lambda = \frac{m}{\nu}$, L_λ désigne le contour qui figure dans (1.9) et $0 \leqq \beta \leqq 2\pi$ est un angle qui ne dépend que de z_1. Les difficultés proviennent maintenant de deux circonstances: la coïncidence ou le raprochement indéfini des deux cols cause des inconvénients déja mentionnés; il arrive de plus, si $\beta \neq 0$, que pour certaines valeurs de λ l'un des cols, soit p.e. w_1, coïncide avec le pôle $e^{i\beta}$ ou bien que $w_1 - e^{i\beta} \to 0$ avec $\nu \to \infty$; si $\beta = 0$ les mêmes cas se produisent simultanément avec les deux cols, mais ce fait ne soulève pas des complications particulières. Lorsque $\left|\lambda - \frac{1+r}{1-r}\right| = O(\nu^{-2/3})$, en appliquant le lemme 2, un calcul direct fournira la borne supérieure de $\sigma_{m\nu}(\zeta_0, z_1)$. Si, pour $\left|\lambda - \dfrac{1+r}{1-r}\right| \geqq c_2\, \nu^{-2/3+2\varepsilon}$, on a $w_1 - e^{i\beta} = 0$ ou $w_1 - e^{i\beta} \to 0$ $(\nu \to \infty)$, on procèdera d'une manière analogue en s'appuyant sur le lemme 3.

Nous avons déjà étudié dans notre ouvrage [2] (III, p. 102) l'intégrale

$$g_{\nu n} = \frac{c_\nu^{(k+\delta)}}{2\pi i} \frac{\binom{n+k}{k}}{\binom{\nu+k+\delta}{k+\delta}} \int_{L_{\nu n}} \frac{(1+\bar{\zeta}_0\,\omega)^{k+\delta}\,\omega^n}{(1-\omega)^\delta\,(\omega+\zeta_0)} \left(\frac{1+\bar{\zeta}_0\,\omega}{\omega+\zeta_0}\right)^\nu d\omega\,,$$

analogue à $I_{m\nu}$, où $k \geqq 0$, $0 < \delta < 1$ sont des constantes, $|c_\nu^{(k+\delta)}|$ une quantité bornée et $L_{\nu n}$ un contour d'intégration contenant le pôle $\omega = -\zeta_0$. En outre cette intégrale ne devait être considérée que pour les n et ν satisfaisant à la double inégalité

$$\frac{1-r}{1+r} + \frac{1}{\log \nu} + \frac{v_\nu' + 1}{\nu} \leqq \frac{n}{\nu} = \lambda \leqq \frac{1+r}{1-r} - \frac{1}{\log \nu} - \frac{v_\nu + 1}{\nu} \tag{1.11}$$

$(0 \leqq v_\nu < 1,\ 0 < v_\nu' \leqq 1)$. Au cours de l'évaluation de $g_{\nu n}$ nous avons rencontré les mêmes difficultés que nous venons de mentionner en esquissant le calcul de $I_{m\nu}$, mais en comparant les expressions de $I_{m\nu}$, et $g_{\nu n}$, et vu l'inégalité (1.11) on aperçoit qu'il faut tenir compte encore des circonstances suivantes: (1.10) ne contient pas le facteur $\binom{n+k}{k}\binom{\nu+k+\delta}{k+\delta}^{-1} = O(\nu^{-\delta})$; l'exposant qui figure dans (1.10) correspondant à δ est égale à 1; dans le cas de $g_{\nu n}$ on a selon (1.11) $\dfrac{1+r}{1-r} - \lambda > \dfrac{1}{\log \nu}$ tandis que dans le cas considéré $\left|\lambda - \dfrac{1+r}{1-r}\right| \geqq$ $\geqq c_2\,\nu^{-2/3+2\varepsilon}$. D'autre part, le fait que nous cherchons seulement une borne supérieure de $|I_{m\nu}|$ indépendante de β, m et ν et non sa valeur asymptotique, comme dans le cas de $g_{\nu n}$, nous offre certaines facilités.

La convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\zeta_0)\, z_2^n$ étant ainsi prouvée, la relation (1.6) est imédiate. On montrera encore (§ 7) que cette série est aussi uniformément convergente pour $|z_2| = 1$.

Enfin le théorème 3 sera établi en s'appuyant sur la théorie des représentations conformes (§ 8).

* *

Les symboles O et o seront employés dans le sens de $\nu \to \infty$. On désignera de plus par c_j $(j = 1, 2, \ldots)$ ou bien des constantes numériques positives ou bien des quantités bornées de la forme

$$c_j = c_j(\nu, \varepsilon) = c_j^* + c_j^{**}(\nu, \varepsilon) = c_j^* + O(1) > 0\,, \tag{1.12}$$

où c_j^* est une constante numérique positive.

§ 2. Démonstration du théorème 1

Les relations (1.1) et (1.3) permettent d'écrire

$$b_n(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_l f_1\left(\frac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0\, z}\right) \frac{dz}{z^{n+1}}\,, \tag{2.1}$$

où l est une courbe simple fermée entourant l'origine tracée dans le cercle $|z| < 1$. Remplaçons dans (2.1) $f_1(z)$ par sa série de Taylor donnée sous (1.2):

$$(2.2)\qquad b_n(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_l \left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \left(\frac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z}\right)^\nu\right\}\frac{dz}{z^{n+1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu}(\zeta_0)\, a_\nu ,$$

où

$$(2.3)\qquad \gamma_{n\nu}(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_l \left(\frac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z}\right)^\nu \frac{dz}{z^{n+1}} .$$

L'expression (2.2) représente le procédé de sommation cherché déjà signalé sous (1.7). Il nous faut trouver un critère permettant de décider si ce procédé transforme la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ absolument convergente en la série absolument convergente $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_n(\zeta_0)$. Ce critère est fournit par le théorème suivant dû à K. Knopp et G. G. Lorentz ([6], p. 11, Satz 1):

Soit $[\gamma_{n\nu}]$ *une matrice infinie* $(n = 0, 1, 2, \ldots;\ \nu = 0,1, 2, \ldots)$. *Pour que* $[\gamma_{n\nu}]$ *transforme toute série* $\sum_{\nu=0}^{\infty} x_\nu$ *absolument convergente en la série absolument convergente* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$, *où*

$$y_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu}\, x_\nu \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

il faut et il suffit qu'il existe une constante $K > 0$ *vérifiant l'inégalité*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_{n\nu}| \leqq K . \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

On démontrera que, dans le cas considéré, il n'existe aucune constante $K > 0$ qui satisfairait à l'inégalité

$$(2.4)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_{n\nu}(\zeta_0)| \leqq K \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

En effet, la relation (2.3) signifie que

$$(2.5)\qquad \left(\frac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z}\right)^\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n\nu}(\zeta_0)\, z^n.$$

Des fonctions du type $\dfrac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z}$ ont été étudiées par M. B. M. Bajšanski ([7], pp. 142—144, Théorème 3) lequel a obtenu le résultat suivant:

Soit

1) $f(z)$ *une fonction holomorphe pour* $|z| < R,\ R > 1$;
2) $f|(z)| = 1$ *pour* $|z| = 1$;
3) $f(z) \neq e^{i\vartheta} z^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$.

Alors, en posant

$$[f(z)]^\nu = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\nu n} z^n,$$

on aura

$$\lim_{\nu\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{\nu n}| = \infty. \tag{2.6}$$

La fonction $\dfrac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z}$ remplit les conditions 1), 2), 3) et il résulte ainsi de (2.5) et (2.6) que

$$\lim_{\nu\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_{n\nu}(\zeta_0)| = \infty.$$

Par conséquent il n'existe pas de constante K vérifiant (2.4) pour chaque ν. Il y a donc des séries $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ absolument convergentes qui se transforment par $[\gamma_{n\nu}(\zeta_0, z_1)]$ en des séries non absolument convergentes $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\zeta_0)$. Le théorème 1 est ainsi établi.

§ 3. Expression des éléments de $\mathcal{M}$

Le procédé de sommation (1.8) s'écrit sans plus sous une forme plus explicite à l'aide de (2.2) et (2.3):

$$b_n(\zeta_0)\, z_2^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \frac{z_1^{-\nu} z_2^n}{2\pi i} \int_l \left(\frac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z}\right)^\nu \frac{dz}{z^{n+1}} \right\} (a_\nu z_1^\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu}(\zeta_0 \cdot z_1)\, a_\nu z_1^\nu. \tag{3.1}$$

En prenant pour l la circonférence $|z| = 1$, on aura

$$\gamma_{n\nu}(\zeta_0, z_1) = \frac{z_1^{-\nu} z_2^n}{2\pi i} \int_{|z|=1} \left(\frac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z}\right)^\nu \frac{dz}{z^{n+1}}. \tag{3.2}$$

C'est l'expression (3.2) qui doit prendre une forme un peu différente plus propice à nos calculs. Étant donné que $\zeta_0 = re^{i\alpha}$, posons $z = e^{i\alpha} w$ dans (3.2):

$$\gamma_{n\nu}(\zeta_0, z_1) = \frac{e^{i(n-\nu)\alpha}}{2\pi i} \frac{z_2^n}{z_1^\nu} \int_{|w|=1} \left(\frac{w-r}{1-rw}\right)^\nu \frac{dw}{w^{n+1}}. \tag{3.3}$$

On en tire

$$|\gamma_{n\nu}(\zeta_0, z_1)| = |\gamma_{n\nu}(r, 1)| \leqq 1. \tag{3.4}$$

§ 4. Transformation des séries absolument convergentes en séries convergentes

La démonstration du théorème 2 consiste à prouver que la matrice $\mathcal{M} = [\gamma_{n\nu}(\zeta_0, z_1)]$ transforme toute série absolument convergente en une série convergente. C'est dans ce but que nous allons établir le lemme suivant:

Lemme 1. — **A.** — *Soit* $[\gamma_{n\nu}]$ *une matrice infinie* $(n = 0, 1, 2, \dots;$ $\nu = 0, 1, 2, \dots)$ *et*

$$\sigma_{m\nu} = \sum_{n=0}^{m} \gamma_{n\nu}.$$

Pour que $[\gamma_{n\nu}]$ *transforme toute série* $\sum_{\nu=0}^{\infty} x_\nu$ *absolument convergente en une série convergente* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$, *où*

$$y_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu} x_\nu \qquad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{4.1}$$

il faut et il suffit

I. que

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_{m\nu} = \sigma_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots) \tag{4.2}$$

existe;

II. que l'on ait une constante $K > 0$ *vérifiant l'inégalité*

$$|\sigma_{m\nu}| \leqq K \qquad (m = 0, 1, 2, \dots; \nu = 0, 1, 2, \dots). \tag{4.3}$$

B. — *En supposant de plus*

III. que l'on ait

$$\sigma_\nu = 1 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots), \tag{4.4}$$

alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} x_\nu, \tag{4.5}$$

donc le procédé de sommation (4.1) *est aussi permanent.*

Démonstration. — On se servira du fait que l'ensemble des suites $x = \{x_\nu\}$ dont chacune est formée à partir des termes d'une série absolument convergente constitue un espace de Banach B avec la norme $\|x\| = \sum_{\nu=0}^{\infty} |x_\nu|$.

1° *Les conditions sont suffisantes.* — Supposons d'abord que les conditions I et II et ensuite III sont realisées. Leur suffisance résulte directement du théorème suivant de S. Banach et H. Steinhaus ([8], p. 79, Théorème 3) :[3]

Si une suite de fonctionelles linéaires $\{U_n(x)\}$ *définie dans l'espace* E *est convergente dans un ensemble* G *qui est dense dans une sphère* S *et si la suite des normes* $\{\|U_n\|\}$ *est bornée, la suite des fonctionnelles* $\{U_n(x)\}$ *est convergente dans l'espace* E *tout entier.*

Les sommes partielles de la série $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ définissent une suite de fonc-

[3] Dans ce qui suit on désigne par E un espace de Banach.

tionnelles linéaires $\{U_m(x)\}$ dans l'espace B, soit

$$\sum_{n=0}^{m} y_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sigma_{m\nu} x_\nu = U_m(x). \tag{4.6}$$

En effet, $\| U_m \| = \sup_\nu | \sigma_{m\nu} |$ (cf. [8], p. 67), d'où, d'après (4.3), $\| U_m \| \leqq K$.

D'autre part les suites $x' = \{x'_\nu\}$ qui ne contiennent qu'un nombre fini de termes différentes de zéro forment un ensemble partout dense dans B et en vertu de (4.2) la suite des fonctionelles linéaires $\{U_m(x')\}$ est convergente dans G. La suite de fonctionnelles $\{U_m(x)\}$ est donc convergente dans l'espace B tout entier, et l'on a pour tout $x \in B$

$$\lim_{m\to\infty} U_m(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sigma_\nu x_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} y_n. \tag{4.7}$$

Les conditions I et II sont donc suffisantes.

Si en outre (4.4) subsiste aussi, la relation (4.5) est une conséquence immédiate de (4.7).

2° *Les conditions sont nécessaires.* — Supposons maintenant que $[\gamma_{n\nu}]$ transforme chaque série absolument convergente en une série convergente.

Envisageons en premier lieu la suite particulière $x = \{x_\nu\}$ où $x_\nu = 0$ si $\nu \neq \mu$ et $x_\mu = 1$. On a alors $y_n = \gamma_{n\mu}$, $\sum_{n=0}^{m} y_n = \sigma_{m\mu}$ et il s'ensuit, par hypothèse, que

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} y_n = \lim_{m\to\infty} \sigma_{m\mu} = \sigma_\mu$$

existe. En posant $\mu = 0, 1, 2, \ldots$, on constate que la condition I se trouve vérifiée.

La nécessité de la condition II découle d'un autre théorème de S. Banach et H. Steinhaus ([8], p. 80, Théorème 5):

Étant donnée dans E une suite $\{U_n(x)\}$ de fonctionnelles linéaires telles que $\overline{\lim}_{n\to\infty} | U_n(x) | < \infty$ pour tout $x \in E$, la suite *des normes $\{\| U_n \|\}$ est bornée.*

Montrons d'abord que $U_m(x)$ définie par (4.6) est une fonctionnelle linéaire dans B. La condition I étant remplie, on a $| \sigma_{m\nu} | < \infty$ pour chaque $\nu < \infty$. On en déduit, en posant

$$U_{m\mu}(x) = \sum_{\nu=0}^{\mu} \sigma_{m\nu} x_\nu, \qquad \| U_{m\mu} \| = \sup_{\nu\leqq\mu} |\sigma_{m\nu}| \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots),$$

que $\{U_{m\nu}(x)\}$ est une suite de fonctionnelles linéaires dans B. Selon l'hypothèse, on a $\overline{\lim}_{\mu\to\infty} | U_{m\nu}(x) | = | U_m(x) | < \infty$ pour tout $x \in B$. Il résulte ainsi du théorème cité que la suite des normes $\{\| U_{m\nu} \|\}$ est bornée pour chaque $m < \infty$ et $\| U_m \| = \sup_\nu | \sigma_{m\nu} | < \infty$.

Appliquons ensuite le théorème invoqué à la suite de fonctionnelles linéaires $\{U_m(x)\}$. On a, par hypothèse, $\overline{\lim}_{m\to\infty} | U_m(x) | = | U(x) | < \infty$ pour tout $x \in B$.

Par conséquent la suite des normes $\{\| U_m \|\}$ est bornée, donc $\sup\limits_{\nu} | \sigma_{m\nu} | = \| U_m \|$ est uniformément bornée en m et ν. La condition II est aussi nécessaire.

On en conclut enfin que si le procédé (4.1) est permanent, $\sigma_\nu = 1$ pour $\nu = 0, 1, 2, \ldots$. La condition III doit donc être remplie.

Remarquons encore que par la suite nous n'utiliseront que la suffisance des conditions du lemme 1.

§ 5. Majoration des éléments de $\mathcal{M}$

La relation (3.4) montre déjà que les quantités $| \gamma_{n\nu}(\zeta_0, z_1) |$ sont uniformément bornées, mais ce résultat est insuffisant pour ce qui suit. Dans le but d'en donner une meilleure estimation nous établirons deux lemmes.

Lemme 2. — *On a*

$$| \gamma_{n\nu}(\zeta_0, z_1) | = O(\nu^{-1/3}) \tag{5.1}$$

uniformément en z_1 *et* n.

Démonstration. — Il résulte de (3.4) qu'il suffit d'évaluer $| \gamma_{n\nu}(r, 1) |$. Posons dans la formule (3.3)

$$w = e^{i\varphi}, \qquad \frac{w - r}{1 - rw} = e^{i\theta(\varphi)};$$

nous obtenons:

$$\pi | \gamma_{n\nu}(r, 1) | = \left| \int_{\pi}^{2\pi} e^{i[\nu\theta(\varphi) - n\varphi]} d\varphi \right| \leqq \left| \int_{\pi}^{\pi+\nu^{-1/3}} \right| + \left| \int_{\pi+\nu^{-1/3}}^{2\pi-\nu^{-1/3}} \right| + \left| \int_{2\pi-\nu^{-1/3}}^{2\pi} \right| = I_1 + I_2 + I_3. \tag{5.2}$$

Il est évident que

$$I_1 + I_3 \leqq 2\,\nu^{-1/3}. \tag{5.3}$$

Pour majorer I_2 nous appliquons le lemme suivant de VAN DER CORPUT ([9], pp. 116—117): *Si la fonction* $u(\varphi)$, $a \leqq \varphi \leqq b$, *a une dérivée croissante, et si* $u''(\varphi) \geqq \varkappa > 0$, *où* $\varkappa$ *est une constante, alors*

$$\left| \int_a^b e^{i\nu u(\varphi)}\, d\,\varphi \right| \leqq \frac{2}{\pi} (\varkappa\nu)^{-1/2}. \tag{5.4}$$

Dans notre cas $u(\varphi) = \theta(\varphi) - \dfrac{n}{\nu}\varphi$ et

$$u''(\varphi) = -\frac{2\,r(1 - r^2)\sin\varphi}{(1 - 2\,r\cos\varphi + r^2)^2}.$$

Par conséquent $u''(\varphi) \geqq c_1\,\nu^{-1/3} = \varkappa$ pour $\varphi \in [\pi + \nu^{-1/3}, 2\pi - \nu^{-1/3}]$. On tire ainsi de (5.2) et (5.4)

$$I_2 = O(\nu^{-1/3}) \tag{5.5}$$

uniformément en z_1 et ν. La proposition du lemme 2 se trouve ainsi vérifiée par (5.3), (5.5) et (5.2).

Nous aurons besoin encore d'une meilleure estimation de $|\gamma_{n\nu}(\zeta_0, z_1)|$ que celle donnée sous (5.1). À cet effet nous démontrons un autre lemme.

Lemme 3. — *Soit* $\dfrac{n}{\nu} = \lambda$ *et* $0 \leqq \varepsilon \leqq {}^1/_3$. *Alors, si l'inégalité*

$$\left|\lambda - \frac{1+r}{1-r}\right| \left|\lambda - \frac{1-r}{1+r}\right| \geqq c_2\, \nu^{-2/3+2\varepsilon} \tag{5.6}$$

est vérifiée, il existe un contour d'intégration particulier L_λ *tel que*

$$|\gamma_{n\nu}(\zeta_0, z_1)| \leqq \Gamma_{n\nu} = \frac{2}{2\pi} \int\limits_{L_\lambda} \left|\frac{w-r}{1-rw}\right|^{\nu} \frac{|dw|}{|w|^{n+1}} = O(\nu^{-1/3-\varepsilon/2}) \tag{5.7}$$

uniformément en z_1 *et* n.

Démonstration. — La relation (5.7) s'établit facilement si λ est suffisamment grand ou suffisamment petit. En effet, désignons par ϱ et ϱ_1 deux constantes: $1 < \varrho < r^{-1}$, $r < \varrho_1 < 1$; dans la formule (3.3) on peut remplacer le contour d'intégration $|w| = 1$ par la circonférence $|w| = \varrho$ resp. $|w| = \varrho_1$. Les relations

$$|\gamma_{n\nu}(\zeta_0, z_1)| \leqq \left(\varrho^{-\lambda} \max_{|w|=\varrho} \left|\frac{w-r}{1-rw}\right|\right)^{\nu}, \quad |\gamma_{n\nu}(\zeta_0, z_1)| \leqq \left(\varrho_1^{-\lambda} \max_{|w|=\varrho_1} \left|\frac{w-r}{1-rw}\right|\right)^{\nu}$$

sont alors immédiates. Il existe donc trois nombres positifs $\delta = \delta(\varrho, \varrho_1) < 1$, $\lambda(\varrho) > 1$ et $\lambda(\varrho_1) < 1$ tels que pour $\lambda \geqq \lambda(\varrho)$ ou $\lambda \leqq \lambda(\varrho_1)$

$$|\gamma_{n\nu}(\zeta_0, z_1)| \leqq \Gamma_{n\nu} < \delta^{\nu}. \tag{5.8}$$

L'inégalité (5.8) entraîne (5.7). La circonférence $|w| = \varrho$ resp. $|w| = \varrho_1$ représente maintenant la courbe L_λ.

Il reste à examiner les cas où $\lambda(\varrho_1) < \lambda < \lambda(\varrho)$. Fixons, une fois pour toute, $\lambda(\varrho)$ et $\lambda(\varrho_1)$. λ est ainsi compris entre deux constantes positives indépendantes de n et ν. Ce fait permettra une réduction de plus. Nous allons voir que les cas où $\lambda < 1$ se ramènent à ceux où $\lambda \geqq 1$. Pour cette fin, posons dans (3.3) $(w - r)(1 - rw)^{-1} = \omega^{-1}$, nous obtenons

$$\gamma_{n\nu}(\zeta_0, z_1) = (1 - r^2) \frac{e^{i(\nu-n)\alpha} z_2^n}{2\pi i z_1^{\nu}} \int\limits_{|\omega|=1} \left(\frac{\omega + r}{1 + r\omega}\right)^{n-1} \frac{d\omega}{\omega^{\nu}(1 + r\omega)^2}\,. \tag{5.9}$$

Cette intégrale s'anullant pour $\nu = 0$ se calcule facilement pour $n \leqq 1$. Lorsque $n > 1$ nous allons majorer $|\gamma_{n\nu}(\zeta_0, z_1)|$ en évaluant $\left|\left(\dfrac{\omega + r}{1 + r\omega}\right)^{n-1} \omega^{-\nu}\right|$ et en intégrant le long d'un contour d'intégration convenablement choisi sur lequel $|1 + r\omega|^{-2}$ est une quantité bornée. Abstraction faite donc du facteur $(1 + r\omega)^{-2}$ les intégrales intervenant dans les formules (3.3) et (5.9) sont de la même structure, toutefois avec la différence que les rôles des paramètres

n et ν sont interchangés. En conséquence, si (5.7) est déjà démontrée pour $1 \leqq \lambda < \lambda(\varrho)$, on a $|\gamma_{n\nu}(\zeta_0, z_1)| = O(n^{-1/3-\varepsilon/2})$ pour $\lambda(\varrho) < \lambda < 1$, et cette dernière relation est équivalente à (5.7), puisque $n = \lambda\nu$. En tenant compte de plus de l'inégalité (5.8), seuls les cas où $1 \leqq \lambda < \lambda(\varrho)$ sont à étudier.

Cela étant, $\lambda - \dfrac{1-r}{1+r} \geqq \dfrac{2r}{1-r}$, et la condition (5.6) se réduit à

$$\left|\lambda - \frac{1+r}{1-r}\right| \geqq c_2\, \nu^{-2/3+2\varepsilon}. \tag{5.10}$$

L'intégrale qui figure dans l'expression (3.3) est du type

$$J_\nu = \int_L h(w)\,[F(w)]^\nu\, dw = \int_L h(w)\, e^{\nu f(w)}\, dw. \tag{5.11}$$

Lorsque $\nu \to \infty$, la valeur asymptotique de J_ν peut être déterminée par la méthode du col ([10], pp. 77—101) si certaines conditions sont remplies. L'élément essentiel de cette méthode consiste à choisir convenablement le contour d'intégration dans le domaine de régularité D de la fonction à intégrer. La méthode du col peut être brièvement décrite de la manière suivante: 1) Les cols en question se trouvent parmi les racines de l'équation $f'(w) = 0$ qui appartiennent à D. 2) Soit $w_1 \in D$ une de ces racines. La courbe de niveau $G(w_1)$, donnée par l'équation

$$|F(w)| = |F(w_1)| = c_3 \text{ resp. } \operatorname{Re} f(w) = \operatorname{Re} f(w_1) = \log c_3\,, \tag{5.12}$$

divise D en deux domaines partiels D_1 et D_2 tels que

$$\begin{aligned} &|F(w)| < c_3 \text{ resp. } \operatorname{Re} f(w) < \log c_3\,, \text{ si } w \in D_1\,, \\ &|F(w)| > c_3 \text{ resp. } \operatorname{Re} f(w) > \log c_3\,, \text{ si } w \in D_2\,. \end{aligned} \tag{5.13}$$

3) $G(w_1)$ a un point double en w_1 où elle se coupe sous un angle droit. 4) L passant par w_1 est tracée en D_1; $|F(w)|$ atteint donc sur L son maximum absolu en w_1. 5) Il est avantageux que L soit tangente en w_1 à la droite t_1 (l'axe du col w_1), bissectrice de l'angle formé par les deux tangentes tracées en w_1 à $G(w_1)$ et dont un segment appartient à D_1 au voisinage de w_1.

Si un tel choix de L est possible, de plus si $F(w)$ resp. $f(w)$ ainsi que $h(w)$ sont indépendantes de ν, si enfin $f''(w_1) \neq 0$, alors en désignant par τ_1 l'angle compris entre t_1 et l'axe réel, on a

$$J_\nu = h(w_1)\, e^{\nu f(w_1) + i\tau_1} \left|\frac{2\pi}{\nu\,|f''(w_1)|}\right|^{1/2} \{1 + O(\nu^{-1})\}. \tag{5.14}$$

Si pour une raison quelconque L doit passer par plusieurs cols, la valeur asymptotique de J_ν s'obtient comme la somme d'expressions analogues à (5.14).

Dans notre problème l'intégrale contenue par la formule (3.3) concrétise l'expression générale (5.11). D'après (3.4) il suffit de nous occuper de l'intégrale

$$\gamma_{n\nu}(r_1 1) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(\frac{w-r}{1-rw}\right)^\nu \frac{dw}{w^{n+1}}. \tag{5.15}$$

La courbe fermée L entoure le pôle $w = 0$, mais elle ne renferme pas le point $w = r^{-1}$. L'application de la formule (5.14) à l'intégrale (5.15) exige le choix préalable des fonctions $F(w)$ resp. $f(w)$ et $h(w)$, la détermination du col (ou des cols), le calcul des quantités $h(w_1)$, $f(w_1)$, $|f''(w_1)|$, τ_1 et la construction de la courbe L. Soient

$$F(w) = w^{-\lambda}\,\frac{w-r}{1-rw}, \quad f(w) = \log\left(w^{-\lambda}\,\frac{w-r}{1-rw}\right),$$
$$h(w) = w^{-1}, \tag{5.16}$$

où $w^{-\lambda}$ est compté avec sa détermination principale. On a ainsi

$$f'(w) = -\frac{\lambda}{w} + \frac{1}{w-r} + \frac{r}{1-rw} =$$
$$= \frac{r\lambda w^2 - [(1+r^2)\lambda - (1-r^2)]\,w + r\lambda}{w(w-r)(1-rw)}, \tag{5.17}$$

d'où les racines de l'équation $f'(w) = 0$:

$$w_{1,2} = \frac{1}{2r\lambda}\left\{(1+r^2)\lambda - (1-r^2) \pm (1-r^2)\left(\lambda - \frac{1+r}{1-r}\right)^{1/2}\left(\lambda - \frac{1-r}{1+r}\right)^{1/2}\right\}. \tag{5.18}$$

On voit que les cols ne dépendent pas directement de n ou de ν mais seulement de λ et l'on peut écrire $w_{1,2} = w_{1,2}(\lambda)$. La courbe L, qui doit passer (au moins) par un de ces cols, varie donc avec λ et pour cette raison on la désignera par L_λ.

On voit de (5.18) que pour $\lambda > \dfrac{1+r}{1-r}$ les cols sont réels, et comme $w_1 w_2 = 1$ (cf. (5.17)), w_1 est le conjugé de w_2 par rapport à la circonférence $|w| = 1$. On vérifie de même que $\lim\limits_{\lambda\to\infty} w_1(\lambda) = r^{-1}$ et $\lim\limits_{\lambda\to\infty} w_2(\lambda) = r$. Il en résulte que pour $\dfrac{1+r}{1-r} < \lambda < \lambda(\varrho)$ les cols sont des points intérieurs de l'intervalle réel (r, r^{-1}).

Pour $1 \leq \lambda < \dfrac{1+r}{1-r}$, on a $|w_1| = |w_2| = 1$ et $w_1 = \overline{w}_2$, donc

$$w_1 = e^{i\vartheta}, \quad w_2 = e^{-i\vartheta} \qquad (\vartheta = \vartheta(\lambda) > 0) \tag{5.19}$$

avec

$$\cos\vartheta = \frac{1+r^2}{2r} - \frac{1-r^2}{2r\lambda},$$
$$\sin\vartheta = \frac{1-r^2}{2r\lambda}\left(\frac{1+r}{1-r} - \lambda\right)^{1/2}\left(\lambda - \frac{1-r}{1+r}\right)^{1/2}, \tag{5.20}$$

Par conséquent la condition (5.10) et celle que $\lambda \geqq 1$ se traduit par le fait que $\cos \vartheta(1) = r$ et

$$c_4 \nu^{-1/3+\varepsilon} \leqq \vartheta(\lambda) \leqq \vartheta(1) < \frac{\pi}{2}. \tag{5.21}$$

Lorsque (5.10) n'est pas réalisée, on a $\vartheta(\lambda) = O(\nu^{-1/3+\varepsilon})$.

Si enfin $\lambda = \dfrac{1+r}{1-r}$, on obtient $w_1 = w_2 = 1$. Ce cas est d'ailleurs écarté par la condition (5.10), mais il sera examiné dans le § 6 à l'aide de la relation (5.1) du lemme 2.

On tire ensuite de (5.17) et (5.18)

$$\begin{aligned} f''(w_1) &= \frac{\lambda}{w_1^2}\left(\lambda - \frac{1+r}{1-r}\right)^{1/2}\left(\lambda - \frac{1-r}{1+r}\right)^{1/2}, \\ f''(w_2) &= -\frac{\lambda}{w_2^2}\left(\lambda - \frac{1+r}{1-r}\right)^{1/2}\left(\lambda - \frac{1-r}{1+r}\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Les expressions (5.22) font ressortir le sens de la condition (5.6) resp. (5.10) dans l'application de la formule (5.14). En ce qui concerne λ, w_1 et w_2, nous venons de constater que $\lambda \geqq 1$, $r \leqq |w_1|^{-1} \leqq 1$, $1 \leqq |w_2|^{-1} \leqq r^{-1}$. Il découle ainsi de (5.22), au cas où (5.10) est réalisée, que $|f''(w_1)|^{-1} = O(\nu^{1/3-\varepsilon})$, $|f''(w_2)|^{-1} = O(\nu^{1/3-\varepsilon})$; pour $\varepsilon = 1/3$ ces quantités ont donc une borne supérieure indépendante de ν. En outre on tire de (5.16)

$$h(w_1) = O(1)\,, \quad h(w_2) = O(1) \tag{5.23}$$

pour tous les λ en question.

Ceci posé, nous alons distinguer les cas suivants:

1° $\quad \varepsilon = \dfrac{1}{3}, \quad \dfrac{1+r}{1-r} + c_2 \leqq \lambda < \lambda(\varrho)\,.$

2° $\quad 0 \leqq \varepsilon < \dfrac{1}{3}, \quad \lambda = \dfrac{1+r}{1-r} + c_2\,\nu^{-2/3+2\varepsilon}\,.$

3° $\quad \varepsilon = 0\,, \quad \dfrac{1+r}{1-r} - c_2\,\nu^{-2/3} \leqq \lambda \leqq \dfrac{1+r}{1-r} + c_2\,\nu^{-2/3}\,.$

4° $\quad 0 < \varepsilon < \dfrac{1}{3}, \quad \lambda = \dfrac{1+r}{1-r} - c_2\,\nu^{-2/3+2\varepsilon}\,.$

5° $\quad \varepsilon = \dfrac{1}{3}, \quad 1 \leqq \lambda \leqq \dfrac{1+r}{1-r} - c_2\,.$

c_2 est une constante arbitraire, fixée une fois pour toutes, suffisamment petite pour que nos raisonnements aient toujours le sens désiré; on pourra prendre p.e. $c_2 = \frac{1}{2}\frac{1-r^2}{1+r^2} r^4(1-r)^4$. Le paramètre ε parcourant l'intervalle $[0, {}^1/_3]$ est choisi de telle façon que λ soit un nombre rationnel. Dans le cas 3° les $|\gamma_{n\nu}(\zeta_0, z_1)|$ seront évalues à l'aide du lemme 2. Les cas 1° et 2° sont caractérisés par le fait que $\frac{1+r}{1-r} < \lambda$, les cas 4° et 5° par celui que $1 \leqq \lambda < \frac{1+r}{1-r}$.

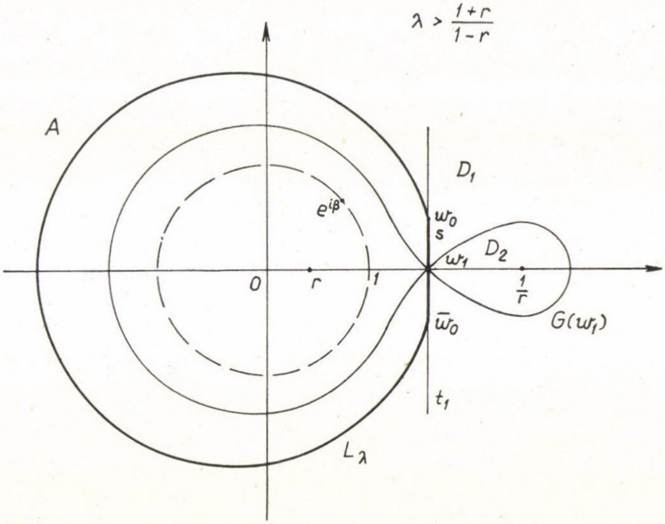


Figure 1.

Ces distinctions sont utilés à la construction de L_λ. Pour la discussion qui suit posons $|F(w)| = g_\lambda(w)$ pour les valeurs réelles de w.

A) $\quad \frac{1+r}{1-r} < \lambda < \lambda(\varrho)$.

Les racines de l'équation $g'_\lambda(w) = 0$ sont w_1 et w_2, $r < w_2 < 1 < w_1 < r^{-1}$. $g_\lambda(w)$ est continue pour $r \leqq w < r^{-1}$ et $g_\lambda(r) = 0, g_\lambda(1) = 1, g_\lambda(r^{-1}) = \infty$. $g_\lambda(w)$ atteint donc son minimum local en w_1 son maximum local en w_2 et, par suite, $g_\lambda(w_1) < 1$, $g_\lambda(w_2) > 1$. Il en résulte, $F(w_1)$ étant maintenant réelle, que (cf.(5.13)):

$$(5.24) \qquad 0 < F(w_1) = e^{f(w_1)} = c_5 < 1 \text{ resp. } f(w_1) = \log c_5 = -c_6 < 0\,.$$

Selon (5.16) on a $|F(w)| = 1$ pour $|w| = 1$ et $F(r^{-1}) = \infty$, $F(\infty) = 0$. On en conclut d'une part que la courbe de niveau $G(w_1)$ définie par (5.12) est à distance finie, d'autre part que la circonférence $|w| = 1$ et le point $w = r^{-1}$ appartiennent à D_2. En conséquence, $G(w_1)$ est une courbe fermée qui entoure d'un côté le cercle $|w| \leqq 1$, de l'autre côté le point $w = r^{-1}$, en se coupent sous un angle droit en w_1 (fig. 1; nos figures ne sont pas des dessins précis, elles représentent seulement la configuration des courbes en question d'une manière qualitative). $G(w_1)$ est manifestement symétrique par rapport à l'axe réel, lequel est l'une des bissectrices des angles formés par les deux tangentes à $G(w_1)$ tracées en w_1. Pourtant l'axe réel ne peut pas être l'axe du col t_1, car $|F(w)|$ prend son minimum local en w_1 quand $w \in (r, r^{-1})$, quoique $|F(w)|$ doit atteindre son maximum local en w_1 lorsque $w \in t_1$. L'axe t_1 est donc la perpendiculaire à l'axe réel passant par w_1, et $\tau_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

Après ces considérations L_λ peut être construite comme suit: elle est tangente à t_1 en w_1 et entoure la partie de $G(w_1)$ qui contient le cercle $|w| \leqq 1$. (Sur la figure 1 un segment de t_1 fait partie de L_λ, circonstance qui s'expliquera d'ici peu.) L_λ se trouve entièrement dans D_1 excepté son point w_1, et ainsi (cf. (5.24)) $\operatorname{Re} f(w) \leqq -c_6 < 0$ si $w \in L_\lambda$. (La courbe de niveau déterminée par (5.12) possède outre $G(w_1)$ une seconde branche, une courbe fermée contenant le point $w = r$ et se plaçant dans le cercle $|w| < 1$. Cette branche de la courbe de niveau ne nous intéresse pas.)

L_λ étant déterminée examinons les cas 1° et 2°.

$$1^\circ \qquad \varepsilon = \frac{1}{3}, \quad \frac{1+r}{1-r} + c_2 \leqq \lambda < \lambda(\varrho) .$$

Les relations (5.22), (5.23) et (5.24) montrent que la formule (5.14) s'applique sans difficulté et l'on a:

$$(5.25) \qquad |\gamma_{n\nu}(\zeta_0, z_1)| \approx \Gamma_{n\nu} = w_1^{-1}\bigl(2\pi f''(w_1)\bigr)^{-1/2} e^{-c_6 \nu} \nu^{-1/2} \{1 + O(\nu^{-1})\} .$$

(5.7) est donc vérifiée dans le cas 1°.

$$2^\circ \qquad 0 \leqq \varepsilon < \frac{1}{3}, \quad \lambda = \frac{1+r}{1-r} + c_2 \nu^{-2/3+2\varepsilon} .$$

On obtient de (5.16), (5.18) et (5.22)

$$(5.26) \qquad \begin{gathered} w_1 = w_1(\lambda) = 1 + c_7 \nu^{-1/3+\varepsilon} , \\ f(w_1) = -c_8 \nu^{-1+3\varepsilon}, \quad f''(w_1) = 2 c_9 \nu^{-1/3+\varepsilon} . \end{gathered}$$

w_1, $h(w_1)$, $f(w_1)$, $f''(w_1)$ dépendent maintenant de ν, l'application immédiate de la formule (5.14) n'est donc pas permise, mais une discussion analogue à celle qui conduit à la relation (5.14) fournit, comme on verra, la proposition (5.7).

t_1 est déterminé par l'équation $w = w_1 + iy$ $(-\infty \leqq y \leqq \infty)$.

Admettons que L_λ soit composée d'un segment rectiligne $s \subset t_1$ d'extrémités $w_0 = w_1 + i\nu^{-4/15}$ et $\overline{w}_0 = w_1 - i\nu^{-4/15}$ et de l'arc A de la courbe de niveau $G(w_0)$ définie par l'équation

$$(5.27) \qquad |e^{f(w)}| = |e^{f(w_0)}| = |e^{f(\overline{w}_0)}|$$

qui constitue avec s la courbe fermée L_λ contenant le point $w = 0$.

Pour majorer l'intégrale en question prise le long de s, développons $f(w)$ en série de Taylor autour de w_1 lorsque $w \in t_1$:

$$
(5.28)\qquad
\begin{aligned}
f(w) = &- c_8\,\nu^{-1+3\varepsilon} - c_9\,\nu^{-1/3+\varepsilon}\,y^2 + \sum_{s=2}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(2s)!}\,f^{(2s)}(w_1)\,y^{2s} + \\
&+ i\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(2s+1)!}\,f^{(2s+1)}(w_1)\,y^{2s+1},
\end{aligned}
$$

ici nous avons pris en considération les expressions (5.26). Or, quel que soit w_1 on peut déduire de (5.17) que

$$
(5.29)\qquad \frac{f^{(s)}(w_1)}{s!} = \frac{1}{s(w_1-r)^s}\left\{(-1)^s\lambda\,\frac{(w_1-r)^s}{w_1^s} - (-1)^s + r^s\left(\frac{w_1-r}{1-rw}\right)^s\right\},
$$

Si en particulier w_1 est donné par (5.26), on a $0 < w_1 - r < 1$ et on obtient de (5.29)

$$
(5.30)\qquad \lim_{s\to\infty}\left|\frac{f^{(s)}(w_1)}{s!}\right|^{-1/s} = w_1 - r\,.
$$

La série (5.28) est donc convergente pour $|\,y\,| < w_1 - r$. Il en résulte que

$$
(5.31)\qquad \nu\,\mathrm{Re}\,f(w) = -c_8\,\nu^{3\varepsilon} - c_9\,\nu^{2/3+\varepsilon}\,y^2 + \nu\,y^4\,O(1)\qquad (|y| < w_1 - r)\,.
$$

Pour $|\,y\,| \leqq \nu^{-4/15}$, on a $\nu y^4 = O(\nu^{-1/15})$ et on conclut de (5.31)

$$
(5.32)\qquad
\begin{aligned}
\int_s |\,w^{-1}\,e^{\nu f(w)}\,|\,dy &= O(e^{-c_8\nu^{3\varepsilon}})\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c_9\nu^{2/3+\varepsilon}y^2}\,dy = \\
&= O(e^{-c_8\nu^{3\varepsilon}}\,\nu^{-1/3-\varepsilon/2})\,.
\end{aligned}
$$

On obtient également de (5.31)

$$
(5.33)\qquad \nu\,\mathrm{Re}\,f(w_0) = -c_8\,\nu^{3\varepsilon} - c_9\,\nu^{2/15+\varepsilon} + O(1) = \nu\,\mathrm{Re}\,f(\overline{w}_0)\,,
$$

et il découle de (5.27) et (5.33) que

$$
(5.34)\qquad \int_A |\,w^{-1}\,e^{\nu f(w)}\,|\,|\,dw\,| = O(e^{-c_8\nu^{\varepsilon 3} - c_9\nu^{2/15+\varepsilon})\,.
$$

Les relations (5.32) et (5.34) prouvent que (5.7) est vérifiée dans le cas 2°.

B) $\quad 1 \leqq \lambda < \dfrac{1+r}{1-r}\,.$

L'équation $g'_\lambda(w) = 0$ n'a pas maintenant de racines réelles, mais d'après (5.19) $w_1 = e^{i\vartheta}$, $w_2 = e^{-i\vartheta}$ et, par suite,

$$
(5.35)\qquad |\,F(w_1)\,| = |\,e^{f(w_1)}\,| = 1\,,\quad |\,F(w_2)\,| = |\,e^{f(w_2)}\,| = 1\,.
$$

La courbe de niveau en question passe donc par w_1 et w_2; on la désignera par $G(w_1, w_2)$. En vertu de (5.12) et (5.35) l'équation de $G(w_1, w_2)$ s'écrit sous la forme particulière $|F(w)| = |e^{f(w)}| = 1$. Or, cette équation est vérifiée par tous les points de la circonférence $|w| = 1$ qui forme en conséquence une branche distincte de $G(w_1, w_2)$ et que l'on note par G_1. Cependant $G(w_1, w_2)$ doit encore posséder une autre branche orthogonale à G_1 en w_1 et w_2. Désignons cette branche par $G_2(w_1, w_2)$. Il est aisé de voir que $G_2(w_1, w_2)$ est une courbe à distance finie admettant l'axe réel comme axe de symétrie (fig. 2).

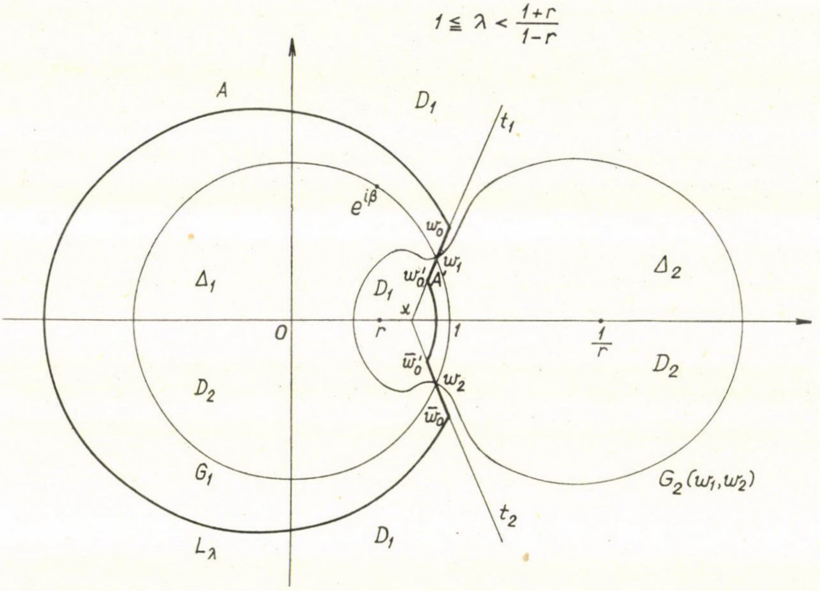


Figure 2.

Quant à la distribution des valeurs de $g_\lambda(w)$, on a

(5.36) $$g_\lambda(0) = \infty, \quad g_\lambda(r) = 0, \quad g_\lambda(r^{-1}) = \infty, \quad g_\lambda(\infty) = 0.$$

Il en résulte que

(5.37) $$0 \in D_2, \qquad r \in D_1, \qquad r^{-1} \in D_2, \qquad \infty \in D_1.$$

En désignant par Δ_1 resp. Δ_2 le domaine limité par G_1 resp. $G_2(w_1, w_2)$, on déduit de (5.35) et (5.37)

(5.38) $$D_1 = (\Delta_1 \cap \Delta_2) \cup (\overline{\Delta}_1 \cap \overline{\Delta}_2), \quad D_2 = \Delta_1 \cup \Delta_2 - \Delta_1 \cap \Delta_2$$

($\overline{\Delta}_1$ resp. $\overline{\Delta}_2$ est le domaine complémentaire de Δ_1 resp. Δ_2 par rapport au plan w). t_1 resp. t_2 (l'axe du col w_2) pénètre donc aussi bien dans $\Delta_1 \cap \Delta_2$ que dans $\overline{\Delta}_1 \cap \overline{\Delta}_2$ et, étant bissectrice de l'un des angles compris entre le rayon et la tangente de G_1 passant par w_1 resp. w_2, forme avec l'axe réel l'angle $\tau_1 = \vartheta + \dfrac{\pi}{4}$ resp. $\tau_2 = -\tau_1$.

Par conséquent L_λ est tangente à t_1 en w_1 et à t_2 en w_2; elle se compose de deux arcs dont l'un se trouve dans $\Delta_1 \cap \Delta_2$ et l'autre dans $\bar{\Delta}_1 \cap \bar{\Delta}_2$ et contient le point $w = 0$. (Sur la figure 2 un segment de t_1 resp. t_2 fait partie de L_λ.) Selon (5.38) $L_\lambda \subset D_1$ sauf les cols w_1, w_2, donc $\operatorname{Re} f(w) \leq 0$ si $w \in L_\lambda$ (cf. (5.35)).

L_λ étant construite, passons à l'étude des cas 4° et 5°.

4° $$0 < \varepsilon < \frac{1}{3}, \ \lambda = \frac{1+r}{1-r} - c_2 \nu^{-2/3+2\varepsilon}.$$

On obtient de (5.18)—(5.22)

$$(5.39) \quad \begin{aligned} &e^{i\vartheta} = w_1 = w_1(\lambda) = 1 - c_{10}\nu^{-2/3+2\varepsilon} + ic_{11}\nu^{-1/3+\varepsilon} = \bar{w}_2(\lambda) = \bar{w}_2, \\ &\vartheta = c_4 \nu^{-1/3+\varepsilon}, \ |f''(w_1)| = |f''(w_2)| = 2c_{12}\nu^{-1/3+\varepsilon}. \end{aligned}$$

L'application directe de la formule (5.14) n'est donc pas légitime, mais un procédé analogue à celui que nous avons appliqué dans le cas 2° permet d'établir la proposition énoncée.

L'axe t_1 est déterminé par l'expression $w = w_1 + e^{i\tau_1}u$ $(-\infty \leq u \leq \infty)$ et t_2 est symétrique à t_1 par rapport à l'axe réel.

Cette fois-ci nous devons considérer deux cas: $1/3 > \varepsilon \geq 1/6$, $1/6 > \varepsilon > 0$.

Pour $\varepsilon \geq 1/6$ supposons que L_λ se compose de deux segments de droite et de deux arcs (fig. 2), chacun appartenant à une courbe de niveau particulière, déterminés comme suit: Soit $s_1 \subset t_1$ le premier segment d'extrémités $w_0 = w_1 + e^{i\tau_1}\nu^{-1/3}$ et $w_0' = w_1 - e^{i\tau_1}\nu^{-1/3}$. Soit $s_2 \subset t_2$ le second segment avec les extrémités $\bar{w}_0$ et $\bar{w}_0'$. L'arc A resp. A' joint les points w_0 et $\bar{w}_0$ resp. w_0' et $\bar{w}_0'$, Ils forment avec s_1 et s_2 la courbe fermée L_λ contenant le point $w = 0$. L'arc A resp. A' appartient à la courbe de niveau $G(w_0)$ resp. $G(w_0')$ donnée par l'équation

$$(5.40) \qquad |e^{f(w)}| = |e^{f(w_0)}| = |e^{f(\bar{w}_0)}| \quad \text{resp.} \quad |e^{f(w)}| = |e^{f(w_0')}| = |e^{f(\bar{w}_0')}|.$$

Considérons ensuite la série de Taylor de $f(w)$ développée autour de w_1 lorsque $w \in t_1$, en tenant compte de la relation (5.39),

$$f(w) = f(w_1) + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{f^{(s)}(w_1)}{s!}(e^{i\tau_1}u)^s = f(w_1) - c_{12}\nu^{-1/3+\varepsilon}u^2 + \sum_{s=3}^{\infty}(p_s + iq_s)u^s,$$
$$(5.41)$$

où p_s et q_s sont des nombres réels. Comme $0 < |w_1 - r| < 1$, on peut conclure de (5.29) et (5.30) que la série (5.41) converge pour $|u| < |w_1 - r|$, condition qu'on suppose être realisée dans les raisonnements qui suivent. Étant donné que $\operatorname{Re} f(w_1) = 0$, on tire de (5.41) pour $|u| \leq \nu^{-1/3}$:

$$(5.42) \qquad \nu \operatorname{Re} f(w) = -c_{12}\nu^{2/3+\varepsilon}u^2 + O(1).$$

Il s'ensuit, à cause de la symmétrie de L_λ et de $f(w)$, que

$$(5.43) \qquad \int_{s_1} |w^{-1}e^{\nu f(w)}|\,du = \int_{s_2} |w^{-1}e^{\nu f(w)}|\,du = O(\nu^{-1/3-\varepsilon/2}).$$

Il résulte de plus de (5.42) que

$$(5.44) \quad \begin{aligned} \nu \operatorname{Re} f(w_0) &= -c_{12}\nu^{\varepsilon} + O(1) = \nu \operatorname{Re} f(\bar{w}_0), \\ \nu \operatorname{Re} f(w_0') &= -c_{12}\nu^{\varepsilon} + O(1) = \nu \operatorname{Re} f(\bar{w}_0'). \end{aligned}$$

On obtient ainsi par (5.40) et (5.44)

$$(5.45)\qquad \begin{aligned} &\int_A |w^{-1}\, e^{\nu f(w)}|\,|dw| = O(e^{-c_{12}\nu^{\varepsilon}}),\\ &\int_{A'} |w^{-1}\, e^{\nu f(w)})|\,|dw| = O(e^{-c_{12}\nu^{\varepsilon}}), \end{aligned} \qquad (\varepsilon \geqq 1/6).$$

(5.43) et (5.45) fournissent la relation (5.7) si $\varepsilon \geqq 1/6$.

Lorsque $0 < \varepsilon < 1/6$, les expressions (5.45) ne peuvent pas être majorées par $O(\nu^{-1/3-\varepsilon/2})$ si ε est trop petit. On peut tourner cette difficulté par une modification de L_λ et un calcul plus détaillé. L_λ soit composée de deux segments de droite s_1 et s_2 et de l'arc A (fig. 2)[4]. $s_1 \subset t_1$ a maintenant pour extrémités $x = w_1 + e^{i\tau_1}u_1$ et $w_0 = w_1 + e^{i\tau_1}\nu^{-4/15}$, en désignant par x l'intersection de t_1, t_2 et de l'axe réel. ϑ étant donné par (5.39), on aura $u_1 = -c_{13}\nu^{-1/3+\varepsilon}$. $s_2 \subset t_2$ a pour extrémités x et $\overline{w}_0$. A est l'arc de la courbe de niveau $G(w_0)$, déterminée par l'équation

$$(5.46)\qquad |e^{f(w)}| = |e^{f(w_0)}| = |e^{f(\overline{w}_0)}|,$$

qui forme avec s_1 et s_2 la courbe fermée L_λ entourant le point $w = 0$.

Pour pouvoir tirer des conclusions appropriées de la formule (5.41), il faut évaluer les quantités p_3, c_{12} et c_{13}. Elles s'obtiennent de (5.20), (5.22) et (5.29):

$$(5.47)\qquad \begin{aligned} &p_3 = -\frac{1}{3\sqrt{2}}\,\frac{r(1+r)}{(1-r)^3} + O(\nu^{-1/3+\varepsilon}) < 0,\\ &c_{12} = \frac{1+r}{1-r}\left(\frac{rc_2}{1-r^2}\right)^{1/2} + O(\nu^{-2/3+\varepsilon}),\quad c_{13} = \sqrt{2}\,\frac{(1-r)^2}{r}\left(\frac{rc_2}{1-r^2}\right)^{1/2} + O(\nu^{-1/3+\varepsilon}). \end{aligned}$$

Il en résulte pour $w \in s_1$ et $0 < u \leqq \nu^{-4/15} = u_2$ que

$$(5.48)\qquad \nu\,\mathrm{Re}\, f(w) = -\,c_{12}\,\nu^{2/3+\varepsilon}\,u^2 + p_3\,\nu\,u^3 + \nu\,u^4\,O(1) < -\,c_{12}\,\nu^{2/3+\varepsilon}\,u^2 + O(1),$$

et de là, en vertu de la symétrie de L_λ et de $f(w)$,

$$(5.49)\qquad \int_0^{u_2}\left|\frac{e^{\nu f(w_1+e^{i\tau_1}u)}}{w_1 + e^{i\tau_1}u}\right| du = \int_0^{u_2}\left|\frac{e^{\nu f(w_2+e^{i\tau_2}u)}}{w_2 + e^{i\tau_2}u}\right| du = O(\nu^{-1/3-\varepsilon/2}).$$

D'autre part on obtient de (5.47) et (5.48) pour $u_1 = -c_{13}\nu^{-1/3+\varepsilon} \leqq u < 0$:

$$\nu\,\mathrm{Re}\, f(w) = -\,c_{12}\,\nu^{2/3+\varepsilon}\,u^2\left\{1 - \frac{p_3}{c_{12}}\,\nu^{1/3-\varepsilon}\,u + O(\nu^{-1/3+\varepsilon})\right\} < -\,c_{14}\,\nu^{2/3+\varepsilon}\,u^2$$

avec

$$c_{14} = c_{12}\left\{\frac{2}{3} + O(\nu^{-1/3+\varepsilon})\right\}.$$

[4] Nous avons gardé les notations précédentes pour se servir encore de la figure 2, mais nous donnons de définitions nouvelles à s_1, s_2, A et w_0.

Par conséquant

$$(5.50)\qquad \int_{u_1}^{0}\left|\frac{e^{\nu f(w_1+e^{i\tau_1}u)}}{w_1+e^{i\tau_1}u}\right|du=\int_{u_1}^{0}\left|\frac{e^{\nu f(w_2+e^{i\tau_2}u)}}{w_2+e^{i\tau_2}u}\right|du=O(\nu^{-1/3-\varepsilon/2}).$$

Il reste à examiner l'intégrale étendue sur A. Il vient de (5.48):

$$\nu\,\mathrm{Re}\,f(w_0)=-c_{12}\nu^{2/15+\varepsilon}+p_3\nu^{1/5}+O(\nu^{-1/5})=\nu\,\mathrm{Re}\,f(\overline{w}_0),$$

d'où, vu la relation (5.46),

$$(5.51)\qquad \int_A |w^{-1}e^{\nu f(w)}|\,|dw|=O(e^{-c_{12}\nu^{2/15+\varepsilon}+p\nu^{1/5}}).$$

(5.49) — (5.51) constituent la démonstration de la relation (5.7) lorsque $\varepsilon<1/6$.

$$5^\circ\qquad \varepsilon=\frac{1}{3},\quad 1\leqq\lambda\leqq\frac{1+r}{1-r}-c_2.$$

Cette fois-ci $\mathrm{Re}\,f(w_1)=\mathrm{Re}\,f(w_2)=0$, et d'après (5.22) et (5.19) $|f''(w_1)|^{-1}=|f''(w_2)|^{-1}=O(1)$, $|h(w_1)|=|h(w_2)|=1$. La formule (5.14) peut donc être appliquée et l'on a:

$$(5.52)\qquad |\gamma_{n\nu}(\zeta_0,z_1)|\approx\Gamma_{n\nu}=\left(\frac{2}{\pi|f''(w_1)|}\right)^{1/2}\nu^{-1/2}\{1+O(\nu^{-1})\}.$$

Ce qui vérifie (5.7).

Le lemme 3 est ainsi entièrement établi.

§ 6. La matrice $\mathcal{M}$ remplit les conditions du lemme 1

Après ces préparatifs reprenons l'étude de l'expression (3.1).

ϱ désigne la constante définie dans le § 5 ($1<\varrho<r^{-1}$). La formule (3.3) peut ainsi prendre la forme:

$$(6.1)\qquad \gamma_{n\nu}(\zeta_0,z_1)=\frac{e^{i\nu\alpha}}{2\pi i z_1^\nu}\int_{|w|=\varrho}\left(\frac{w-r}{1-rw}\right)^\nu\frac{e^{-in\alpha}z_2^n}{w^{n+1}}\,dw,$$

d'où, en tenant compte de (1.5),

$$(6.2)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\gamma_{n\nu}(\zeta_0,z_1)=\frac{e^{i\nu\alpha}}{2\pi i z_1^\nu}\int_{|w|=\varrho}\left(\frac{w-r}{1-rw}\right)^\nu\frac{dw}{w-e^{-i\alpha}z_2}=1.$$

Les conditions I et III du lemme 1 sont donc réalisées.

Posons ensuite $e^{-i\alpha}z_2=e^{i\beta}$ et

$$(6.3)\qquad \sum_{n=0}^{m}\gamma_{n\nu}(\zeta_0,z_1)=\sigma_{m\nu}(\zeta_0,z_1).$$

Il reste à montrer l'existence d'une constante $K>0$ vérifiant l'inégalité

$$(6.4)\qquad |\sigma_{m\nu}(\zeta_0,z_1)|\leqq K\qquad (|z_1|=1;\ m=0,1,2,\ldots;\ \nu=0,1,2,\ldots).$$

Il découle de (6.1) — (6.3) que

$$\sigma_{m\nu}(\zeta_0, z_1) = \frac{e^{i\nu\alpha}}{3\pi i z_1^\nu} \int\limits_{|w|=\varrho} \left(\frac{w-r}{1-rw}\right)^\nu \frac{w^{m+1}-e^{i(m+1)\beta}}{w^{m+1}(w-e^{i\beta})} dw \overset{\text{def}}{=}$$

$$(6.5) \qquad = 1 - \frac{C_{m\nu}}{2\pi i} \int\limits_{|w|=\varrho} \left(\frac{w-r}{1-rw}\right)^\nu \frac{dw}{w^{m+1}(w-e^{i\beta})} \overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=} 1 - \frac{C_{m\nu}}{2\pi i} \int\limits_{|w|=\varrho} H(w)\, dw \overset{\text{def}}{=} 1 - C_{m\nu} J_{m\nu}.$$

Pour vérifier (6.4) il suffit d'établir que $|J_{m\nu}|$ est uniformément bornée en z_1, m et ν. Si l'on remplace m par n la fonction $H(w)$ ne diffère de $[F(w)]^\nu$ (cf. (5.15), (5.16)) que par le facteur $(w - e^{i\beta})^{-1}$; il est donc tout indiqué d'évaluer $|J_{m\nu}|$ par la méthode du col, en posant $\lambda = \frac{m}{\nu}$ et

$$(6.6) \qquad h(w) = w^{-1}(w - e^{i\beta})^{-1}.$$

En effet, on verra que tout le calcul se ramène à l'étude de l'intégrale

$$(6.7) \qquad I_{m\nu} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_\lambda} H(w)\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_\lambda} h(w)\, e^{\nu f(w)}\, dw\,,$$

où $f(w)$ est définie par (5.16) et L_λ est la courbe déterminée dans le § 5. $H(w)$ a deux pôles dans le cercle $|w| \leqq \varrho$, notamment $w = 0$ et $w = e^{i\beta}$. L_λ entoure certainement le pôle $w = 0$, mais elle ne contient pas toujours $e^{i\beta}$. Le résidu de $H(w)$ étant égal à 1 en valeur absolue au point $e^{i\beta}$, on a $|J_{m\nu} - I_{m\nu}| = 1$ si L_λ ne renferme pas $e^{i\beta}$ et $J_{m\nu} = I_{m\nu}$ dans le cas contraire.

Pour $\lambda \geqq \lambda(\varrho)$ on obtient (6.4) directement de (5.8) et (6.5), car $|h(w)| \leqq \varrho^{-1}(\varrho - 1)^{-1}$ pour $|w| = \varrho$ et, par suite, $|J_{m\nu}| \leqq \varrho^{-1}(\varrho - 1)^{-1}\delta^\nu$. En général, l'évaluation de $|I_{m\nu}|$ dérive sans plus des résultats obtenus dans le § 5 si $|h(w_1)| = O(1)$ resp. $|h(w_2)| = O(1)$. Les difficultés surgissent là où $|h(w_1)|^{-1}$ resp. $|h(w_2)|^{-1}$ est nulle ou tend vers zéro lorsque $\nu \to \infty$.

Ces remarques faites, discutons les cas énumérés dans le § 5.

$$1° \qquad \varepsilon = \frac{1}{3}, \quad \frac{1+r}{1-r} + c_2 \leqq \lambda < \lambda(\varrho)\,.$$

L_λ passe maintenant par le seul col w_1, entoure aussi le pôle $e^{i\beta}$ et $|h(w_1)| < c_{15}$ quel que soit β. La formule (5.14) est donc applicable et selon (5.25), (6.5) et (6.7) on a $|\sigma_{m\nu}(\zeta_0, z_1)| = 1 - O(e^{-c_6\nu}\nu^{-1/2})$. L'inégalité (6.4) est ainsi vérifiée.

$$2° \qquad 0 \leqq \varepsilon < \frac{1}{3}, \quad \lambda = \frac{1+r}{1-r} + c_2\, \nu^{-2/3+2\varepsilon}\,.$$

L_λ passe encore par le seul col w_1 et contient $e^{i\beta}$. On tire de (5.26) et (6.6): $|h(w_1)| = O(\nu^{1/3-\varepsilon})$. Il en résulte, en vertu de (5.32), (5.34) et (6.5), que

$|\sigma_{m\nu}(\zeta_0, z_1)| = 1 - O(e^{-c_8\nu^{3\varepsilon}}\nu^{-\frac{3\varepsilon}{2}})$. La relation (6.4) est encore prouvée.

3° $\qquad \varepsilon = 0, \quad \dfrac{1+r}{1-r} - c_2\nu^{-2/3} \leqq \lambda \leqq \dfrac{1+r}{1-r} + c_2\nu^{-2/3}.$

Désignons par λ' le plus grand et par λ'' le plus petit des λ satisfaisant à la condition 3° et posons

$$\frac{1+r}{1-r}\nu - c_2\nu^{1/3} \leqq \lambda''\nu = m'' \leqq m \leqq m' = \lambda'\nu \leqq \frac{1+r}{1-r}\nu + c_2\nu^{1/3}, \tag{6.8}$$

d'où $m' - m'' = c_{16}\nu^{1/3}$. D'autre part il résulte du cas 2° que

$$|\sigma_{m'\nu}(\zeta_0, z_1)| = O(1).$$

Ces faits et le lemme 2 prouvent que

$$\begin{aligned} |\sigma_{m\nu}(\zeta_0, z_1)| &= \left|\sigma_{m'\nu}(\zeta_0, z_1) - \sum_{j=m+1}^{m'} \gamma_{j\nu}(\zeta_0, z_1)\right| \leqq \\ &\leqq |\sigma_{m'\nu}(\zeta_0, z_1)| + O(1) = O(1) \qquad (m'' \leqq m \leqq m'). \end{aligned} \tag{6.9}$$

La relation (6.4) se trouve donc démontré dans le cas 3°.

4° $\qquad 0 < \varepsilon < \dfrac{1}{3}, \quad \lambda = \dfrac{1+r}{1-r} - c_2\nu^{-2/3+2\varepsilon}.$

En raison de la symétrie nous admettons pour ce qui suit que $0 \leqq \beta \leqq \pi$. Il en découle que $|h(w_1)| = |e^{i\vartheta} - e^{i\beta}|^{-1} \geqq |h(w_2)| = |e^{-i\vartheta} - e^{i\beta}|^{-1}$. On peut donc affirmer, en vertu du lemme 3, que la relation (6.4) est établie toutes les fois que $|h(w_1)| = O(\nu^{1/3+\varepsilon/2})$. Or, il est sûr que cette dernière condition n'est pas remplie pour toute valeur de ε lorsque $e^{i\beta}$ se trouve sur un certain arc $B \subset G_1$ contenant l'arc où w_1 se déplace quand ε varie de 0 à $^1/_3$.

Partons donc de l'hypothèse que $e^{i\beta} \in B$ et posons (cf. (6.8))

$$\lambda'' - (k+1)\nu^{-1} = \lambda_k = \frac{1+r}{1-r} - c_2\nu^{-2/3+2\varepsilon_k} = \frac{m_k}{\nu}, \quad \vartheta_k = \vartheta(\lambda_k), \tag{6.10}$$

où $k \geqq 0$ est un entier et

$$\nu^{2\varepsilon_k} = \nu^{2\varepsilon_0}\left(1 + \frac{k}{c_2}\nu^{-1/3-2\varepsilon_0}\right) \text{ resp. } k = c_2\nu^{1/3}(\nu^{2\varepsilon_k} - \nu^{2\varepsilon_0}). \tag{6.11}$$

Selon la condition 4° $\lambda_k > \dfrac{1+r}{1-r} - c_2$; on obtient ainsi de (6.10)

$$0 \leqq k < c_2(\nu - \nu^{1/3+2\varepsilon_0}) = k^*. \tag{6.12}$$

(6.10) montre également que $\{\lambda_k\}$ et $\{m_k\}$ sont des suites décroissantes et, $\vartheta(\lambda)$ étant une fonction décroissante de λ (cf. (5.20)), il s'ensuit que ϑ_k croît avec k.

Cela étant, supposons d'abord que $\beta \geqq \vartheta_0$. Il existe alors un indice $k_0 = k_0(\nu)$ tel que

$$\vartheta_{k_0-1} \leqq \beta \leqq \vartheta_{k_0}. \tag{6.13}$$

Nous pouvons admettre aussi que $k_0 \leqq \frac{1}{2} k^*$, car le même raisonnement s'applique dans le cas contraire. Désignons par k_1 l'entier défini par l'égalité

$$k_1 = k_0 + c_{17}\, \nu^{1/3+\varepsilon_{k_0}/2}. \tag{6.14}$$

On a donc, grâce à (6.11),

$$\nu^{2\varepsilon_{k_1}} = \nu^{2\varepsilon_{k_0}}\left(1 + \frac{c_{17}}{c_2}\, \nu^{-3\varepsilon_{k_0}/2}\right) = c_{18}\, \nu^{2\varepsilon_{k_0}}. \tag{6.15}$$

Il résulte ensuite de (6.13)

$$\begin{aligned} |e^{i\vartheta_{k_1}} - e^{i\vartheta_{k_0}}|^{-1} &= \left(2 \sin \frac{\vartheta_{k_1} - \vartheta_{k_0}}{2}\right)^{-1} \geqq \\ &\geqq |e^{i\vartheta_{k_1}} - e^{i\beta}|^{-1} = |h(w_1(\lambda_{k_1}))|. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Or, on obtient de la première formule (5.20):

$$\cos \vartheta_{k_0} - \cos \vartheta_{k_1} = 2 \sin \frac{\vartheta_{k_1} + \vartheta_{k_0}}{2} \sin \frac{\vartheta_{k_1} - \vartheta_{k_0}}{2} = \frac{1 - r^2}{2r}\, \frac{\lambda_{k_0} - \lambda_{k_1}}{\lambda_{k_0}\lambda_{k_1}},$$

d'où

$$\left(2 \sin \frac{\vartheta_{k_1} - \vartheta_{k_0}}{2}\right)^{-1} = \frac{2\, r\, \lambda_{k_0}\lambda_{k_1}}{1 - r^2}\, \frac{\nu}{k_1 - k_0} \sin \frac{\vartheta_{k_1} + \vartheta_{k_0}}{2}. \tag{6.17}$$

La seconde formule (5.20) fournit la relation

$$\begin{aligned} \sin \vartheta_{k_1} + \sin \vartheta_{k_0} &= 2 \sin \frac{\vartheta_{k_1} + \vartheta_{k_0}}{2} \cos \frac{\vartheta_{k_1} - \vartheta_{k_0}}{2} = \\ &= [c_{19}(\nu, \varepsilon_{k_1}) + c_{19}(\nu, \varepsilon_{k_0})\, \nu^{\varepsilon_{k_0} - \varepsilon_{k_1}}]\, \nu^{-1/3+\varepsilon_{k_1}}, \end{aligned} \tag{6.18}$$

ici nous avons fait usage de la notation (1.12); $c_{19}(\nu, \varepsilon)$ est une quantité bornée pour $0 < \varepsilon < 1/3$ et $\cos \frac{1}{2}(\vartheta_{k_1} - \vartheta_{k_0}) > \cos \vartheta(1) = r$. Il découle donc de (6.15) et (6.18) que

$$\sin \frac{\vartheta_{k_1} + \vartheta_{k_0}}{2} = O(\nu^{-1/3+\varepsilon_{k_0}}). \tag{6.19}$$

On aura enfin, d'après (6.14), (6.16), (6.17), (6.19) et (5.7):

$$|h(w_1(\lambda_{k_1}))| = O(\nu^{1/3+\varepsilon_{k_0}/2}), \quad |\sigma_{m_{k_1}\nu}(\zeta_0, z_1)| = O(1). \tag{6.20}$$

Pour $k > k_1$ on a évidemment $|h(w_1(\lambda_{k_1}))| < |h(w_1(\lambda_k))|$, $\Gamma_{m_k\nu} = O(\Gamma_{m_{k_1}\nu})$ et, par suite,

$$|\sigma_{m_k\nu}(\zeta_0, z_1)| = O(1) \qquad (k_1 < k \leqq k^*). \tag{6.21}$$

Pour $k_0 \leqq k \leqq k_1$ on déduit du lemme 3 de (6.14) et (6.15) que

$$S_1 = \sum_{k=k_0}^{k_1} | \gamma_{m_k\nu} (\zeta_0, z_1) | = O(1) ,$$

d'où, en vertu de (6.20),

$$| \sigma_{m_k\nu}(\zeta_0, z_1) | \leqq | \sigma_{m_{k_1}\nu}(\zeta_0, z_1) | + S_1 = O(1) \qquad (k_0 \leqq k \leqq k_1) . \tag{6.22}$$

Lorsque $k < k_0$ il y a deux cas à envisager: a) $k_0 = O(\nu^{1/3})$; b) $\nu^{1/3} = o(k_0)$. a) Si $k_0 = O(\nu^{1/3})$, il résulte du lemme 2 que

$$S_2 = \sum_{k=0}^{k_0-1} | \gamma_{m_k\nu}(\zeta_0, z_1) | = O(1) .$$

On a donc, vu (6.9),

$$| \sigma_{m_k\nu}(\zeta_0, z_1) | \leqq | \sigma_{m''\nu}(\zeta_0, z_1) | + S_2 = O(1) \qquad (0 \leqq k < k_0) . \tag{6.23}$$

b) Si $\nu^{1/3} = o(k_0)$, on peut trouver un entier k_2 tel que l'on ait

$$k_0 - 1 = k_2 + c_{20}\, \nu^{1/3+\varepsilon_{k_2}/2}. \tag{6.24}$$

Cette équation n'a qu'une seule solution réelle inférieure à $k_0 - 1$. Il découle alors du lemme 3 que

$$S_3 = \sum_{k=k_2}^{k_0-1} | \gamma_{m_k\nu}(\zeta_0, z_1) | = O(1)$$

et de là, en tenant compte de (6.22),

$$|\sigma_{m_k\nu}(\zeta_0, z_1)| \leqq |\sigma_{m_{k_0}\nu}(\zeta_0, z_1)| + S_3 = O(1) \qquad (k_2 \leqq k < k_0) . \tag{6.25}$$

Il reste à étudier les cas où $k < k_2$. Il est évident qu'on a aussi $\nu^{1/3} = o(k_2)$. D'après a) on peut supposer que $k \geqq c_2\nu^{1/3}$; il s'ensuit, grâce à (6.11), que

$$k_2 - k \leqq c_2\, \nu^{1/3+2\varepsilon_{k_2}} \{1 - (\nu^{2\varepsilon_0} + 1)\, \nu^{-2\varepsilon_{k_2}}\} = k' . \tag{6.26}$$

Un raisonnement analogue à celui que nous venons de faire pour $k = k_1$ (cf. (6.10), (6.16), (6.17), (6.19)) fournira la relation

$$|\sigma_{m_k\nu}(\zeta_0, z_1)| = O\{|h(w_1(\lambda_k))|\, \Gamma_{m_k\nu}\} = O\left(\frac{\nu^{1/3+\varepsilon_{k_2}-\varepsilon_k/2}}{k_0 - 1 - k}\right) ; \tag{6.27}$$

et l'on peut déduire de (6.10) que

$$\nu^{-\varepsilon_k/2} = \nu^{-\varepsilon_{k_2}/2} \left(1 - \frac{k_2 - k}{c_2}\, \nu^{-1/3-2\varepsilon_{k_2}}\right)^{-1/4} . \tag{6.28}$$

Ainsi, en vertu de (6.24) et (6.28), (6.27) s'écrira sous la forme

$$|\sigma_{m_k\nu}(\zeta_0, z_1)| = O\left\{\left(\frac{c_{20}}{c_2} + \frac{k_2 - k}{c_2}\, \nu^{-1/3-\varepsilon_{k_2}/2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{k_2 - k}{c_2}\, \nu^{-1/3-2\varepsilon_{k_2}}\right)^{-1/4}\right\} . \tag{6.29}$$

Il est simple de voir que pour $1 \leqq k_2 - k \leqq k'$ (cf. (6.26)) le produit qui figure dans (6.29) atteint son maximum pour $k_2 - k = 1$. Par conséquent

$$|\sigma_{m_k\nu}(\zeta_0, z_1)| = O(1) \qquad (0 \leqq k < k_2). \tag{6.30}$$

Les expressions (6.20)—(6.23), (6.25), (6.30) établissent enfin l'inégalité (6.4).

Soit en second lieu $\beta < \vartheta_0$ (cf. (6.10)). On peut poser alors $\vartheta_{k_0} = \vartheta_0$ et reprendre, avec certaines simplifications, la démonstration qui vient d'être faite pour $\beta \geqq \vartheta_0$.

Le cas où $\beta \geqq \vartheta_{k^*}$ (cf. (6.12)) ne présente aucune nouvelle difficulté.

La relation (6.4) est donc entièrement prouvée dans le cas 4°.

$$5° \qquad \varepsilon = \frac{1}{3}, \quad 1 \leqq \lambda \leqq \frac{1+r}{1-r} - c_2.$$

La démonstration s'effectue de la même manière que dans le cas 4°. L'inégalité $|h(w_2)| \leqq |h(w_1)|$ est encore valable et, selon la valeur de β, on a ou bien $|h(w_1)| = O(\nu^{1/2})$, ou bien $\nu^{1/2} |h(w_1)|^{-1} = o(1)$. Dans le premier cas il découle du lemme 3 que $|\sigma_{m\nu}(\zeta_0, z_1)| = O(1)$. Le second cas se présente lorsque $e^{i\beta}$ se trouve sur un certain arc $B' \subset G_1$. Supposons que l'indice k_0 ait le même sens que dans la formule (6.13), sans admettre maintenant que $k_0 < k^*$. Posons $k_1 = k_0 + c_{21}\nu^{1/2}$, $k_2 = k_0 - c_{21}\nu^{1/2}$. Il vient de (6.17): $|h(w_1(\lambda_{k_1}))| = O(\nu^{1/2})$ et, par suite, $|\sigma_{m_{k_1}\nu}(\zeta_0, z_1)| = O(1)$. On a ensuite, d'après le lemme 3,

$$S_4 = \sum_{k=k_2}^{k_1} |\gamma_{m_k\nu}(\zeta_0, z_1)| = O(1) ;$$

il en résulte que

$$|\sigma_{m_k\nu}(\zeta_0, z_1)| = O(1) ; \qquad (k_2 \leqq k \leqq k_1).$$

Il est clair de plus que $|h(w_1(\lambda_k))| = O(\nu^{1/2})$ donc $|\sigma_{m_k\nu}(\zeta_0, z_1)| = O(1)$ pour $k < k_2$ et $k > k_1$.

(6.4) est ainsi établie dans le cas 5°.

Les conditions du lemme 1 sont donc remplies.

§ 7. Uniformité de la convergence

Il faut prouver l'uniformité de la convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\zeta_0) z_2^n$ pour $|z_2| = 1$. Posons, en tenant compte de (3.1) et (6.3),

$$B_m = \sum_{n=0}^{m} b_n(\zeta_0) z_2^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sigma_{m\nu}(\zeta_0, z_1) a_\nu z_1^\nu .$$

Nous allons montrer qu'en désignant par $\eta > 0$ un nombre aussi petit que l'on veut, il existe un entier $m_0 = m_0(\eta)$ tel que

$$|B_{m+p} - B_m| = \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} [\sigma_{m+p,\nu}(\zeta_0, z_1) - \sigma_{m\nu}(\zeta_0, z_1)] a_\nu z_1^\nu \right| \leqq \eta , \tag{7.1}$$

pour tous les entiers $p > 0$, $m > m_0$. En effet, on obtient de (7.1)

$$(7.2)\quad \begin{aligned} |B_{m+p} - B_m| &\leqq \sum_{\nu=0}^{\nu_0-1} |\sigma_{m+p,\nu}(\zeta_0, z_1) - \sigma_{m\nu}(\zeta_0, z_1)|\,|a_\nu| + \\ &+ \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} |\sigma_{m+p,\nu}(\zeta_0, z_1) - \sigma_{m\nu}(\zeta_0, z_1)|\,|a_\nu| = \Sigma_1 + \Sigma_2 . \end{aligned}$$

On a, par hypothèse, $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| = a$ (cf. (1.4)), ν_0 peut donc être choisi tel qu'il vérifie l'inégalité

$$(7.3)\qquad \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} |a_\nu| \leqq \frac{\eta}{4K} .$$

D'autre part, d'après (6.4),

$$(7.4)\qquad |\sigma_{m+p,\nu}(\zeta_0, z_1) - \sigma_{m\nu}(\zeta_0, z_1)| \leqq 2K .$$

Il découle de (7.3) et (7.4) que

$$(7.5)\qquad \Sigma_2 \leqq \frac{\eta}{2} .$$

Nous avons vu (cf. (6.2)) que $\lim\limits_{m\to\infty} \sigma_{m\nu}(\zeta_0, z_1) = 1$ pour chaque ν. Comme ν_0 est fixé par (7.3), il existe un entier $m_0 = m_0(\eta)$ tel que l'inégalité

$$(7.6)\qquad |\sigma_{m+p,\nu}(\zeta_0, z_1) - \sigma_{m\nu}(\zeta_0, z_1)| \leqq \frac{\eta}{2a}$$

soit vérifiée lorsque $m > m_0$ et $\nu < \nu_0$. Il suit ainsi de (1.4) et (7.6) que

$$(7.7)\qquad \Sigma_1 \leqq \frac{\eta}{2} .$$

(7.1) est donc la conséquence de (7.5), (7.7) et (7.2).

§ 8. Démonstration du théorème 3

On établira l'existence d'une fonction $f_1(z)$ régulière pour $|z| < 1$ se développant en une série de Taylor $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ uniformément mais non absolument convergente pour $|z| = 1$, ayant une fonction transformée $f_2(z)$ dont la série de Taylor $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) z^\nu$ est de même uniformément mais non absolument convergente pour $|z| = 1$ quelle que soit la valeur de ζ_0. Le raisonnement qui suit est fondé sur le théorème suivant de L. Fejér [11]: *Soit $\Phi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ une fonction régulière et univalente pour $|z| < 1$, continue pour $|z| \leqq 1$. Alors la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ est uniformément convergente sur la circonférence $|z| = 1$.*

Désignons par Δ un domaine limité par une courbe de Jordan J ayant au moins un point, soit P, non accessible par une courbe de longueur finie de l'intérieur de Δ. L'exemple d'une telle courbe est représenté sur la figure 3. J y est composée des côtés d'un triangle dont P est un sommet et d'une suite infinie de couples de coupures rectilignes s'accumulant en P. Chaque coupure parcourue dans les deux sens représente une ligne double. Chaque couple de coupures est formé de deux segments de droite parallèles à une direction fixe et limite une bande; la longueur totale de toutes ces bandes est supposée infinie.

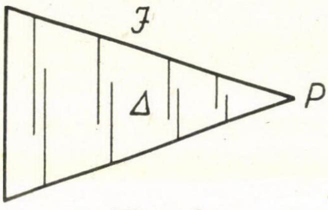


Figure 3.

Cela étant, soit $f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ la fonction régulière et univalente pour $|z| < 1$, continue pour $|z| \leq 1$ qui applique le cercle $|z| < 1$ sur Δ et la circonférence $|z| = 1$ sur J tel que P soit le point homologue à $z = 1$. Selon le théorème cité de FEJÉR $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ est uniformément convergente pour $|z| = 1$. Le rayon (0, 1) du cercle $|z| \leq 1$ se transforme par $f_1(z)$ en une courbe Γ_1 allant d'un point de Δ au point P. Soit $0 < \xi < 1$, alors $f_1(z)$ change l'intervalle $(0, \xi)$ de l'axe réel en un arc de Γ_1 de longueur

$$(8.1) \qquad \Lambda_1(\xi) = \int_0^\xi |f_1'(x)|\, dx \geq \int_0^\xi \Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\, |a_\nu|\, x^{\nu-1}\Big)\, dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|\, \xi^\nu.$$

La longueur de Γ_1 étant infinie, $\Lambda_1(\xi) \to \infty$ lorsque $\xi \to 1$, c'est-à-dire $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| = \infty$. La série $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ est donc uniformément mais non absolument convergente pour $|z| = 1$.

D'autre part la fonction $Z = \dfrac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z}$ applique le cercle $|z| \leq 1$ sur lui-même en faisant correspondre au point $z = \dfrac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0} = e^{i\varphi}$ le point $Z = 1$. Par conséquant $f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0)\, z^\nu$ est également régulière et univalente pour $|z| < 1$, continue pour $|z| \leq 1$, applique le cercle $|z| < 1$ sur Δ et la circonférence $|z| = 1$ sur J, P étant le point homologue à $z = e^{\varphi i}$. La série $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0)\, z^\nu$

est uniformément convergente pour $|z| = 1$ selon le théorème de FEJÉR. Le rayon $(0, e^{i\varphi})$ du cercle $|z| \leq 1$ se transforme par $f_2(z)$ en une courbe Γ_2 issue d'un point de Δ et aboutissant en P. En posant $z = \varrho e^{i\varphi}$, on peut écrire sans plus la relation analogue à (8.1):

$$\Lambda_2(\xi) = \int_0^\xi |f_2'(\varrho e^{i\varphi})| \, d\varrho \leq \int_0^\xi \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \, |b_\nu(\zeta_0)| \, \varrho^{\nu-1}\right) d\varrho = \sum_{\nu=1}^{\infty} |b_\nu(\zeta_0)| \, \xi^\nu$$

et $\Lambda_2(\xi) \to \infty$ pour $\xi \to 1$, donc $\sum_{\nu=0}^{\infty} |b_\nu(\zeta_0)| = \infty$. La série $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) z^\nu$ est aussi uniformément mais non absolument convergente pour $|z| = 1$ quelle que soit la valeur de ζ_0.

On retrouve la même idée dans la note [12] de J. E. LITTLEWOOD qui emploie aussi le domaine du type Δ (dit «domaine crocodile») pour démontrer que certaines séries ne sont pas absolument convergentes.

(Reçu le 9 Août 1961, revisé le 25 Avril 1962.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] TURÁN, P.: „A remark concerning the behaviour of a power-series on the periphery of its convergence circle." *Publications de l'Institut Mathématique de l'Académie Serbe des Sciences* **12** (1956) 19—26.

[2] ALPÁR, L.: „Remarque sur la sommabilité des séries de Taylor sur leurs cercles de convergence, I., II., III." *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences* **3** (1958) 1—12, **3** (1958) 141—158, **5** (1960) 97—152.

[3] ALPÁR, L.: „Egyes hatványsorok abszolút konvergenciája a konvergencia kör kerületén". *Matematikai Lapok* **11** (1960) 312—322.

[4] HARDY, G. H.: „A theorem concerning Taylor's series". *The quarterly Journal of pure and applied Mathematics* **44** (1913) 147—160.

[5] FEJÉR, L.: „Über Potenzreihen, deren Summe im abgeschlossenen Konvergenzkreise überall stetig ist." *Sitzungsberichte der K. Bayer. Akad. der Wiss., Math.—phys. Kl.*, (1917) 33—50.

[6] KNOPP, K.—LORENTZ, G. G.: „Beiträge zur absoluten Limitierung." *Archiv der Mathematik* **2** (1949—50) 10—16.

[7] BAJŠANSKI, B. M.: „Sur une classe générale de procédés de sommation du typ Euler—Borel." *Publications de l'Institut Mathématique de l'Académie Serbe des Sciences* **10** (1956) 131—152.

[8] BANACH, S.: *Théorie des opérations linéaires.* Monografje Matematyczne, Tome I., Warszawa (1932).

[9] ZYGMUND, A.: *Trigonometrical series.* Chelsea Publishing Co. New York (1952).

[10] DE BRUIJN, N. G.: *Asymptotic methods in analysis.* North-Holland Publishind Co. Amsterdam, P. Noordhoff-Groeningen (1958).

[11] FEJÉR, L.: „La convergence sur son cercle de convergence d'une série de puissance effectuant une représentation conforme du cercle sur le plan simple." *Comptes Rendus* (Paris) **156** (1913) 46—49.

[12] LITTLEWOOD, J. E.: "On a theorem of Hardy and Littlewood." *The Journal of the London Mathematical society* **13** (1938) 194—195.

О НЕКОТОРЫХ ПРЕОБРАЗОВАННЫХ ВИДАХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ, АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИХСЯ НА ГРАНИЦАХ СВОИХ КРУГОВ СХОДИМОСТИ

L. ALPÁR

Резюме

Пусть $f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ регулярная в круге $|z| < 1$ функция, и $\zeta_0 (0 < |\zeta_0| < 1)$ зафиксированное число. Функция $f_2(z)$, определенная соотношением

$$f_1\left(\frac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z}\right) = f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) z^\nu \tag{1.1}$$

является тогда тоже регулярной функцией для $|z| < 1$. Если предположить еще, что $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| < \infty$, тогда спрашивается, что можно высказать о поведении степенного ряда функции $f_2(z)$ на границе ее круга сходимости. На этот вопрос дают ответ две первые теоремы, доказанные в этой статье. Третья теорема является обратной теоремой второй.

Первая теорема утверждает, что существует такая функция $f_1(z)$, что степенный ряд преобразованной по (1.1) функции $f_2(z)$ не абсолютно сходится на окружности $|z| = 1$, то есть $\sum_{\nu=0}^{\infty} |b_\nu(\zeta_0)| = \infty$.

Напротив, вторая теорема высказывает, что для любой функции $f_1(z)$ из выполнения условия $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| < \infty$ всегда следует равномерная сходимость степенного ряда $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) z^\nu$ для всех $|z| = 1$ и далее, если $|z_1| = |z_2| = 1$ и $z_1 = \frac{z_2-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z_2}$, тогда

$$f_1(z_1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z_1^\nu = f_2(z_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) z_2^\nu .$$

Сравнивая эти две теоремы мы видим, что существуют такие функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$, которые в соответствующих точках единичного круга $|z| = 1$ имеют те же самые значения, когда z_1 и z_2 пробегают окружность $|z| = 1$ и, всё таки, значения первой функции представлены абсолютно сходящимся степенным рядом, а значение второй равномерно, но не абсолютно сходящимся степенным рядом.

Третья теорема утверждает, что существует такая функция $f_1(z)$, степенный ряд которой равномерно, но не абсолютно сходится на окружности $|z| = 1$ и преобразованная функция $f_2(z)$, которой представлена также только равномерно, но не абсолютно сходящимся на окружности $|z| = 1$ степенным рядом, то есть для которой $\sum_{\nu=0}^{\infty} |b_\nu(\zeta_0)| = \infty$, каким бы ни было значение числа ζ_0, если только $0 < |\zeta_0| < 1$. Это означает, что степенные ряды равномерно, но не абсолютно сходящиеся на окружности $|z| = 1$, не все могут быть получены путем какого бы то ни было преобразования типа (1.1) степенного ряда, абсолютно сходящимся на окружности $|z| = 1$.

SUR UN PROBLÈME DE SUBSTITUTION DE P. VERMES

par

J. DÉNES — C. PÁSZTOR

Nous connaissons ce problème de P. Vermes d'après la communication de G. Grätzer. P. Vermes nous a fait savoir par lettre que ce problème a été publié dans [3] et résolu dans [4]. Son résultat est identique au nôtre.

Problème. *Est-ce que toutes les substitutions α sur les éléments de l'ensemble $E = \{1, 2, \ldots\}$ peuvent être le produit des* chapelets[1] *de nombre fini?*

Désignons par S_E l'ensemble de toutes les substitutions α sur les éléments de E.

Dans cet article nous examinons la structure de cycle des substitutions infinies et sa relation avec la structure du chapelet. L'un de notre résultat est que toutes les substitutions $\alpha \in S_E$ peuvent être le produit de deux chapelets au plus. (Theorème 3.)

Lemme 1. *Une substitution $\alpha \in S_E$ est un chapelet où le produit $\alpha = \sigma\eta^{-1}$, où η^{-1} est un chapelet et σ une substitution qui n'a que des cycles de longueur infinie.*

Démonstration. On sait (voir Serret [2]) qu'en multipliant une substitution π composée de k cycles par une transposition τ, la substitution $\pi\tau$ se compose de $k+1$ ou $k-1$ cycles selon que les deux éléments de τ sont dans le même cycle de la substitution π ou non.

Soit $\pi = \xi_1 \xi_2$ où ξ_1 est un cycle de longueur finie et ξ_2 est un cycle de longueur infinie, $\tau = (ab)$ où $a \in \xi_1$, $b \in \xi_2$, $a,b \in E$ donc $\pi\tau$ est une substitution composée d'un seul cycle de longueur infinie.

Soit $\alpha \in S_E$, si α n'est pas un chapelet, rangeons ses cycles conformément à la grandeur de leurs plus petits éléments. Désignons par $a_{n,1}$ le plus petit élément du cycle ξ_n, alors $a_{n,1} < a_{n+1,1}$.

Le lemme est vrai, si tous les cycles ξ_i de α sont de longueur infinie. Supposons que α a aussi des cycles de longueur finie.

---

[1] Une substitution $a = \prod_{i=1}^{\infty} a_i$ sur les éléments de l'ensemble E est un chapelet, si l'on peut décomposer la droite de nombre E en des sections de longueur finie (ce sont des grains du chapelet) de sorte que a_i ne permute que les éléments qui sont dans l'i-ième section.

Les chapelets sont appelées par P. Vermes „string" dont les éléments sont les „beads". Là, les élément non nulle d'un matrix de substitution de chapelet se figurent dans les „grains" (carré fini) se situant le long de la diagonale du matrix.

Désignons par $N(f)$ l'ensemble des nombres d'ordre des cycles de longueur finie et du premier cycle de longueur infinie (s'il existe) de α, et par $a_{n,1}$, le plus petit élément du cycle ξ_n, alors

$$\sigma = \alpha \prod_{n \varepsilon N(f)} (a_{n,1}, a_{n,1} - 1) = \alpha\eta$$

n'a que des cycles infinie et par conséquence

$$\alpha = \sigma\eta^{-1}$$

où σ n'a que des cycles de longueur infinie, η et η^{-1} sont des chapelets.

Remarque 1. Dans la décomposition en cycle de η il n'y a que des cycles de longueur finie car dans le cas contraire dans la substitution α les plus petits éléments des cycles consécutifs seraient $k, k + 1, k + 2, \ldots$ C'est à dire que α serait déjà un chapelet.

Remarque 2. Si α n'a que des cycles de longueur finie, σ n'a qu'un seul cycle de longueur infinie.

Théorème 1. *Une substitution σ_1 n'ayant qu'un seul cycle de longuer infinie peut être le produit de deux chapelets*[2].

Démonstration. Nous montrerons tout d'abord quelques décompositions de σ_1 en produit de deux substitutions d'ordre fini dont nous aurons besoin plus tard.

a) Soit

$$\sigma_1 = (\ldots a_{-1}\, a_0\, a_1 \ldots).$$

Plaçons d'une manière quelconque des lignes séparatives de nombre infini entre les éléments de σ_1, mais de façon qu'il y ait au moins un élément de σ_1 entre deux lignes consécutives. Donnons comme nombre d'ordre le chiffre 1 à une partie finie située entre deux lignes consécutives quelconques. Soient les nombres impairs (les nombres pairs) dans l'ordre de succession à droite (à gauche) du point initial, chaques chiffres constituant le numéro d'ordre de chaque partie. Désignons les éléments de l'i-ième partie par $a_{i,k}$:

$$\begin{aligned}\sigma_1 = (\ldots | \underbrace{a_{2n,1} \ldots a_{2n,n(2n)}}_{\ldots 2n \ldots} | \ldots | \underbrace{a_{2,1} \ldots a_{2,n(2)}}_{\ldots 2 \ldots} | \times \\ \times \underbrace{a_{1,1} \ldots a_{1,n(1)}}_{\ldots 1 \ldots} | \underbrace{a_{3,1} \ldots a_{3,n(3)}}_{\ldots 3 \ldots} | \ldots | \ldots) \qquad (1)\end{aligned}$$

Soit l'i-ième cycle ($i = 1, 2, \ldots$) de la substitution π la réunion des $2(i - 1)$-ième et $2(i - 1) + 1$-ième parties de σ_1 où l'ordre des éléments est le même que dans σ_1. Cherchons les substitutions τ et τ' qui sont les résolutions des équations

$$\sigma_1 = \tau\pi \text{ et } \sigma_1 = \pi\tau' \qquad (2)$$

---

[2] σ_1 est décomposable en produit de deux substitutions d'ordre 2. (Voir [5] page 8). Décomposition:

$$(\ldots \bar{a}_2 \bar{a}_1 a_1 a_2 \ldots) = \prod_{i=1}^{\infty} (a_i \bar{a}_i) \prod_{i=1}^{\infty} (a_{i+1} \bar{a}_i).$$

Cela est aussi vrai dans le cas d'une substituion α sur les éléments d'un ensemble fini. (Voir [1] page 15, [5] page 8.)

où π contient les cycles de longueur finie de forme suivant

$$\pi = (a_{1,1} \dots a_{1,n(1)})\,(a_{2,1} \dots a_{2,n(2)}\, a_{3,1} \dots a_{3,n(3)}) \dots$$

Nous recevons facilement que

$$\tau = \prod_{i=1}^{\infty} (a_{2i,n(2i)}\, a_{2i-1,n(2i-1)})$$

et que

$$\tau' = (a_{1,1}\, a_{3,1}) \prod_{i=1}^{\infty} (a_{2i,1}\, a_{2i+3,1})$$

où $a_{k,1}$ est le premier élément (pas le plus petit) et $a_{k,n(k)}$ le dernier élément de la k-ième partie de σ_1.

b) Obtenons $\pi^{(1)}$ de π en eliminant quelques de ses éléments $a_{i,j(i)}$ où $1 < j(i) < n(i)$ et cherchons une telle substitution $\tau^{(1)}$ que

$$\sigma_1 = \tau^{(1)} \pi^{(1)} \tag{3}$$

Soit par exemple

$$\pi^{(1)} = (a_{1,1}\, a_{1,2}\, a_{1,4}\, a_{1,6} \dots a_{1,n(1)})\,(a_{2,1}\, a_{2,4} \dots a_{2,n(2)}\, a_{3,1}\, a_{3,2}\, a_{3,5} \dots a_{3,n(3)}) \dots$$

où les éléments $a_{1,3}, a_{1,5}, a_{2,2}, a_{2,3}, a_{3,3}, a_{3,4} \dots$ de σ_1 ne figurent pas dans $\pi^{(1)}$. Désignons ces éléments ne figurant pas avec $\bar{a}_{i,k}$.

$$\tau^{(1)} = \underbrace{(a_{1,2}\, \bar{a}_{1,3})\,(a_{1,4}\, \bar{a}_{1,5})\,(a_{1,n(1)}\, a_{2,n(2)})}_{\tau_1^{(1)}}\,\underbrace{(a_{2,1}\, \bar{a}_{2,2}\, \bar{a}_{2,3})\,(a_{3,2}\, \bar{a}_{3,3}\, \bar{a}_{3,4})\,(a_{3,n(3)}\, a_{4,n(4)})}_{\tau_2^{(1)}} \dots \tag{4}$$

C'est à dire

$$\tau^{(1)} = \tau(a_{1,2}\, \bar{a}_{1,3})\,(a_{1,4}\, \bar{a}_{1,5})\,(a_{2,1}\, \bar{a}_{2,2}\, \bar{a}_{2,3}) \dots .$$

On voit que $\tau^{(1)}$ permute encore les éléments $\bar{a}_{i,j}$ de sorte que des cycles de $\tau^{(1)}$ se composent des éléments $\bar{a}_{i,j+k}$ $(k = 1, 2, \dots l)$ et de l'élément $a_{i,j}$.

Après tout cela il est facile de démontrer une décomposition de σ_1 que $\sigma_1 = \tau^{(1)}\pi^{(1)}$ où $\tau^{(1)}$ et $\pi^{(1)}$ sont aussi des chapelets. Construction de $\pi^{(1)}$:

Considérons le plus grand élément i_0 d'une partie finie de σ_1. Faisons une marque à $a_i \in \sigma_1$ si $a_i \leqq i_0$. Désignons par $a_{1,1}\, a_1(_{n(1)})$ le premier (dernier) élément marqué. La partie d'ordre 1 de σ_1 se compose des éléments $a_{1,i}$ qui se situent entre $a_{1,1}$ et $a_{1,n(1)}$ (désigné par $\{a_{1,1}\, a_{1,n(1)}\}$). Le premier cycle de $\pi^{(1)}$ se compose des élément marqués de σ_1 où $i_0 \geqq a_{1,i} \geqq 1$ en conservant leur ordre de σ_1.

Vu (1) l'élément qui est le voisin de gauche (de droite) de $a_{1,1}$ $(a_{1,n(1)})$ est $a_{2,n(2)}$ $(a_{3,1})$. Considérons le plus grand élément i_1 de $\{a_{2,n(2)}, a_{3,1}\}$ Il est clair que $i_1 > i_0$. Désignons par a_i^1 les $a_i \in \sigma_1$ si $i_0 < a_i \leqq i_1$. Soit $a_{2,j}^1$ $(a_{3,s}^1)$ le premier (dernier) élément ainsi marqué. (Il est possible que $a_{2,j}^1 = a_{2,n(2)}^1$ ou $a_{3,1}^1 = a_{3,s}^1$) Vu (1) l'élément qui est le voisin de gauche (de droite) de $a_{2,j}^1$ $(a_{3,s}^1)$ est $a_{2,j-1}$ $(a_{3,s+1})$. Considérons le plus grand élément i_2 de $\{a_{2,j-1}, a_{3,s+1}\}$. Désignons par a_i^2 les $a_i \in \sigma_1$ si $i_1 < a_i \leqq i_2$. Soit $a_{2,1}^2$ $(a_{3,n(3)}^2)$ le premier (dernier) élément marqué. (Il est possible que $a_{2,1}^2 = a_{2,j-1}^2$ ou $a_{3,n(3)}^2 = a_{3,s+1}^2$)

Les parties d'ordre 2 et 3 de σ_1 seront $\{a_{2,1}^2, a_{2,n(2)}^1\}$ et $\{a_{3,1}^1\, a_{3,n(3)}^2\}$. Le deuxième cycle de $\pi^{(1)}$ se compose des éléments marqués de $\{a_{2,1}^2, a_{2,n(2)}^1\}$ et de $\{a_{3,1}^1, a_{3,n(3)}^2\}$ $i_0 < a_{2,j}^m, a_{3,k}^m \leqq i_2$ $(m = 1, 2)$ en conservant l'ordre des éléments de σ_1. En continuant cette procédure les cycles suivants de $\pi^{(1)}$ permutent des éléments $i_2 < a_{4,j}, a_{5,k} \leqq i_4 \ldots$ donc $\pi^{(1)}$ est un chapelet.

Puisque la structure de $\tau^{(1)}$ est comme (4), nous pouvons voir que $\tau_1^{(1)}$ ne permute que les éléments $i_1 < a_i \leqq i_3$ entre eux, $\tau_2^{(1)}$ les éléments $i_3 < a_i \leqq i_5$ donc $\tau^{(1)}$ est aussi un chapelet.

Théorème 2. *La substitution* $\alpha = \sigma_1 \eta$ *(*η *est un chapelet) peut être le produit de deux chapelets.*

Démonstration. Nous avons montré que $\sigma_1 = \tau^{(1)}\pi^{(1)}$. Ici nous exprimerons σ_1 en un autre forme $\sigma_1 = \tau^{(2)}\pi^{(2)}$ où $\tau^{(2)}$ et $\pi^{(2)}\eta$ seront des chapelets. Le plus grand élément du premier cycle de $\pi^{(1)}$ est i_0. Examinons quel est l'ensemble dont les éléments sont permutés seulement entre eux par η et dont le plus grand élément $i_0' \geqq i_0$. Naturellement le premier cycle de $\pi^{(2)}$ se compose des éléments $i_0' \geqq i_0 \geqq a_i$. La construction ultérieure de $\pi^{(2)}$ reste la même que celle de $\pi^{(1)}$ mais nous choisissons comme ci-dessus l'élément i_2' au lieu de i_2. Ainsi $\pi^{(2)}\eta = \pi^{(3)}$ sera un chapelet. Car la construction de $\tau^{(2)}$ n'a pas changé donc $\tau^{(2)}$ est aussi un chapelet. Et ainsi $\sigma_1\eta = \tau^{(2)}\pi^{(3)}$.

Théorème 3. *Une substitution quelconque* $\alpha_n = \sigma_n\eta$ *peut être le produit de deux chapelets. Ici* η *est un chapelet,* σ_n *est une substitution constituée de* n *cycles de longueur infinie* $(1 \leq n \leq \infty)$ (vue lemme 1).

Démonstration. a) Tout d'abord nous montrerons que la décomposition $\sigma_n = \varrho\tau$ d'une substitution σ_n $(1 \leq n \leq \infty)$ est toujours possible, où τ est un chapelet et ϱ est une substitution de cycle de longueur finie.

Nous exprimerons σ_1 comme dans (2) en forme $\sigma_1 = \pi\tau'$ où τ' est une substitution d'ordre 2. Pour que τ' soit un chapelet au cours de la construction on doit simplement obtenir l'inégalité toujours réalisable

$$\max(a_{2i,1}, a_{2i+3,1}) < \min(a_{2(i+1),1}, a_{2(i+1)+3,1}) \tag{5}$$

car en cas $i > j$ σ_i et σ_j n'ont pas l'élément commun, le produit $\tau_i'\pi_j$ est commutable et ainsi

$$\sigma_n = \prod_{i=1}^{n} \pi_i \tau_i' = \prod_{i=1}^{n} \pi_i \prod_{i=1}^{n} \tau_i' = \pi_{(n)} \tau_{(n)} .$$

$\tau_{(n)}$ est un chapelet si tous les éléments d'une transposition quelconque de $\tau_{(n)}$ sont plus petits ou plus grands que les deux éléments d'une autre transposition quelconque de $\tau_{(n)}$.

Pour l'obtenir il suffit que (5) soit vrai pour tous les τ_i' et qu'après le rangement dans l'ordre de grandeur des transpositions de $\tau_{(n)}$ l'ordre des transpositions soit le suivant:

L'ordre des transpositions	l'ordre des cycles de longueur infinie						
	1	2	3		...	n	...
1	1	2	5	9			
2	3	4	8				
3	6	7					
4	10						

Si le j-ième élément de l'i-ième ligne est k, alors la k-ième transposition de $\tau_{(n)}$ est l'i-ième transposition du j-ième cycle. Cela est toujours réalisable. Ainsi $\tau_{(n)}$ est un chapelet et $\pi_{(n)}$ est une substitution de longueur finie dans $\sigma_n = \pi_{(n)}\tau_{(n)}$.

b) Nous montrerons maintenant que dans la décomposition $\alpha = \sigma_n \eta = \pi_{(n)}\tau_{(n)}\eta$ le produit $\tau_{(n)}\eta$ peut être un chapelet, parce qu'on peut toujours obtenir que les éléments d'une transposition soient plus grands que le plus grand élément de l'ensemble — contenant les éléments de la transposition précédente — dont les éléments sont permutés entre eux par η. Ainsi $\alpha = \pi_{(n)}\tau_{(n)}^{(1)}$.

c) En appliquant le résultat du lemme 1 nous pouvons construire le cycle σ_1 de longueur infinie et le chapelet η que $\pi_{(n)} = \sigma_1 \eta$ et $\eta \tau_{(n)}^{(1)}$ soit un chapelet. En désignant par $(a_1 a_1')$, $(a_2 a_2') \ldots$ les transpositions consécutives de $\tau_{(n)}^{(1)}$ et en considérant que

$$\pi_{(n)} = (a_1 \ldots)(a_2 \ldots)(a_3 \ldots a_1' \ldots)(a_4 \ldots a_2' \ldots)(a_5 \ldots)(a_6 \ldots a_3' \ldots) \ldots$$

on obtiens que:

$$\eta = (a_1 a_1' a_2)(a_3 a_3' a_4 a_5) \ldots$$

est un tel chapelet. Car $\eta \tau_{(n)}^{(1)} = \eta^{(1)}$ est un chapelet et ainsi $\alpha = \sigma_1 \eta^{(1)}$. Selon le théorème 2 $\alpha = \sigma_1 \eta^{(1)}$ peut être le produit de deux chapelets.

Théorème 4. *Tous les chapelets peuvent être le produit de deux chapelets speciaux*[3] *au plus.*

Démonstration. Car tous les chapelets η sont le produit des substitutions η_i sur les éléments des ensembles $M_i = \{a_{i_1} \ldots a_{i_n}\}$ où $M_i \cap M_j = 0$ si $i \neq j$ il est suffisant de montrer qu'une substitution β sur les éléments de l'ensemble fini M peut être le produit de deux chapelets spéciaux au plus.

Considérons les cycles de β écrits dans l'ordre comme dans la démonstration du lemme 1. Le premier élément d'un cycle soit son plus petit élément. Tout comme dans le lemme 1

$$\beta(b_{2,1}\, b_{2,1} - 1)(b_{3,1}\, b_{3,1} - 1) \ldots (b_{n,1}\, b_{n,1} - 1) = \beta\eta = \gamma$$

γ et η sont des chapelets spéciaux et

$$\beta = \gamma \eta^{-1}$$

Théorème 5. *Une substitution $\alpha \in S_E$ est le produit de quatre chapelets spéciaux au plus.*

Démonstration. Ce théorème découle des théorèmes 3 et 4.

(Reçu le 12 Avril 1962.)

[3] Un chapelet $a = \prod_{i=1}^{\infty} a_i$ est un chapelet spécial si chacun des grains a_i constitue d'un seul cycle, (y compris les cycles de longueur un aussi.) Par ex: $\eta = (1,2)(4,5)$ est un chapelet spécial dont les grains sont $(1,2)$, (3), $(4,5)$, (6), $(7), \ldots$ $\eta = (1,3)(5,7)(9,11), \ldots$ est un chapelet dont les grains sont $[(1,3)(2)]$, $[(4)]$, $[(5,7)(6)]$, $[(8)], \ldots$, ainsi η n'est pas un chapelet special.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Carmichael, R. D.: *Introduction to the theory of groups of finite order*. New-York Dover Publ. 1956.
[2] Serret, J. A.: *Handbuch der höheren Algebra*. Taubner, Leipzig, 1879.
[3] Vermes, P.: „Matrix structure of basic sets of polynomials." *Annales Univ. Sci. Budapestinensis de R. Eötvös Nom. Sectio Mat.* 1960/61, 383—388.
[4] Vermes, P.: „Multiplicative groups of row-and column finite infinite matrices." *Annales Univ. Sci. Budapestinensis de R. Eötvös Nom. Sectio Mat.* 1962 (sous presse).
[5] Wielandt, H.: *Unendliche Permutationsgruppen*. Tübingen Universität, 1959.

ОБ ОДНОЙ ПОДСТАНОВОЧНОЙ ПРОБЛЕМЕ VERMES-A

J. DÉNES и C. PÁSZTOR

Резюме

Мы исследуем разложение на множители произвольных подстановок α определенные на множество $E = \{1, 2, \ldots\}$, где множители умножения являются цепи, (подстановка $\alpha = \prod_{i=1}^{\infty} c_i$ определенная на множество E называется цепи — st ing, chapelet — если числовая прямая разложена на конечные дизъюнктные части таким образом, что c_i пермутирует только элементы, входящие в $i^{-\text{ой}}$ части) или специальные цепи. (Цепь $\alpha = \prod_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ тогда называется специальной, если каждый α_i является подстановкой из одного цикла).

Полученные результаты:

1) Произвольную подстановку α, определенную на множестве E (α не является цепью), можно написать как произведение двух цепей.

2) Произвольную подстановку α, определенную на множестве E (α не является специальной цепью), можно написать как произведение четырех специальных цепей.

MENGENTHEORETISCHE BETRACHTUNG DER EUKLIDISCHEN UND HAUPTIDEALRINGE

von

G. POLLÁK

In dieser Arbeit verfolgen wir ein zweifaches Ziel. Einerseits wird durch eine mengentheoretische Verallgemeinerung des Begriffes des euklidischen bzw. des Hauptidealringes die Aufmerksamkeit des Lesers auf einige — mit den erwähnten verwandte — Begriffe hingelenkt, andererseits wird sich dabei geklärt, welche Eigenschaften der genannten Ringe von mengentheoretischer Herkunft sind, und welche im wesentlichen auf den in den Ringen definierten Operationen beruhen.

Bezüglich des ersten bemerken wir folgendes. Das gruppentheoretische Analogon des Hauptidealringes (bzw. euklidischen Ringes), das durch das übliche Ersetzen des Begriffes des Ideals durch den Begriff des Normalteilers entsteht, scheint vielzu gekünstelt und kompliziert zu sein. Beschränken wir uns dagegen auf abelsche Gruppen, so gelangen wir zu der wohlbekannten Tatsache, dass die Untergruppen einer zyklischen Gruppe selbst zyklisch sind, und zu der nicht weniger trivialen Ergänzung, dass die zyklischen Gruppen (die also in diesem Fall die Rolle der Hauptidealringe spielen) auch schon »euklidisch« im geeigneten Sinne sind. Die kommutativen Hauptidealringe (im weitesten Sinne) werden in [4] untersucht, die kommutativen Halbgruppen, deren sämtliche Ideale Hauptideale sind, werden vom Herrn L. Megyesi untersucht. Aus den unendlich vielen bisher nicht beschriebenen Spezialfällen der im folgenden eingeführten euklidischen und Hauptidealmengen möchten wir als die interessantesten die nichtkommutativen euklidischen (siehe [6]) und Hauptidealringe und ihre halbgruppentheoretischen Analoga erwähnen. Es wäre auch nicht ohne Interesse die Ringe, deren sämtliche Unterringe durch je ein Element erzeugt werden, zu beschreiben.

In Hinsicht des zweiten Ziels wird sich u.a. ergeben, dass der Satz, laut dessen alle euklidischen Ringe Hauptidealringe sind, ein Spezialfall eines mengentheoretischen Satzes, also unabhängig von den algebraischen Operationen ist. Die Eigenschaften des Idealverbands eines euklidischen Ringes sind dagegen durchaus den algebraischen Eigenschaften des Ringes zu verdanken, wie es aus Satz 4 klar wird.

§ 1. Euklidische Mengen

Die Menge H soll eine Klassenmenge heissen, wenn zu jedem Element a aus H gewisse Teilmengen H_a^α von H zugeordnet sind, wobei α eine von a abhängige Indexmenge Γ_a durchläuft.

Die Teilmengen H_a^a werden wir *Restklassen nach a* nennen. Sie werden die Rolle der Restklassen mod (a) in einem Ringe übernehmen. Bequemlichkeitshalber wollen wir noch die (in Ringen etwas ungewöhnliche, aber natürlich ganz unwesentliche) Voraussetzung machen, dass unter den Restklassen nach a immer auch die lehre Menge vorkommt.

Ein solches Element, welchem nur die leere Restklasse zugeordnet ist, nennen wir ein Zero[1]). Im allgemeinen ist es natürlich nich ausgeschlossen, dass in H mehrere Zeros existieren. Die Menge sämtlicher Zeros wird durch Z bezeichnet.

Endlich soll eine Menge $M(\subseteqq H)$ ein vollständiges Restsystem nach a genannt werden, falls $M \cap H_a^a$ für jedes nichtleeres H genau ein Element hat und ausserdem $M \subseteqq \bigcup\limits_a H_a^a$ besteht.

Es gilt nun

Satz 1. *Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent :*

A) *es gibt eine Abbildung φ der Klassenmenge H in eine wohlgeordnete Menge, wobei in jeder nichtleeren Restklasse H_a^a ein Element b mit $\varphi(b) < \varphi(a)$ enthalten ist;*

B) *für jede Abbildung φ von H in eine wohlgeordnete Menge und jedes Element c aus H gibt es ein $a \in H$ mit $\varphi(c) \leq \varphi(a)$, wofür in jeder nichtleeren Restklasse H_a^a ein Element b mit $\varphi(b) < \varphi(c)$ enthalten ist;*

C) *in jeder nichtleeren Teilmenge H' von H gibt es ein Element a derart, dass die Komplementärmenge $H - H'$ mit jeder nichtleeren Restklasse H einen nichtleeren Durchschnitt hat.*

Die Klassenmenge H werden wir *euklidisch* nennen, wenn für sie eine der Bedingungen A, B, C erfüllt ist. Eine Abbildung die die Bedingung A erfüllt, wird eine *euklidische Norm* genannt.

Beweis. Aus C folgt B. Besteht nämlich C und ist φ eine beliebige Abbildung von H in eine wohlgeordnete Menge, so bezeichne H_c $(c \in H)$ die Menge derjenigen a, für welche $\varphi(c) \leq \varphi(a)$ gilt. Wegen der Bedingung C gibt es in H_c ein Element a so, dass $(H - H_c) \cap H_a^a$ für jedes nichtleeres H_a^a nicht leer ist, also jedes solches H_a^a ein Element b mit $\varphi(b) < \varphi(c)$ enthält. Somit ist auch B erfüllt.

Aus B folgt A. Um dies zu zeigen nehmen wir an, dass A nicht besteht und führen die folgende Konstruktion durch. Alle Zeros von H bilden wir auf die Ordnungszahl 0 ab. Wenn schon auf jede Ordnungszahl β, die kleiner als die Ordnungszahl α ist, ein $b \in H$ abgebildet ist, so bezeichnen wir die Menge aller dieser b durch H_α und auf α bilden wir alle diejenigen a aus $H - H_\alpha$ ab, für welche H_α ein volles Restsystem nach a enthält. Die Menge dieser Elemente bezeichnen wir durch M_α. Es sei γ die kleinste Ordnungszahl, für welche M_γ leer ist. Es kann nicht $H = H_\gamma$ $(= \bigcup\limits_{\beta<\gamma} M_\beta)$ gelten, da dann die erhaltene Abbildung eine euklidische Norm wäre. Bilden wir nun sämtliche Elemente von $H - H_\gamma$ auf γ ab, und bezeichnen wir die gewonnene Abbildung durch φ, d.h. es sei

$$\varphi(a) = \begin{cases} \beta, & \text{falls } a \in M_\beta, \\ \gamma, & \text{falls } a \in H - H_\gamma. \end{cases}$$

[1] Die Übliche Definition des Ausdrucks ,,Restklasse nach Zero'' (in einem Ring) ist von der hier angegebenen verschieden, für unsere Zwecke ist aber diese bequemer.

Ist nun $c \in H - H_\gamma$, so wird die Ungleichung $\varphi(c) \leqq \varphi(x)$ genau durch sämtliche $x \in H - H_\gamma$ erfüllt, aber unter diesen x gibt es keines, wofür H_γ ein vollständiges Restsystem enthielte, die Abbildung genügt also nicht der Bedingung B. Hiermit ist unsere Behauptung bewiesen.

Aus A folgt C. In der Tat, φ sei eine euklidische Norm in H, H' eine nicht leere Untermenge von H und a ein Element von H' mit minimalem $\varphi(a)$. Wegen der Definition der euklidischen Norm gibt es ein vollständiges Restsystem R_a nach a, dessen sämtliche Elemente eine kleinere Norm als a haben. Wegen der Wahl von a gilt dann aber $R_a \subseteqq H - H'$, also auch C. Somit ist Satz 1 bewiesen.

Ist H ein Ring, und haben die am Anfang des Paragraphs eingeführten Begriffe den üblichen ringtheoretischen Sinn, so ergibt die Behauptung unseren Satzes: »A ist äquivalent mit B« eine Verschärfung des Satzes von Ch. LEMMLEIN [3], die von A. LASCU [2] stammt (der aber seinen Satz in einer irrtümlichen Allgemeinheit formuliert).

Sind a_0, a_1 Elemente einer euklidischen Menge H und φ eine euklidische Norm in H, so können wir an den Elementen a_0, a_1 einen *euklidischen Algorithmus* folgendermassen durchführen. Gibt es eine Restklasse $H_{a_1}^{a_1}$, die a_0 enthält, so wählen wir ein $a_2 \in H_{a_1}^{a_1}$ mit $\varphi(a_2) < \varphi(a_1)$. Sind schon $a_0, a_1, \ldots, a_\nu$ definiert und gibt es eine Restklasse $H_{a\nu}^{a_\nu}$, die $a_{\nu-1}$ enthält, so definieren wir $a_{\nu+1}$ als ein Element von $H_{a\nu}^{a_\nu}$, wofür $\varphi(a) < \varphi(a_\nu)$ gilt. Gibt es keine solche Restklasse, so sagen wir, dass der Algorithmus nach $\nu - 1$ Schritten endet, und nennen $a_{\nu-1}$ das *Resultat*, a_ν das *Ende* des Algorithmus. Ein euklidischer Algorithmus endet trivialerweise immer nach endlich vielen Schritten. Eine Bedeutung kann ein solcher Algorithmus natürlich nur dann erhalten, wenn er mit einer Verallgemeinerung des Idealbegriffes in Beziehung kommt. Deshalb wollen wir jetzt eine solche Verallgemeinerung vollziehen.

§ 2. Ideale

Eine nichtleere Untermenge G der Klassenmenge H wird ein *Ideal* von H genannt, wenn aus $a, b \in G$, $a \notin Z$ folgt, dass eine solche b enthaltende Restklasse H_a^a existiert, die eine Teilmenge von G ist.

Im allgemeinsten Fall gilt der folgende Satz, der als eine Verallgemeinerung der Tatsache, dass jeder euklidische Ring ein Hauptidealring ist, angesehen werden darf.

Satz 2. *Es sei H eine euklidische Menge, φ eine euklidische Norm in H, G ein Ideal von H und*

$$(1) \qquad a \in G - Z \text{ mit minimaler Norm } \varphi(a)\,.$$

Dann ist G die Vereinigungsmenge solcher Restklassen H_a^a, deren jede wenigstens ein Zero enthält.

Beweis. In der Tat, ist $b \in G$, so gibt es ein $H_a^a \subseteqq G$, wofür $b \in H_a^a$ ist, und hiermit ein $c \in H_a^a$ (also auch $c \in G$) mit $\varphi(c) < \varphi(a)$. Wegen (1) muss dann aber $c \in Z$ sein. Wir haben also erhalten, dass ein beliebiges $b \in G$ in einer solchen Restklasse H_a^a enthalten ist, die auch ein Zero enthält, was zu beweisen war.

Bei einer weiteren Voraussetzung, die noch immer eine grosse Allgemeinheit zulässt, können wir diesen Satz dem entsprechenden ringtheoretischen Satz noch etwas näherbringen. Zu diesem Zweck werden wir sagen, dass die

Elemente einer Teilmenge M der Klassenmenge H das Ideal G erzeugen, falls $M \subseteqq G$ und für jedes Ideal G' aus $M \subseteqq G'$ auch $G \subseteqq G'$ folgt.

Im allgemeinen kann es natürlich vorkommen, dass die Elemente einer vorgegebenen Teilmenge M kein Ideal erzeugen, entweder weil es überhaupt kein M enthaltendes Ideal gibt, oder weil der Durchschnitt der M enthaltenden Ideale kein Ideal ist. Damit es zu beliebigen zwei Elementen einer Klassenmenge H ein solches Ideal G gibt, welches beide Elemente enthält, ist es notwendig und hinreichend, dass

$$\bigcup_{\alpha} H_a^{\alpha} = H \qquad (a \in H - Z) \tag{2}$$

besteht.

Das Hinreichen folgt einfach daraus, dass in diesem Falle H selbst ein Ideal ist. Gibt es ferner zu jedem Elementenpaar a, b ein Ideal $G_{a,b}$, das a und b enthält, so gibt es bei einem festgewählten $a(\in H{-}Z)$ zu jedem $b(\in H)$ eine Restklasse $H_a^{\alpha}(\subseteqq G_{a,b})$, die b enthält, d.h. (2) ist auch notwendig.

Damit die Menge der Ideale der Klassenmenge H einen Halbverband nach der Operation $\cap$ bildet, ist es hinreichend, dass die Restklassen H_a^{α} bei einem festen a einen Halbverband nach derselben Operation bilden, d.h.

$$H_a^{\alpha} \cap H_a^{\beta} = H_a^{\delta} \qquad (\delta \in \Gamma_a) \tag{3}$$

für jedes Paar α, β besteht. Damit der Halbverband der Ideale vollständig ist, ist es hinreichend, dass der Halbverband der Restklassen H für alle a vollständig sei, d. h.

$$\bigcap_{\alpha \in \Delta} H_a^{\alpha} = H_a^{\delta} \qquad (\delta \in \Gamma_a \text{ für } \Delta \subseteqq \Gamma_a) \tag{4}$$

bestehe[2]). Ist nämlich $\{G_\gamma\}$ eine Menge von Idealen (γ durchläuft eine Indexmenge Γ) und ist $a \in G_\gamma - Z$, $b \in G_\gamma$ für alle γ, so gibt es für jedes γ ein $H_a^{\alpha_\gamma} \subseteqq G_\gamma$, das b enthält. Besteht nun (4), oder, falls Γ endlich ist, sogar nur (3), so ist $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} H_a^{\alpha_\gamma}$ einer Restklasse H_a^{δ} gleich, also gilt

$$b \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} H_a^{\alpha_\gamma} = H_a^{\delta} \subseteqq \bigcap_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma,$$

womit sich $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$ als Ideal erwiesen Hat.

Es ist nun merkwürdig, dass die Annahme von (4) (sogar samt (2)) keine Möglichkeit liefert, über die Ideale mehr als in Satz 2 zu sagen. Dagegen gilt

Satz 3. *H sei eine euklidische Menge. Gibt es für jedes $a \in H$ höchstens eine Restklasse H_a^{ξ}, für welche $H_a^{\xi} \cap Z$ nicht leer ist, so ist in H jedes Ideal ($\subseteqq Z$) durch ein einziges Element erzeugt. Ferner ist dann in H jedes aufsteigende Idealkette endlich.*

Beweis. Es sei φ eine euklidische Norm in H, G ein Ideal und $a \in G - Z$ mit minimaler Norm $\varphi(a)$. Dann ist G zufolge Satzes 2 die Vereinigungsmenge solcher Restklassen H_a^{α}, für welche $H_a^{\alpha} \cap Z$ nicht leer ist. Da aber jetzt die

---

[2] Es wäre keine grosse Einschränkung, statt (4)

$$H_a^{\alpha} \cap H_a^{\beta} = \varnothing \qquad (\alpha, \beta \in \Delta\,, \quad \alpha \neq \beta) \tag{4'}$$

zu erfordern, denn im Falle $H_a^{\alpha} \subset H_a^{\gamma}$ hat die letztere Restklasse in den hier betrachteten Fragen keine selbständige Bedeutung.

einzige solche Restklasse H_a^ζ ist, so gilt
$$G = H_a^\zeta .$$
Es sei jetzt G' ein beliebiges Ideal, das a enthält. $G' \cap Z$ kann (wieder nach Satz 2) nicht leer sein, also muss es ein $H_a^\alpha \subseteqq G$ geben, das ein Zero enthält. Somit gilt $G = H_a^\zeta \subseteqq G'$. Die erste Hälfte des Satzes ist also bewiesen.

Um die zweite Aussage zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass es im Falle $G \subset G'$ ein Element c in $G' - Z$ gibt, wofür $\varphi(c) < \varphi(a)$ gilt. Wäre aber dies nicht der Fall, so hätte a auch in $G' - Z$ minimale Norm, und, wie im ersten Teil des Beweises, liesse sich $G' = H_a^\zeta = G$ zeigen. Dieser Widerspruch vollendet den Beweis.

Wir sehen, dass einige wolhbekannten Eigenschaften der euklidishen Ringe sich bei sehr allgemeinen Voraussetzungen auf euklidische Mengen übertragen lassen. Bezüglich des Fundamentalsatzes der Zahlentheorie ist aber dies nicht der Fall; im Gegensatz, es gilt

Satz 4. *Es sei ein Verband V mit einem maximalen und mit einem minimalen Element gegeben, der die Maximalbedingung erfüllt. Dann gibt es eine euklidische Menge H für welche* (2) *und die folgenden Bedingungen erfüllt sind.*

I. $H_a^\alpha \cap H_a^\beta$ *ist leer* $(a \in H,\ \alpha \neq \beta)$;

II. *in H gibt es ein einziges Zero z und ein einziges Element e mit* $H_e^\varepsilon = H$ $(\Gamma_e = \{\varepsilon\})$;

III. *jedes H_a^α mit $z \in H_a^\alpha$ ist ein Ideal;*

IV. *der Idealverband von H ist isomorph zu V.*

Beweis. Wir setzen gleich $H = V$. Die Verbandsoperationen in V bezeichnen wir durch $\frown$ und $\smile$, die zugehörige Ordnungsrelation durch $<$, das maximale Element von V durch e, das minimale durch z. Wir konstruieren die nichtleeren Restklassen folgendermassen. Das einzige Zero von H wird z. Ist a ein von z verschiedenes Element, so ordnen wir jedem Element b des durch a erzeugten dualen Verbandsideals (d.h. zu den Elementen $b > a$) eine Restklasse H_a^b zu, die durch
$$H_a^b = \{x | x \smile a = b\} \tag{5}$$
definiert wird. Da $x \smile a \geqq a$ für alle Elementenpaare x, a aus V gilt, besteht (2) bei dieser Definition der Restklassen. Wegen der Eindeutigkeit dieser Operation ist auch I erfüllt. Die erste Hälfte von II ist trivial, die andere Hälfte folgt aus
$$x \smile e = e \qquad (x \in V).$$
Wegen $z \smile a = a$ ist $z \in H_a^a$ für jedes $a \neq z$. Es ist aber klar, dass H_a^a das durch a erzeugte Verbandsideal ist, weshalb aus $x, y \in H_a^a$ auch $x \smile y \in H_a^a$, also auch $u \in H_a^a$ für sämtliche $u < x \smile y$ folgt. Aus (5) ergibt sich dann aber
$$H_x^{x \smile y} \subseteqq H_a^a ,$$
d. h. III.

Die Klassenmenge H erfüllt die Bedingung C aus Satz 1 und ist somit euklidisch. Es sei nämlich $H' \subseteqq H$. Ist $z \in H'$, so ist C trivialerweise erfüllt für z statt a; ist dagegen $z \in H - H'$, so nehmen wir das maximale (im Sinne der Ordnungsrelation) Element a in H'; ein solches muss wegen der Maximalbedingung existieren. Für H_a^a gilt
$$z \in H_a^a \cap (H - H'),$$

für H_a^b $(b \neq a)$ wegen $b > a$

$$b \in H_a^b \cap (H - H'),$$

womit das Bestehen von C bewiesen ist.

Aus dem bisher gezeigten folgt, dass für H die Voraussetzungen des Satzes 3 erfüllt sind, und somit ist in H jedes Ideal durch ein einziges Element erzeugt. Dies und III ergeben, dass in H die sämtlichen verschiedenen Ideale die H_a^a und die Menge $\{z\}$ sind. Wegen der Regel

$$H_a^a \cap H_b^b = H_{a \cap b}^{a \cap b},$$

die leicht einzusehen ist, besteht auch IV. Dies vollendet den Beweis.

Über den euklidischen Algorithmus können wir im allgemeinsten Falle nur folgendes sagen: *ist H eine euklidische Menge, G ein Ideal in H und $a_0, a_1 \in G$, so gibt es einen euklidischen Algorithmus für diese Elemente so, dass*

$$a_\mu \in G \qquad (\mu = 0,1, \ldots, \nu) \tag{6}$$

und a_ν ein Zero ist. In der Tat, (6) besteht für $\mu = 0, 1$, und wenn sie für $\mu = \lambda - 1, \lambda$ besteht, so können wir für $H_{a_\lambda}^{a_\lambda}$ eine in G liegende Restklasse wählen, also wird auch $a_{\lambda+1} \in G$. Wäre ferner a_ν kein Zero, so müsste ein $H_{a_\nu}^{a_\nu}$ $(\subseteq G)$ existieren, das $a_{\nu-1}$ enthält, und a_ν könnte nicht das Ende des Algorithmus sein.

Nehmen wir jetzt für H auch (4') an. Wir bezeichnen durch H_a^b diejenige H_a^a, die b enthält. Es ist klar, dass H_a^b und H_a^c entweder gleich, oder fremd sind. *Gibt es nun in einem Algorithmus ein Paar $a_{\lambda-1}, a_\lambda$ ($\lambda = 1, \ldots, \nu$), das in einem Ideal G enthalten ist, so erzeugt jedes Paar $a_{\mu-1}, a_\mu$ (in demselben Algorithmus) ein und dasselbe Ideal.* In der Tat, $a_{\lambda-1}$ und a_λ erzeugen ein Ideal G_λ. Dieses Ideal enthält die beiden Restklassen $H_{a_{\lambda-1}}^{a_\lambda} = H_{a_{\lambda-1}}^{a_{\lambda-2}}$ (falls $\lambda \geqq 2$ ist) und $H_{a_\lambda}^{a_{\lambda-1}} = H_{a_\lambda}^{a_{\lambda+1}}$ (falls $\lambda \leqq \nu - 1$ ist). Hiernach gelten $a_{\lambda-2} \in G_\lambda$, $a_{\lambda+1} \in G_\lambda$. Hieraus folgt die Behauptung durch Induktion.

Endlich sei auch die Voraussetzung von Satz 3 erfüllt. Für einen Beliebigen engen Algorithmus gilt dann

$$G_1 = G_2 = \ldots = G_\nu = G(a_{\nu-1}), \tag{7}$$

wo $G(x)$ das durch x erzeugte Ideal ist und (7) in dem Sinne zu verstehen ist, dass alle dort gebildeten Ideale existieren und gleich sind, wenn nur eins von ihnen existiert. Dies brauchen wir nur noch bezüglich der letzten Gleichung zu beweisen. Existiert G_ν, so gilt $a_{\nu-1} \in G_\nu$ und dann existiert wegen (4') auch $G(a_{\nu-1})$. Einerseits ist offenbar $G(a_{\nu-1}) \subseteq G_\nu$. Andererseits muss $a_\nu \in G(a_{\nu-1})$ sein. In der Tat, a_ν ist ein Zero, wie es wir schon gesehen haben. Wegen $a_\nu \in G_\nu$ existiert $H_{a_{\nu-1}}^{a_\nu}$ $(\subseteq G_\nu)$ und sie ist dann die einzige Restklasse nach $a_{\nu-1}$, die ein Zero enthält, also muss auch $H_{a_{\nu-1}}^{a_\nu} \subseteq G(a_{\nu-1})$ gelten. Dann ist aber $a_{\nu-1}, a_\nu \in G\,(a_{\nu-1})$, also auch $G_\nu \subseteq G\,(a_{\nu-1})$

Umgekehrt, nehmen wir jetzt an, dass $G(a_{\nu-1})$ existiert. Es enthält dann ein Zero und somit auch $H_{a_{\nu-1}}^{a_\nu}$, als die einzige Zero enthaltende Restklasse nach $a_{\nu-1}$. Somit gibt es ein Ideal (nämlich $G(a_{\nu-1})$), das $a_{\nu-1}$ und a_ν enthält. Dann existiert aber G_ν, und nach den vorigen gilt (7).

§ 3. Normenverband

In [5] war die Frage über sämtliche euklidischen Normen eines euklidischen Ringes gestellt. In diesem § wollen wir einige elementare Tatsachen über diese Frage in unserem allgemeineren Falle feststellen. Deshalb werden wir in diesem § unter einer euklidischen Norm immer eine Abbildung auf eine Ordnungszahlenmenge verstehen.

Es seien φ und ψ zwei verschiedene euklidische Normen einer euklidischen Menge H (im eben erwähnten Sinne). Wir sagen, dass φ kleiner als ψ ist ($\varphi < \psi$), falls $\varphi(a) \leqq \psi(a)$ für jedes $a \in H$ gilt. Damit ist eine teilweise Ordnungsrelation in der Klasse sämtlicher euklidischen Normen von H angegeben.

Nach dieser Relation bildet die genannte Klasse einen vollständigen Verband in dem Sinne, dass jede Menge von Normen ein Infimum und ein Supremum hat[3]. Es genügt zu zeigen, dass jede Menge von Normen ein Infimum hat; die Existenz des Supremum wird hieraus schon folgen, denn jede Menge von Normen hat offenbar eine obere Schranke. Es sei also $\{\varphi_\alpha\}$ eine Menge euklidischer Normen der euklidischen Menge H. Für jedes $a \in H$ hat die Ordnungszahlenmenge $\{\varphi_\alpha(a)\}$ ein minimales Element $\varphi_a(a)$. Die Abbildung

$$\varphi(a) = \varphi_a(a) \qquad (a \in H)$$

ist eine euklidische Norm. In der Tat, da φ_a eine euklidische Norm ist, gibt es in jeder Restklasse nach a ein Element b mit $\varphi_a(b) < \varphi_a(a)$, also

$$\varphi(b) \leqq \varphi_a(b) < \varphi_a(a) = \varphi(a)\,.$$

Offenbar ist $\varphi \leqq \varphi_\alpha$ für jedes α. Gilt dies auch für die Norm ψ, so gilt $\psi(a) \leqq$ $\leqq \varphi_\alpha(a)$ für jedes $a \in H$ und jedes α, also u.a.

$$\psi(a) \leqq \varphi_a(a) = \varphi(a)\,.$$

Somit haben wir in der Tat

$$\varphi = \inf \varphi_\alpha\,,$$

also auch die behauptete Existenz des von hieran *Normenverband* zu nennenden Verbandes gezeigt.

Aus dem gezeigten folgt:

Satz 5. *Der Normenverband einer beliebigen euklidischen Menge H hat immer ein einziges minimales Element.*

Beweis. Bezeichne $\mathfrak{k}$ die Mächtigkeit der Menge H und sei $\mathfrak{m}$ eine grössere Mächtigkeit, $\omega_{\mathfrak{m}}$ die zu $\mathfrak{m}$ gehörende Anfangszahl. Es ist klar, dass die Gesamtheit derjenigen euklidischen Normen von H, deren sämtliche Werte kleiner als $\omega_{\mathfrak{m}}$ sind, eine Menge $\mathfrak{M}$ bilden, folglich existiert ihr Infimum φ_0. Um zu zeigen, dass φ_0 die minimale Norm von H (d.h. das einzige minimale Element des Normenverbandes von H) ist, genügt es einzusehen, dass es zu jeder euklidischen Norm φ ein Element φ' von $\mathfrak{M}$ mit $\varphi' \leqq \varphi$ gibt. Für φ' können wir aber z.B. die mit φ äquivalente lückenlose Norm (siehe [5]) wählen, die wegen $\mathfrak{k} < \mathfrak{M}$ wirklich ein Element von $\mathfrak{M}$ ist. Damit ist unser Satz bewiesen.

Satz 5 lässt sich auch unmittelbar — analog zur Existenz des Normenverbandes — beweisen.

[3] Die Normen bilden keinen Verband im üblichen Sinne, da ihre Gesamtheit keine Menge bildet.

Die minimale Norm φ_0 kann folgendermassen konstruiert werden. Für jedes Zero z setzen wir

$$\varphi_0(z) = 0\,. \tag{8}$$

Ist schon für jede Ordnungszahl $\beta < \alpha$ die Menge derjenigen $b \in H$, für welche $\varphi_0(b) = \beta$ gesetzt wird, angegeben, so bezeichne man die Menge aller solchen Elemente durch H_α und setze

$$\varphi_0(a) = \alpha$$

für genau diejenigen Elemente a von $H - H_\alpha$, für welche H_α ein volles Restsystem nach a enthält. Ist $H - H_\alpha$ nicht leer, so gibt es wegen der Bedingung C aus Satz 1 immer solche Elemente a und deshalb können wir dieses Verfahren immer solange fortsetzen, bis die Menge H erschöpft wird. Die so erhaltene Abbildung ist eine euklidische Norm, da sie die Eigenschaft A aus Satz 1 besitzt, wie es aus der Konstruktion leicht zu ersehen ist. Ferner ist φ_0 minimal. In der Tat, φ sei eine beliebige euklidische Norm in H. Wir haben zu zeigen, dass

$$\varphi_0(a) \leqq \varphi(a) \qquad (a \in H)\,. \tag{9}$$

Wäre (9) falsch, so soll a_0 unter denjenigen Elementen für welche (9) falsch ist den minimalen Wert $\varphi(a_0)$ haben; also gälte

$$\varphi(a_0) < \varphi_0(a_0)\,. \tag{10}$$

Aus $\varphi(b) < \varphi(a_0)$ folgt $\varphi_0(b) < \varphi(b)$. a_0 kann wegen (9) kein Zero sein. Deshalb muss es ein volles Restsystem $\{a_\sigma\}$ nach a_0 geben, für welches

$$\varphi(a_\sigma) < \varphi(a_0)$$

und somit auch

$$\varphi_0(a_\sigma) < \varphi(a_0)\,.$$

Dies bedeutet aber, dass bei der Konstruktion von φ_0 die Menge $H_{\varphi(a_0)}$ ein vollständiges Restsystem nach a enthält, also muss

$$\varphi_0(a_0) = \varphi(a_0)$$

gesetzt werden, im Gegensatz zu (10). Die Abbildung ist also in der Tat die minimale Norm.

Führen wir diese Konstruktion in den Fällen durch, wo H dem Ring der ganzen rationalen Zahlen bzw. einem Polynomring über einem Körper gleich ist, so erhalten wir im ersten Falle

$$\varphi_0(n) = \left[\frac{\log n}{\log 2}\right] + 1 \qquad (n \neq 0)$$

und im zweiten

$$\varphi_0(f) = \operatorname{Grad} f + 1 \qquad (f \neq 0)\,,$$

nebst der allgemeingültigen Gleichung $\varphi_0(0) = 0$. Endlich, es gilt

Satz 6. *Sind die vollständigen Restsysteme nach a für jedes Element a der euklidischen Menge H endlich, so bildet die minimale Norm φ_0 die Menge H auf ein Segment der Menge der natürlichen Zahlen ab.*

Beweis. Es ist klar, dass φ_0 die Menge H auf eine lückenlose Ordnungszahlenmenge abbildet, folglich genügt es zu zeigen, dass unter den $\varphi_0(a)$ $(a \in H)$ die Ordnungszahl ω nicht vorkommt. Wäre aber $\varphi_0(a) = \omega$, so müsste ein vollständiges Restsystem $\{b_a\}$ nach a existieren, dessen Elemente die Bedingung

$$\varphi_0(b_a) < \varphi_0(a) = \omega$$

erfüllten. Nach der Annahme ist $\{b_a\}$ endlich, also gibt es unter den $\varphi_0(b_a)$ eine maximale. Es sei

$$\max \varphi_0(b_a) = m .$$

Dann ist die Abbildung

$$\varphi_0'(x) = \begin{cases} \varphi_0(x)\,, & \text{falls } x \neq a\,,\ x \in H \\ m+1\,, & \text{falls } x = a \end{cases}$$

trivialerweise eine euklidische Norm, ferner gilt $\varphi_0' < \varphi_0$, im Widerspruch mit der Minimalität von φ_0. Somit ist Satz 6 bewiesen.

§ 4. Hauptidealmenge

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, das Kriterium von H. Hasse für Hauptidealringe (siehe [1]) ähnlicherweise wie die Definition der euklidischen Ringe in § 1 zu verallgemeinern. Bei diesen Verallgemeinerungen kann aber vorkommen, dass die Hasse'sche Bedingung den Kriteriumscharakter verliert und in eine hinreichende Bedingung übergeht. Hier wollen wir eine Verallgemeinerung angeben, die den Kriteriumscharakter bewart, und zwar in einem noch allgemeineren Falle als in den bisherigen Paragraphen.

H sei eine beliebige Menge und Γ eine Menge nichtleerer Untermengen von H. Die Menge $G \in \Gamma$ werden wir auch in diesem allgemeinsten Falle *Ideale von H* nennen. H wird eine *Hauptidealmenge* genannt, wenn für jede nichtleere Untermenge Δ von Γ

$$\bigcup_{\bar{G} \subset G \in \Delta} \bar{G} \subset \bigcup_{G \in \Delta} G \tag{11}$$

gilt.

Aus (11) folgt die Maximalbedingung für Ideale. Wäre nämlich

$$G_1 \subset G_2 \subset \dots \qquad (G_i \in \Gamma)\,,$$

so wäre $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} G_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \bigcup\limits_{G \subset G_i} G$, in Widerspruch mit (11).

Ist der Durchschnitt einer endlichen Menge von Idealen wieder ein Ideal, so bedeutet der Spezialfall von (11)

$$\bigcup_{\bar{G} \subset G} \bar{G} \subset G \tag{11'}$$

einfach, dass G durch ein einziges Element a erzeugt ist (im üblichen Sinne, dass nämlich $a \in G$ und $G = \bigcap\limits_{a \in G'} G'$ ist. Für a darf man ein beliebiges Element aus $G - \bigcup\limits_{\bar{G} \subset G} G$ wählen). Ein Ideal G mit der Eigenschaft (11') nennen wir ein Hauptideal; die Hauptideale können natürlich auch in allen Spezialfällen durch (11') definiert werden. Die euklidische Mengen im allgemeinsten Falle werden keine Hauptidealmengen; wird aber für eine euklidische Menge die Voraussetzung von Satz 3 erfüllt, so gilt für diese natürlich auch (11).

Aus Satz 1 folgt, dass die folgenden drei Bedingungen miteinander äquivalent sind:

A*) es gibt eine Abbildung φ von H in eine wohlgeordnete Menge so, dass für beliebige zwei Ideale G, G' von H mit $G \subset G'$ und für jedes $a \in G$ ein $b \in G'$ mit $\varphi(b) < \varphi(a)$ existiert;

B*) für jede Abbildung φ von H in eine wohlgeordnete Menge und jedes Element c aus H gibt es ein $a \in H$ mit $\varphi(c) \leq \varphi(a)$, wofür aus $a \in G \subset G'$ (G, G' Ideale) die Existenz eines $b \in G'$ mit $\varphi(b) < \varphi(c)$ folgt;

C*) in jeder nichtleeren Untermenge H' von H gibt es ein Element a, für welches aus $a \in G \subset G'$ (G, G' Ideale) folgt, dass $G' \cap (H-H')$ nicht leer ist.

Um dies einzusehen, genügt es, jedem $a \in H$ diejenige $G' \in \Gamma$ als Restklassen zuzuordnen, für welche es ein $G \in \Gamma$ mit $a \in G \subset G'$ gibt[4]. Es gilt ferner

Satz 7. *Eine jede der Bedingungen* A*, B*, C* *ist mit* (11) *äquivalent.*

Beweis. Es genügt A* $\Longleftrightarrow$ (11) zu zeigen.

Nehmen wir A* an und $\triangle$ sei eine beliebige nichtleere Teilmenge von Γ. Betrachten wir ein Element a aus $\bigcup_{G \in \triangle} G$ mit minimalem $\varphi(a)$. Wäre $a \in \bigcup_{\bar{G} \subset G \in \triangle} \bar{G}$, d.h. $a \in \bar{G}_0 \subset G_0 \in \triangle$ für ein geeignetes $\bar{G}_0$, so müsste ein $b \in G_0$, also auch $b \in \bigcup_{G \in \triangle} G$ mit $\varphi(b) < \varphi(a)$ geben, in Widerspruch zur Minimaleigenschaft von a. Somit gilt (11).

Umgekehrt, sei (11) erfüllt. Definieren wir die Mengen $H_\alpha (\alpha = 0, 1, \ldots, \omega, \ldots)$ folgenderweise:

$$(12_1) \qquad H_0 = \bigcup_{G \in \Gamma} G,$$

$$(12_2) \qquad H_{\alpha+1} = \bigcup_{G \subset G' \subseteqq H_\alpha} G.$$

$$(12_3) \qquad H_\beta = \bigcup_{G \subseteqq \bigcap_{\xi < \beta} H_\xi} G \text{ für Limeszahlen } \beta.$$

Aus dieser Definition ist klar, dass

$$(13) \qquad H_\alpha = \bigcup_{G' \subseteqq H_\alpha} G'$$

für jedes α ist. Hieraus und aus (12_2) folgt wegen (11)

$$(14) \qquad H_{\alpha+1} \subset H_\alpha,$$

wenn es nur überhaupt ein $G' \subseteqq H_\alpha$ gibt, d. h. wegen (13), wenn H_α nicht leer ist. Hiermit muss es ein τ geben, wofür H_τ schon leer ist; τ sei die kleinste Ordnungszahl mit dieser Eigenschaft. Im folgenden werden wir nur die H_α mit $\alpha < \tau$ in Betracht nehmen; für diese gilt (14) unbedingt.

Setzen wir

$$(15) \qquad \varphi(a) = \alpha \qquad (a \in H_\alpha - H_{\alpha+1}).$$

Für die übrigen a sei $\varphi(a) = \tau$. Wir behaupten, dass die Abbildung φ die in A* erforderte Eigenschaft besitzt. Es sei nämlich G_0 ein beliebiges Ideal. Es gibt eine grösste Ordnungszahl γ, für welche noch $G_0 \subseteqq H_\gamma$ gilt, denn wegen (12_1) ist $G_0 \subseteqq H_0$ und für eine Limeszahl β aus $G_0 \subseteqq H_\xi$ bei sämtlichen $\xi < \beta$

[4] Die Ideale der so entstehenden Klassenmenge werden natürlich im allgemeinen mit den Idealen aus Γ nicht übereinstimmen.

folgt $G_0 \subseteqq \bigcap_{\xi<\beta} H_\xi$, also wegen (12_3) auch $G_0 \subseteqq H_\beta$. Wegen der Definition von φ bedeutet dies einerseits, dass

$$\varphi(a) \geqq \gamma \text{ für alle } a \in G_0 \tag{16}$$

gilt. Andererseits sei $G_0 \subset G'_0$ und γ' die grösste Ordnungszahl mit $G'_0 \subseteqq H_{\gamma'}$. Offenbar gilt $\gamma' < \gamma$, da sonst $G'_0 \subseteqq H_\gamma$ und

$$G_0 \subseteqq \bigcup_{G \subset G' \subseteqq H_\gamma} G = H_{\gamma+1}$$

in Widerspruch mit der Definition von γ wäre. Ferner ist wegen $G'_0 \subseteqq H_{\gamma'+1}$ der Durchschnitt $G'_0 \cap (H_{\gamma'} - H_{\gamma'+1})$ nicht leer, es gibt also nach (15) ein Element a_0 in G_0, wofür $\varphi(a_0) = \gamma'$, folglich wegen (16) $\varphi(a_0) < \varphi(a)$ für alle $a \in G_0$ gilt. Dies vollendet den Beweis.

Die Bedeutung des Satzes 7 besteht darin, dass A* eine Verallgemeinerung des erwähnten Hasse'schen Kriteriums, und B* eine Verallgemeinerung einer von Lascu [2] bemerkten ringtheoretischen Tatsache ist, somit weist dieser Satz auf die mengentheoretische Deutung ringtheoretischer Sätze hin.

Den Herren E. Fried, L. Fuchs und A. Kertész bin ich für ihre wertvollen Bemerkungen und Ratschläge zu grossem Dank verpflichtet.

(Eingegangen: 9. April, 1962.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Hasse, H.: „Über eindeutige Zerlegung in Primelemente oder in Primhauptideale in Integritätsbereichen." *Journal f. d. reine u. angewandte Math.* **29** (1928) 3–12.
[2] Lascu, A.: „Asupra împarţirii intregi." *Buletin Ştiinţific* **7** (1955) 507–515.
[3] Леммлейн, Х.: "О евклидовых кольцах главных идеалов." *ДАН СССР* **97** (1954) 585–587
[4] Pollák, G.: „Über die Struktur kommutativer Hauptidealringe." *Acta Sci. Math.* **22** (1961) 62–74.
[5] Поллак, Г.: "О типах евклидовых норм." *Acta Sci. Math.* **20** (1959) 252–268.
[6] Rédei, L.: *Algebra* I., Leipzig, 1959.

ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННАЯ ТРАКТОВКА ЕВКЛИДОВЫХ КОЛЕЦ И КОЛЕЦ ГЛАВНЫХ ИДЕАЛОВ

G. POLLÁK

Резюме

В настоящей работе дается теоретико-множественное обобщение понятий евклидова кольца и кольца главных идеалов. При этом выясняется, что целый ряд теорем касающихся таких колец переносится на соответствующие теоретико-множественные понятия. Это имеет место например для теоремы о том, что евклидово кольцо есть кольцо главных идеалов (теоремы 2 и 3), для теоремы о существовании алгоритма Евклида, или для критерия Хассе для колец главных идеалов (теорема 7). С другой стороны, дистрибутивность структуры идеалов евклидова кольца не обобщается даже при очень сильных предположениях относительно рассматриваемого множества; ее выполнение в евклидовых кольцах повидимому является следствием наличия алгебраической операции (теорема 4).

LÖSUNGEN EINER MIT DEM DOPPELVERHÄLTNIS ZUSAMMENHÄNGENDER FUNTIONALGLEICHUNG

Herrn G. Hajós zum 50-sten Geburtstag gewidmet

von

J. ACZÉL,[1] K. FLADT[2] und M. HOSSZÚ[3]

§ 1. H. REICHENBACH [5] gelangte bei seiner Einführung des relativistischen Zeitbegriffes zu der Funktionalgleichung

$$\frac{f(t+t_3)-f(t)}{f(t+t_2)-f(t)}\Bigg/\frac{f(t+t_3)-f(t+t_1)}{f(t+t_2)-f(t+t_1)}=G(t_1,t_2,t_3) \tag{1}$$

(rechte Seite von t unabhängig). Der Symmetrie halber setzen wir

$$t=x-x_3\,,\quad t_3=x_3-x_1\,,\quad t_2=x_3-x_2\,,\quad t_1=x_3-x_4$$

und erhalten

$$\frac{f(x-x_1)-f(x-x_3)}{f(x-x_2)-f(x-x_3)}\Bigg/\frac{f(x-x_1)-f(x-x_4)}{f(x-x_2)-f(x-x_4)}=F(x_1,x_2,x_3,x_4) \tag{2}$$

(rechte Seite von x unabhängig), wobei

$$G(x_3-x_4\,,x_3-x_2\,,x_3-x_1)=F(x_1\,,x_2\,,x_3\,,x_4)$$

geschrieben wurde. — Auch umgekehrt folgt (1) aus (2) mit $x_3=0$, $x_1=-t_3$, $x_2=-t_2$, $x_4=-t_1$, so dass (1) und (2) äquivalente Funktionalgleichungen sind.

Der in [5] zur Lösung von (1) verwendeter Gedankengang ist — wie J. von NEUMANN darauf hingewiesen hat — unvollständig und ergibt auch nicht alle Lösungen. Das Ziel, wofür die Lösung von (1) dort gebraucht wurde, kann übrigens auch an anderen Wegen erreicht werden ([5], [4]), die Funktionalgleichungen (1) und (2) sind aber auch sonst interessant, da sie die Invarianz des auf einer nicht unbedingt linear geeichten Skala gerechneten Doppelverhältnisses gegenüber gleichzeitiger Verschiebung der vier Koten fordert.

Wir wollen hier die Funktionalgleichung (2) unter sukzessiv reduzierten Regularitätsbedingungen lösen. — Ihre Gültigkeit wird natürlich nur dort vorausgesetzt, wo sie einen Sinn haben, (also die Nenner $f(x-x_2)-f(x-x_3)$ und $f(x-x_1)-f(x-x_4)$ nicht verschwinden), insbesondere *werden* (*auch an einer unendlichen Punktmenge mit endlichem Häufungspunkt*) *konstante Funktionen* $f(x)$ im vorherein *ausgeschlossen*.

---

[1] Debrecen.
[2] Calw.
[3] Miskolc.

(2) wird u. a. durch

$$f(x) = x\,,\ \operatorname{tg} kx\,,\ \operatorname{th} kx \tag{3}$$

erfüllt und *wenn* $f(x)$ *eine Lösung von* (2) *ist, so sind auch alle*

$$g(x) = \frac{af(x) + b}{cf(x) + d} \tag{4}$$

mit beliebigen Konstanten a, b, c, d ($ad - bc \neq 0$) *Lösungen. — Wir wollen zeigen, dass mit* (3) *und* (4) *im wesentlichen die Lösungen erschöpft sind.*

§§ 2, 4 und 8 stammen vom ersten, §§ 1 und 3 vom zweiten, §§ 5,6 und 7 im wesentlichen vom dritten Verfasser, die Verff. haben aber die Bemerkungen von einander und von anderen Kollegen, insbes. die der Herren Z. Daróczy (Debrecen) und E. Vincze (Miskolc) mehrfach verwendet.

§ 2. Wir schreiben (2) in die Gestalt

$$\frac{f(x-x_1) - f(x-x_3)}{f(x-x_2) - f(x-x_3)}\,\frac{f(x-x_2) - f(x-x_4)}{f(x-x_1) - f(x-x_4)} = F(x_1, x_2, x_3, x_4) \tag{5}$$

und setzen $x_1 = x_3$ ein. So sehen wir, dass

$$F(x_1, x_2, x_1, x_4) = 0$$

ist. Nach dieser Feststellung dividieren wir beide Seiten von (5) durch $x_3 - x_1$:

$$\begin{aligned} &\frac{f(x-x_1) - f(x-x_3)}{x_3 - x_1}\,\frac{1}{f(x-x_2) - f(x-x_3)}\,\frac{f(x-x_2) - f(x-x_4)}{f(x-x_1) - f(x-x_4)} = \\ &\qquad = \frac{F(x_1, x_2, x_3, x_4) - F(x_1, x_2, x_1, x_4)}{x_3 - x_1}. \end{aligned} \tag{6}$$

Wir setzen $f(x)$ *als differenzierbar voraus* (hier und im folgenden wird *Differenzierbarkeit mit Ausnahme von sich im endlichen nicht häufenden singulären Stellen* — die also höchstens *eine ins Unendliche divergierende Folge* bilden — *vorausgesetzt).* Dann hat die linke Seite von (6) bei Nähern von x_3 zu x_1 einen Grenzwert, also auch die rechte, so dass die partielle Ableitung $F'_{x_3}(x_1, x_2, x_1, x_4)$ existiert. Wir wählen etwa $x_1 = 0$ und erhalten

$$\frac{f'(x)}{f(x-x_2) - f(x)}\,\frac{f(x-x_2) - f(x-x_4)}{f(x) - f(x-x_4)} = F'_{x_3}(0, x_2, 0, x_4)\,. \tag{7}$$

Durch Einsetzen von $x_4 = x_2$ folgt hieraus wieder

$$F'_{x_3}(0, x_2, 0, x_2) = 0$$

und so folgt aus (7) durch Division mit $x_4 - x_2$

$$\begin{aligned} &\frac{f'(x)}{f(x-x_2) - f(x)}\,\frac{f(x-x_2) - f(x-x_4)}{x_4 - x_2}\,\frac{1}{f(x) - f(x-x_4)} = \\ &\qquad = \frac{F'_{x_3}(0, x_2, 0, x_4) - F'_{x_3}(0, x_2, 0, x_2)}{x_4 - x_2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Wegen der Differenzierbarkeit von $f(x)$ hat die linke Seite einen Grenzwert bei $x_4 \to x_2$, also auch die rechte, so dass auch $F''_{x_3x_4}(0, x_2, 0, x_2)$ existiert und so wird aus (8)

$$-\frac{f'(x)\,f'(x-x_2)}{\big(f(x)-f(x-x_2)\big)^2} = -\,F''_{x_3x_4}(0, x_2, 0, x_2)$$

und mit $x - x_2 = y, h(t) = -\,F''_{x_3x_4}(0, t, 0, t)$ wird

$$\frac{f'(x)\,f'(y)}{\big(f(x)-f(y)\big)^2} = h(x-y)\,. \tag{9}$$

Aus

$$z = h(x-y)$$

folgt aber

$$z_x + z_y = 0,$$

so dass aus (9) mit

$$z = \frac{f'(x)\,f'(y)}{\big(f(x)-f(y)\big)^2}$$

sich das Bestehen von

$$\big(f(x)-f(y)\big)\big(f''(x)f'(y)+f'(x)f''(y)\big) = 2\,f'(x)f'(y)\big(f'(x)-f'(y)\big) \quad \big(f(x)\neq f(y)\big) \tag{10}$$

ergibt, falls $f(x)$ *zweimal differenzierbar ist.*

§ 3. Setzen wir in (10) einen konstanten Wert y_0 für y ein ($f'(y_0) \neq 0$: ein solches y_0 existiert, denn sonst wäre $f'(y) \equiv 0$, also $f(y)$ konstant, was ausgeschlossen wurde), so erhalten wir für $u = f(x)$ eine Gleichung der Gestalt

$$au'' + bu' + cuu' + (uu'' - 2\,u'^2) = 0\,. \tag{11}$$

Setzen wir voraus, dass $f(x)$ *fünfmal differenzierbar ist*, so ergibt dreimaliges Differenzieren und Elimination der Konstanten a, b, c (die fünfte Ableitung von u fällt heraus):

$$\begin{vmatrix} u'' & u' & uu' & uu'' - 2\,u'^2 \\ u''' & u'' & uu'' + u'^2 & uu''' - 3\,u'u'' \\ u^{\mathrm{IV}} & u''' & uu''' + 3\,u'u'' & uu^{\mathrm{IV}} - 2\,u'u''' - 3\,u''^2 \\ u^{\mathrm{V}} & u^{\mathrm{IV}} & uu^{\mathrm{IV}} + 4\,u'u''' + 3\,u''^2 & uu^{\mathrm{V}} - u'u^{\mathrm{IV}} - 8\,u''u''' \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} u'' & u' \\ u''' & u'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3\,u'u'' & -3\,u''^2 \\ 4\,u'u''' + 3\,u''^2 & u'u^{\mathrm{IV}} - 8\,u''u''' \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} u'' & u' \\ u^{\mathrm{IV}} & u''' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u'^2 & -u'u'' \\ 4\,u'u''' + 3\,u''^2 & u'u^{\mathrm{IV}} - 8\,u''u''' \end{vmatrix} =$$

$$= (u'^2u^{\mathrm{IV}} - 4\,u'u''u''' + 3\,u''^3)^2 = 0$$

d.h.

$$0 = u'^2u^{\mathrm{IV}} - 4\,u'u''u''' + 3\,u''^3 = \frac{u'^3}{2}\left(\frac{2\,u'u''' - 3\,u''^2}{u'^2}\right)'.$$

Da $u' = 0$ auf Punktmengen mit Häufungspunkt im endlichen ausgeschlossen wurde, muss (höchstens mit Ausnahme von sich im endlichen nicht häufenden singulären Stellen) der zweite Faktor verschwinden. Das Integrieren ergibt

$$(12) \qquad \frac{2\,u'\,u''' - 3\,u''^2}{u'^2} = 4\,K \qquad \text{(konstant)}\,.$$

Man bemerkt, dass auf der linken Seite eben die sogen. *Schwarzsche Ableitung* steht.

Schreiben wir (12) in die Gestalt

$$\frac{2\,u'\,u''\,u''' - 3\,u''^2}{u'^4} = 4\,K\,\frac{u''}{u'^2}$$

und integrieren, so erhalten wir

$$\frac{u''^2}{u'^3} = -\,4\,K\,\frac{1}{u'} + C$$

d. h.

$$\left(\frac{du'}{dx}\right)^2 = C\,u'^3 - 4\,K\,u'^2 \qquad (C \neq 0)$$

($C = 0$ würde $K = 0$, $u'' = 0$, $u = ax + b$ ergeben, was in der Endformel (13) auch enthalten sein wird) und durch nochmaliges Intergrieren ($Cu' - 4K = t^{-2}$)

$$x - x_0 = \int \frac{du'}{u'\sqrt{C\,u' - 4\,K}} = -\,2\int \frac{dt}{1 + 4\,K\,t^2} =$$

$$= \begin{cases} -\,2\,t & (K = 0) \\ -\,\dfrac{1}{k}\,\mathrm{arc\,tg}\,2\,kt & (K = k^2 > 0) \\ -\,\dfrac{1}{k}\,\mathrm{ar\,th}\,2\,kt & (K = -\,k^2 < 0) \end{cases} ,$$

$$t = \begin{cases} -\,\dfrac{x - x_0}{2} \\ -\,\dfrac{1}{2\,k}\,\mathrm{tg}\,k(x - x_0) \\ -\,\dfrac{1}{2\,k}\,\mathrm{th}\,k(x - x_0) \end{cases} ,$$

$$u' = \frac{4K}{C} + \frac{1}{Ct^2} = \begin{cases} -\dfrac{B}{(x-x_0)^2} \\ -\dfrac{B}{\sin^2 k(x-x_0)} \\ -\dfrac{B}{\operatorname{sh}^2 k(x-x_0)} \end{cases} \quad (B \neq 0)\,.$$

Integrieren wir noch einmal, so erhalten wir schon — höchtens mit Ausnahme einer ins Unendliche divergierenden Folge von singulären Stellen — *die allgemeine (fünfmal differenzierbare) Lösung*

$$f(x) = u = \begin{cases} A + B(x-x_0)^{-1} = \dfrac{ax+b}{cx+d} \\ A + B \operatorname{ctg} k(x-x_0) = \dfrac{a \operatorname{tg} kx + b}{c \operatorname{tg} kx + d} \\ A + B \operatorname{cth} k(x-x_0) = \dfrac{a \operatorname{th} kx + b}{c \operatorname{th} kx + d} \end{cases} \quad (ad - bc \neq 0) \tag{13}$$

der Funktionalgleichung (2). (Natürlich bleiben diese auch an den vorher ausgeschlossenen singulären Stellen gültig — überall, wo $f(x)$ stetig ist.)

§ 4. Man kann aber (10) (oder (11)) auch *ohne Voraussetzung der Existenz von Ableitungen höherer Ordnung als der zweiten* lösen. Besonders einfach gestalten sich die Rechnungen, wenn wir in Betracht nehmen, dass zusammen mit $f(x)$ auch alle $g(x)$ von der Gestalt (4) die Funktionalgleichung (2) und damit auch (10) erfüllen:

$$\begin{aligned} &\big(g(x) - g(y)\big)\big(g''(x)\,g'(y) + g'(x)\,g''(y)\big) = \\ &= 2\,g'(x)\,g'(y)\,\big(g'(x) - g'(y)\big) \quad \big(g(x) \neq g(y)\big). \end{aligned} \tag{14}$$

So können die in (4) figurierenden Konstanten a, b, c, d so gewählt werden, dass $g(y_0) = 0$, $g'(y_0) = 1$, $g''(y_0) = 0$ sei. Tatsächlich wird das bei

$$a = 2\,f'(y_0), \quad b = -\,2\,f(y_0)\,f'(y_0), \quad c = f''(y_0), \quad d = 2\,f'(y_0)^2 - f(y_0)\,f''(y_0)$$

eintreffen. Hier ist

$$ad - bc = 4\,f'(y_0)^3 \neq 0$$

falls $f'(y_0) \neq 0$ ist, und ein solches y_0 gibt es immer, da laut Voraussetzung $f'(x) \not\equiv 0$ war. Im folgenden können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $y_0 = 0$ setzen, also gilt

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 1, \quad g''(0) = 0 \tag{15}$$

für

$$g(x) = 2\,f'(0)\,\frac{f(x) - f(0)}{f''(0)\,f(x) + 2\,f'(0)^2 - f(0)\,f''(0)}\,. \tag{16}$$

Setzen wir in (14) $y = 0$ ein, so erhalten wir für $u = g(x)$ die Differentialgleichung

$$uu'' = 2\,u'(u' - 1)\,, \tag{17}$$

ein bekannter Typus (x kommt äusserlich nicht vor). Division durch u^3 (für $u \neq 0$)

$$\frac{u^2 u'' - 2\,u\,u'(u' - 1)}{u^4} = 0$$

und Integration ergibt

$$\frac{u' - 1}{u^2} = K$$

d. h.

$$\frac{du}{dx} = 1 + Ku^2,$$

(was wegen (15) schon auch für $x = 0$, $u = 0$ gültig ist) und nach nochmaliger Integration (wegen $u(0) = 0$)

$$x = \int\limits_0^u \frac{du}{1 + ku^2} = \begin{cases} u & (K = 0) \\[2ex] \dfrac{1}{k} \operatorname{arc\,tg} ku & (K = k^2 > 0)\,, \\[2ex] \dfrac{1}{k} \operatorname{ar\,th} ku & (K = -k^2 < 0) \end{cases}$$

$$u = g(x) = \begin{cases} x \\[2ex] \dfrac{1}{k} \operatorname{tg} kx\,. \\[2ex] \dfrac{1}{k} \operatorname{th} kx \end{cases} \tag{18}$$

Wegen (4) (oder (16)) *sind* also tatsächlich (13) *die allgemeinen (zweimal differenzierbaren) Lösungen von* (2). — Der scheinbare Widerspruch, dass in der durch (15) (scheinbar sogar über-) bestimmten Lösung (18) der Differentialgleichung zweiter Ordnung (17) noch eine beliebige Konstante k figuriert, erklärt sich dadurch, dass $u(0) = 0$ eine singuläre Stelle der rechten Seite von

$$u'' = \frac{2\,u'(u' - 1)}{u}$$

ist.

§ 5. Wenn man nun nur *die Existenz einer stetigen ersten Ableitung* von $f(x)$ voraussetzen will, so kann man von (9) ausgehen. Wieder ist es zweckmässig statt $f(x)$

$$g(x) = f(x) - f(0) \tag{19}$$

zu betrachten, die im Sinne von (4) der Funktionalgleichung (2) und damit auch der Funktionaldifferentialgleichung (9) ebenfalls genügt:

$$\frac{g'(x)\,g'(y)}{\big(g(x)-g(y)\big)^2}=h(x-y)\,, \tag{20}$$

für die aber schon

$$g(0)=0$$

gilt. (Wäre eben 0 eine singuläre Stelle von f, so kann man einen beliebigen anderen konstanten Wert von x wählen, die bezüglichen Betrachtungen bleiben mit kleinerer Modifikation auch so gültig.) So folgt aus (20) mit $y=0$

$$h(x)=\frac{g'(x)\,g'(0)}{g(x)^2}\,. \tag{21}$$

Ist $g'(0)=0$, so wird $h(x)\equiv 0$ und wegen (19) und (20) $f'(x)\equiv g'(x)\equiv 0$, was ausgeschlossen war. Also ist

$$g'(0)\neq 0\,. \tag{22}$$

Aus (20) wird wegen (21)

$$g'(0)\frac{\big(g(x)-g(y)\big)^2}{g'(x)\,g'(y)}=\frac{g(x-y)^2}{g'(x-y)} \tag{23}$$

(ausser für die Nullstellen der Nenner). Nehmen wir die Quadratwurzel des Betrages beider Seiten, so erhalten wir

$$\frac{g(x-y)}{\sqrt{|g'(x-y)|}}=\frac{g(x)}{\sqrt{|g'(x)|}}\sqrt{\left|\frac{g'(0)}{g'(y)}\right|}-\frac{g(y)}{\sqrt{|g'(y)|}}\sqrt{\left|\frac{g'(0)}{g'(x)}\right|}\,,$$

so dass für

$$s(x)=\frac{g(x)}{\sqrt{|g'(x)|}}\,,\qquad c(x)=\sqrt{\left|\frac{g'(0)}{g'(x)}\right|} \tag{24}$$

die Funktionalgleichung

$$s(x-y)=s(x)\,c(y)-s(y)\,c(x)$$

besteht. Die (in einem Punkte) stetigen Lösungen dieser Gleichung sind aber (vgl. etwa [8] und [1] Nr. 3.2.3.) ausser $s(x)\equiv 0$ (was wegen (19) und (24) ausgeschlossen ist)

$$\begin{aligned} s(x)&=Bx\,, & c(x)&=cx+1\\ s(x)&=B\sin kx\,, & c(x)&=c\sin kx+\cos kx\\ s(x)&=B\,\mathrm{sh}\,kx\,, & c(x)&=c\,\mathrm{sh}\,kx+\mathrm{ch}\,kx\,,\end{aligned}$$

so dass (24) (mit $A = B\sqrt{|g'(0)|} \neq 0$)

$$g(x) = \frac{s(x)}{c(x)}\sqrt{|g'(0)|} = \begin{cases} \dfrac{Ax}{cx+1} \\ \dfrac{A\operatorname{tg} kx}{c\operatorname{tg} kx + 1} \\ \dfrac{A\operatorname{th} kx}{c\operatorname{th} kx+1} \end{cases}$$

ergibt, d. h. mit (19) *sind*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax+b}{cx+1} \\ \dfrac{a\operatorname{tg} kx+b}{c\operatorname{tg} kx+1} \\ \dfrac{a\operatorname{th} kx+b}{c\operatorname{th} kx+1} \end{cases} \qquad (a - bc \neq 0)$$

die allgemeinen (stetig differenzierbaren) Lösungen von (2). — (In den bisherigen Betrachtungen wurden die Vorzeichen der Quadratwurzeln nicht präzisiert, da in §§ 7–8 ohnehin exakte Untersuchungen unter schwächeren Bedingungen folgen.)

§ 6. Ja, *es genügt sogar die Existenz einer in Umgebung eines einzigen Punktes existierenden und stetigen Ableitung der stetigen Funktion $f(x)$ vorauszusetzen.* — Wir könnten dies auch von (2) (bzw. (5)) direkt ableiten, wir wollen aber (2) zuerst auf eine andere, äquivalente Gestalt bringen, die auch im weiteren vorteilhaft sein wird. (5) geht nämlich mit $x - x_i = t_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ in

$$\frac{f(t_1)-f(t_3)}{f(t_2)-f(t_3)}\,\frac{f(t_2)-f(t_4)}{f(t_1)-f(t_4)} = F(x-t_1,\ x-t_2,\ x-t_3,\ x-t_4) \tag{25}$$

oder mit $x = t_1$, $F(0, x_2, x_3, x_4) = G(-x_2, -x_3, -x_4)$ in

$$\frac{f(t_1)-f(t_3)}{f(t_2)-f(t_3)}\,\frac{f(t_2)-f(t_4)}{f(t_1)-f(t_4)} = G(t_2-t_1,\ t_3-t_1,\ t_4-t_1) \tag{26}$$

(vgl. auch (1)) über. Setzen wir in (26) $t_1 = 0$, so haben wir

$$G(t_2, t_3, t_4) = \frac{f(0)-f(t_3)}{f(t_2)-f(t_3)}\,\frac{f(t_2)-f(t_4)}{f(0)-f(t_4)},$$

also

$$G(t_2-t_1, t_3-t_1, t_4-t_1) = \frac{f(0)-f(t_3-t_1)}{f(t_2-t_1)-f(t_3-t_1)}\,\frac{f(t_2-t_1)-f(t_4-t_1)}{f(0)-f(t_4-t_1)},$$

so dass (26) in

$$\frac{f(t_1)-f(t_3)}{f(t_2)-f(t_3)}\,\frac{f(t_2)-f(t_4)}{f(t_1)-f(t_4)} = \frac{f(0)-f(t_3-t_1)}{f(t_2-t_1)-f(t_3-t_1)}\,\frac{f(t_2-t_1)-f(t_4-t_1)}{f(0)-f(t_4-t_1)}$$

übergeht. Daher gilt bei fixem $t_4 = t_0$ (wo die Nenner nicht verschwinden)

$$\frac{f(t_3)-f(t_1)}{f(t_3)-f(t_2)} = H(t_1,t_2)\,\frac{f(t_3-t_1)-f(0)}{f(t_3-t_1)-f(t_2-t_1)} \tag{27}$$

$$\left(H(t_1,t_2) = \frac{f(t_2-t_1)-f(t_0-t_1)}{f(0)-f(t_0-t_1)}\;\frac{f(t_1)-f(t_0)}{f(t_2)-f(t_0)}\right)$$

d.h.

$$\frac{f(t_3)-f(t_1)}{t_3-t_1}\;\frac{1}{f(t_3)-f(t_2)} = H(t_1,t_2)\,\frac{f(t_3-t_1)-f(0)}{t_3-t_1}\;\frac{1}{f(t_3-t_1)-f(t_2-t_1)}. \tag{28}$$

Bei dem Grenzübergang $t_3 \to t_1$ $(t = t_3 - t_1 \to 0)$ sieht man, dass

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t} = f'(0) \tag{29}$$

existiert, falls

$$\lim_{t_3\to t_1}\frac{f(t_3)-f(t_1)}{t_3-t_1} = f'(t_1) \tag{30}$$

für *ein* t_1 existiert, und umgekehrt, wenn schon (29) existiert, so existiert auch (30) für *alle* t_1. Also ist $f(x)$ (höchstens mit Ausnahme von sich im endlichen nicht häufenden — isolierten — singulären Stellen) *überall differenzierbar und die Ableitung ist in einem Punkte stetig.* So können wir den Gedankengang in § 5 verwenden und erhalten wieder (13) als allgemeine Lösung.

Man kann übrigens (23) auch hieraus ableiten: Falls der in Rede stehende Grenzübergang $t_3 \to t_1$ durchführbar ist, wird aus (28)

$$\frac{f'(t_1)}{f(t_1)-f(t_2)} = H(t_1,t_2)\,\frac{f'(0)}{f(0)-f(t_2-t_1)}. \tag{31}$$

Ebenso folgt aus (27) durch Multiplikation mit $t_3 - t_2$ und Grenzübergang $t_3 \to t_2$

$$\frac{f(t_2)-f(t_1)}{f'(t_2)} = H(t_1,t_2)\,\frac{f(t_2-t_1)-f(0)}{f'(t_2-t_1)}. \tag{32}$$

Dividieren wir (32) mit (31), wo die Nenner nicht verschwinden, (aus (31) ist $H(t_1,t_2)f'(0) \neq 0$ — abgesehen von isolierten Stellen — ersichtlich), so erhalten wir

$$\frac{(f(t_2)-f(t_1))^2}{f'(t_1)f'(t_2)} = \frac{(f(t_2-t_1)-f(0))^2}{f'(0)\,f'(t_2-t_1)}$$

d.h. mit der Bezeichnung (19) eben die Gleichung (23).

§ 7. Endlich *setzen wir* schon *gar keine Differenzierbarkeit voraus.* — Wir setzen aber natürlich auch weiter voraus, dass $f(x)$ *höchstens in einer Punktmenge ohne endlichen Häufungspunkten* — d.h. in einer ins Unendliche divergierenden Punktfolge — *nicht definiert (unendlich) und höchstens auf solchen Punktmengen konstant ist.* Man kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass $f(0)$ einen Sinn hat (endlich ist). Laut Voraussetzung gibt es eine Stelle x_0, wo $f(x_0), f(-x_0), f(2x_0)$ endlich und

$$f(x_0) \neq f(0), \quad f(-x_0) \neq f(0), \quad f(2x_0) \neq f(0)$$

sind. Denn würde in jedem Punkte entweder $f(x) = f(0)$ oder $f(-x) = f(0)$ oder $f(2x) = f(0)$ gelten, so würde $f(x)$ auf einer Menge mit endlichem Häufungspunkt konstant sein. Wieder kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass $x_0 = 1$ ist, also

$$f(1) \neq f(0), \quad f(-1) \neq f(0), \quad f(2) \neq f(0).$$

— Im Sinne von (4) bleibt (2) — und damit auch (25) — auch für die Funktion

$$g(x) = \frac{f(x) - f(1)}{f(x) - f(0)} \qquad \left(f(x) = \frac{f(0)\,g(x) - f(1)}{g(x) - 1}\right) \tag{33}$$

mit

$$g(1) = \frac{f(1) - f(1)}{f(1) - f(0)} = 0, \quad \frac{1}{g(0)} = \frac{f(0) - f(0)}{f(0) - f(1)} = 0, \quad g(-1), \ g(2) \text{ endlich} \tag{34}$$

gültig:

$$\frac{g(t_1) - g(t_3)}{g(t_2) - g(t_3)} \, \frac{g(t_2) - g(t_4)}{g(t_1) - g(t_4)} = F(x - t_1, x - t_2, x - t_3, x - t_4) \,. \tag{35}$$

Mit $x = 0$ folgt hieraus

$$F(-t_1, -t_2, -t_3, -t_4,) = \frac{g(t_1) - g(t_3)}{g(t_2) - g(t_3)} \, \frac{g(t_2) - g(t_4)}{g(t_1) - g(t_4)}$$

d.h.

$$F(x - t_1, x - t_2, x - t_3, x - t_4) = \frac{g(t_1 - x) - g(t_3 - x)}{g(t_2 - x) - g(t_3 - x)} \, \frac{g(t_2 - x) - g(t_4 - x)}{g(t_1 - x) - g(t_4 - x)},$$

so dass (35) in

$$\begin{aligned} \frac{g(t_1) - g(t_3)}{g(t_2) - g(t_3)} \, \frac{g(t_2) - g(t_4)}{g(t_1) - g(t_4)} &= \frac{g(t_1 - x) - g(t_3 - x)}{g(t_2 - x) - g(t_3 - x)} \, \frac{g(t_2 - x) - g(t_4 - x)}{g(t_1 - x) - g(t_4 - x)} = \\ &= \frac{1 - \dfrac{g(t_3 - x)}{g(t_1 - x)}}{1 - \dfrac{g(t_4 - x)}{g(t_1 - x)}} \, \frac{g(t_2 - x) - g(t_4 - x)}{g(t_2 - x) - g(t_3 - x)} \end{aligned} \tag{36}$$

übergeht. Wegen (34) wird aus (36) für $x = t_1$, $t_2 = t_1 + 1$

$$\frac{g(t_1) - g(t_3)}{g(t_1 + 1) - g(t_3)} \, \frac{g(t_1 + 1) - g(t_4)}{g(t_1) - g(t_4)} = \frac{g(t_4 - t_1)}{g(t_3 - t_1)} \,. \tag{37}$$

Aus (37) folgt einerseits mit $t_1 = 1$, $t_3 = 0$ wegen (34)

$$\frac{g(t_4) - g(2)}{g(t_4)} = \frac{g(t_4 - 1)}{g(-1)}$$

($g(-1) \neq 0$ wie wir gleich sehen werden) d.h. mit

$$g(-1) = K\,, \quad g(2)\,K = C \tag{38}$$

für $t_4 = t$

$$g(t-1) = K - \frac{C}{g(t)} \tag{39}$$

und für $t - 1 = s$ auch

$$g(s+1) = \frac{C}{K - g(s)} \tag{40}$$

(bei $g(t) \neq 0$, $g(s) \neq K$), wobei $C \neq 0$ ist, (denn sonst wäre $g(x)$ konstant) und wegen (38) und (34) auch $K \neq 0$. Anderseits folgt aus (37) mit $t_3 = 1$ wegen (34) und (40)

$$\begin{aligned} g(t_4 - t_1) &= g(1-t_1)\,\frac{g(t_1)}{g(t_1+1)}\,\frac{g(t_1+1) - g(t_4)}{g(t_1) - g(t_4)} = \\ &= g(1-t_1)\,\frac{g(t_1)}{C}\,\frac{C - g(t_4)\big(K - g(t_1)\big)}{g(t_1) - g(t_4)}\,. \end{aligned} \tag{41}$$

Das Spezialisieren $t_4 = t_1 - 1$ ergibt wegen (38) und (39)

$$\begin{aligned} K &= g(1-t_1)\,\frac{g(t_1)}{C}\,\frac{C - \left(K - \dfrac{C}{g(t_1)}\right)\big(K - g(t_1)\big)}{g(t_1) - K + \dfrac{C}{g(t_1)}} = \\ &= g(1-t_1)\,\frac{g(t_1)}{C}\,\frac{Kg(t_1)^2 - K^2 g(t_1) + CK}{g(t_1)^2 - Kg(t_1) + C} = g(1-t_1)\,\frac{g(t_1)}{C}\,K\,, \end{aligned} \tag{42}$$

(da $K \neq 0$ ist und $g(t_1) = 0$ bzw. $g(t_1)^2 - Kg(t_1) + C = 0$ höchstens auf einer Menge ohne Häufungspunkt im endlichen gelten kann), d.h.

$$g(1-t_1)\,\frac{g(t_1)}{C} = 1 \tag{43}$$

(höchstens mit Ausnahme von sich im endlichen nicht häufenden singulären Stellen), so dass (41) mit $t_4 = x$, $t_1 = y$ in

$$g(x-y) = \frac{g(x)\,g(y) - Kg(x) + C}{g(y) - g(x)} \tag{44}$$

übergeht.

Nun kann man einerseits bemerken, dass *alle etwa in einem Punkte stetige (oder messbare) Lösungen* einer Funktionalgleichung der Gestalt (44) *auch (beliebig oft) differenzierbar sind* (vgl. etwa [2] und [1] Abschn. 2.2), *so dass die in* §§ 2—6 *gegebenen Lösungsmethoden dieselben allgemeinen Lösungen* (13) *von* (2) *auch unter so allgemeinen Bedingungen ergeben.*

Anderseits lässt sich (44) auch direkt lösen: Man setze

$$g(x) = \frac{h(x) + AK}{2\,A} \tag{45}$$

($A \neq 0$ eine später zu bestimmende Konstante) in (44):

$$\frac{h(x-y) + AK}{2A} = \frac{\bigl(h(x) + AK\bigr)\bigl(h(y) + AK\bigr) - 2\,AK\bigl(h(x) + AK\bigr) + 4\,A^2C}{2\,A\bigl(h(y) - h(x)\bigr)}$$

um

$$h(x-y) = \frac{h(x)\,h(y) + A^2(4\,C - K^2)}{h(y) - h(x)} \tag{46}$$

zu erhalten. Zur Lösung von (46) (vgl. [3] und [1] Kap. 2) treffe man die Fallunterscheidung

1. $4\,C - K^2 = 0$,
2. $4\,C - K^2 > 0$,
3. $4\,C - K^2 < 0$.

Im Falle 1 führe man in

$$h(x-y) = \frac{h(x)\,h(y)}{h(y) - h(x)} \tag{47}$$

die neue Funktion

$$h(x) = \frac{1}{k(x)} \tag{48}$$

ein, so dass (47) in

$$k(x-y) = k(x) - k(y)$$

oder

$$k(y+z) = k(y) + k(z) \tag{49}$$

($z = x - y$) übergeht, und die allgemeine, etwa in einem Punkte stetige Lösung dieser Funktionalgleichung ist

$$k(x) = kx$$

(k eine Konstante), so dass wegen (48)

$$h(x) = \frac{1}{kx} \tag{50}$$

besteht.

Im Falle 2 wähle man in (46) $A^2 = \dfrac{1}{4\,C - K^2}$

$$h(x-y) = \frac{h(x)\,h(y) + 1}{h(y) - h(x)}\,. \tag{51}$$

Mit

$$h(x) = \operatorname{ctg} \bar{k}(x) \tag{52}$$

wird aus (51)

$$\operatorname{ctg} \bar{k}(x-y) = \operatorname{ctg}\big(\bar{k}(x) - \bar{k}(y)\big) \text{ d. h. } \bar{k}(x-y) \equiv \bar{k}(x) - \bar{k}(y) \pmod{\pi}$$

oder

$$\bar{k}(y+z) \equiv \bar{k}(y) + \bar{k}(z) \pmod{\pi}. \tag{53}$$

Die allgemeine (etwa in einem Punkte stetige) Lösung dieser Funktionalkongruenz (vgl. [6]) ist

$$\bar{k}(x) \equiv kx \pmod{\pi},$$

so dass wegen (52)

$$h(x) = \operatorname{ctg} kx \tag{54}$$

besteht.

Endlich wählt man im Falle 3 in (46) $A^2 = -\dfrac{1}{4C-K^2}$;

$$h(x-y) = \frac{h(x)h(y)-1}{h(y)-h(x)}. \tag{55}$$

Mit

$$h(x) = \operatorname{cth} k(x) \tag{56}$$

wird aus (55)

$$\operatorname{cth} k(x-y) = \operatorname{cth}\big(k(x) - k(y)\big)$$

d.h.

$$k(y+z) = k(y) + k(z). \tag{49}$$

So folgt auch hier (für in einem Punkte stetige $k(x)$)

$$k(x) = kx$$

und mit (56)

$$h(x) = \operatorname{cth} kx. \tag{57}$$

(50), (54) und (57) ergeben mittels (45) und (33) *höchstens mit Ausnahme einer ins Unendliche divergierenden Punktfolge*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a+b/x}{c+d/x} = \dfrac{ax+b}{cx+d} \\[2ex] \dfrac{a+b\operatorname{ctg} kx}{c+d\operatorname{ctg} kx} = \dfrac{a\operatorname{tg} kx+b}{c\operatorname{tg} kx+d} \\[2ex] \dfrac{a+b\operatorname{cth} kx}{c+d\operatorname{cth} kx} = \dfrac{a\operatorname{th} kx+b}{c\operatorname{tg} kx+d} \end{cases}$$

als *die allgemeinen in einem Punkte stetigen Lösungen von* (2).

Wir hätten (50), (54) und (57) auch so aus (47) bzw. (51) bzw. (55) erhalten können, dass wir $f_0(x) = \dfrac{1}{x}$ bzw. $f_0(x) = \operatorname{ctg} x$ bzw. $f_0(x) = \operatorname{cth} x$ als Lösungen dieser Gleichungen erkennen und bemerken, dass die allgemeinen (etwa messbaren oder in einem Punkte stetigen) Lösungen von Gleichungen wie (47), (51) und (55) durch

$$f(x) = f_0(kx)$$

angegeben sind, wo $f_0(x)$ eine partikuläre Lösung ist (vgl. etwa [3] und [1] Abschn. 2.2). — Bei der obigen Beweisanordnung enthalten aber (48), (52) und (56) auch überall unstetige (nichtmessbare) Lösungen von (47) bzw. (51) bzw. (55), *falls für* $\bar{k}(x)$ *auch die überall unstetigen (nichtmessbaren) Lösungen der Funktionalkongruenz* (53) *bzw. falls für* $k(x)$ *auch die unstetigen (nichtmessbaren) Lösungen der Funktionalgleichuxg* (49) *in betracht genommen werden; dann enthält*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ak(x)+b}{ck(x)+d} \\[2mm] \dfrac{a\operatorname{tg}\bar{k}(x)+b}{c\operatorname{tg}\bar{k}(x)+d} \\[2mm] \dfrac{a\operatorname{th}k(x)+b}{c\operatorname{th}k(x)+d} \end{cases}$$

auch die überall unstetigen (nichtmessbaren) Lösungen von (2).

§ 8. Die folgende Umformung führt (2) auf einen allgemeinen Funktionalgleichungstypus (1) zurück, der auch in sich interessant zu sein scheint.

(5) lässt sich auch in die Gestalt

$$\text{(58)}\qquad \begin{aligned} &\frac{f(x+y_1)-f(x+y_3)}{f(x+y_2)-f(x+y_3)}\,\frac{f(x+y_2)-f(x+y_4)}{f(x+y_1)-f(x+y_4)} = \\ &= F(-y_1,-y_2,-y_3,-y_4) = \\ &= \frac{f(y_1)-f(y_3)}{f(y_2)-f(y_3)}\,\frac{f(y_2)-f(y_4)}{f(y_1)-f(y_4)} \end{aligned}$$

(vgl. (1)) schreiben, was mit $y_1 = y$, $y_3 = 0$, und $y_2 = y_0$, $y_4 = x_0$ (beide konstant) in

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{f(x+y)-f(x+x_0)} = \frac{f(x+y_0)-f(x)}{f(x+y_0)-f(x+x_0)}\,\frac{f(y_0)-f(x_0)}{f(y_0)-f(0)}\,\frac{f(y)-f(0)}{f(y)-f(x_0)}$$

oder mit

$$\text{(59)}\qquad \begin{aligned} &k(x) = f(x+x_0),\quad h(x) = \frac{f(x+y_0)-f(x)}{f(x+y_0)-f(x+x_0)}\,\frac{f(y_0)-f(x_0)}{f(y_0)-f(0)}, \\ &g(y) = \frac{f(y)-f(0)}{f(y)-f(x_0)} \end{aligned}$$

in

$$f(x+y)-f(x) = \big(f(x+y)-k(x)\big)\,h(x)\,g(y)$$

übergeht. Also gilt

$$f(x+y)=\frac{f(x)-g(y)\,h(x)\,k(x)}{1-g(y)\,h(x)}\,. \tag{60}$$

Wir nehmen (59) in betracht:

$$g(y)=\frac{f(y)-f(0)}{f(y)-f(x_0)},$$

so dass (60) in eine Gleichung von der Gestalt

$$f(x+y)=\frac{a(x)\,f(y)+b(x)}{c(x)\,f(y)+d(x)} \tag{61}$$

übergeht. Dies ist eine Verallgemeinerung der auch in [5] betrachteten Funktionalgleichung

$$f(x+y)=a(x)\,f(y)+b(x)$$

(s. auch [1] Nr. 3.1.3). — Die Lösung der allgemeineren Funktionalgleichung (61) ist unserer Meinung nach eine interessante, aber ohne Spezialisierung der Funktionen $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$ schwierigere Aufgabe als die von (2).

Der hier folgende Gedankengang leistet eine starke Reduktion, die auf leicht lösbare Fälle führt und zeigt zugleich die Verwandtschaft der obigen Umformung mit dem im § 7 gefolgten Lösungsweg.

Ähnlich wie im § 7 gibt es zwei Werte z_0 und x_0 derart, dass $f(z_0)$ und $f(x_0)$ $f(-x_0)$, $f(2x_0)$ endlich sind und,

$$f(x_0)\neq f(z_0),\quad f(-x_0)\neq f(z_0),\quad f(2\,x_0)\neq f(z_0)$$

besteht und man kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit $z_0=0$, $x_0=1$ nehmen. Also wird

$$f(1)\neq f(0),\ f(-1)\neq f(0),\ f(2)\neq f(0)\,.$$

Im Sinne von (4) bleibt wieder (2) — und damit auch (58) auch für

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{f(x)-f(1)}\qquad\left(f(x)=\frac{f(1)\,g(x)-f(0)}{g(x)-1}\right) \tag{62}$$

(vgl. (59)) mit

$$g(0)=0,\ \frac{1}{g(1)}=0\,,\ g(-1)\neq 0\ \text{ und }\ g(2)\neq 0 \tag{63}$$

gültig:

$$\frac{g(x+y_1)-g(x+y_3)}{g(x+y_2)-g(x+y_3)}\,\frac{g(x+y_2)-g(x+y_4)}{g(x+y_1)-g(x+y_4)}=$$

$$=\frac{g(y_1)-g(y_3)}{g(y_2)-g(y_3)}\,\frac{g(y_2)-g(y_4)}{g(y_1)-g(y_4)}=\frac{g(y_1)-g(y_3)}{g(y_2)-g(y_3)}\,\frac{\dfrac{g(y_2)}{g(y_4)}-1}{\dfrac{g(y_1)}{g(y_4)}-1}\,.$$

Wegen (63) wird hieraus mit $y_1 = y$, $y_2 = z$, $y_3 = 0$, $y_4 = 1$

$$\frac{g(x+y)-g(x)}{g(x+z)-g(x)}\,\frac{g(x+z)-g(x+1)}{g(x+y)-g(x+1)} = \frac{g(y)}{g(z)}. \tag{64}$$

Aus (64) folgt einerseits mit $x = 1$, $z = -1$ wegen (63)

$$\frac{g(2)}{g(2)-g(y+1)} = \frac{g(y)}{g(-1)}.$$

Hieraus folgt, dass weder $\frac{1}{g(2)} = 0$ noch $\frac{1}{g(-1)} = 0$ sein kann, da sonst $g(y) = g(-1)$ oder $g(2) = 0$ (oder $1 = 0$) wäre trotz (63) und dass

$$g(y) = \frac{C}{K-g(y+1)}, \quad g(y+1) = K - \frac{C}{g(y)} \tag{65}$$

gilt, wobei

$$g(2) = K, g(-1)K = C \quad (C \neq 0, K \neq 0), \qquad g(-1) = \frac{C}{K} \tag{66}$$

war (vgl. (63)). Andererseits folgt aus (64) mit $z = 1 - x$ wegen (63)

$$\frac{g(x+y)-g(x)}{g(x+y)-g(x+1)} = \frac{g(y)}{g(1-x)}. \tag{67}$$

Das Spezialisieren $y = -1$ ergibt wegen (65) und (66)

$$\frac{C}{Kg(1-x)} = \frac{g(-1)}{g(1-x)} = \frac{g(x-1)-g(x)}{g(x-1)-g(x+1)} = \frac{\frac{C}{K-g(x)} - g(x)}{\frac{C}{K-g(x)} - K + \frac{C}{g(x)}} = \frac{g(x)}{K}$$

d.h.

$$g(x)\,g(1-x) = C.$$

Hiermit und mit (65) geht (67) in

$$g(x+y) = \frac{g(x+1)\,g(y) - g(x)\,g(1-x)}{g(y)-g(1-x)} = \frac{\left(K - \frac{C}{g(x)}\right)g(y) - C}{g(y) - \frac{C}{g(x)}} = \tag{68}$$

$$= \frac{Kg(x)\,g(y) - Cg(x) - Cg(y)}{g(x)\,g(y) - C}$$

über und dies ist der gesuchte Spezialfall von (61).

Wieder sind alle etwa messbare Lösungen von (68) auch differenzierbar (vgl. etwa [2] und [1] Nr. 2.2.3, 2.2.4, wo eben solche Gleichungen behandelt werden), man kann andererseits um sie direkt zu lösen, in ihr

$$g(x) = \frac{2\,ACh(x)}{1 + AKh(x)} \tag{69}$$

($A \neq 0$ eine später zu bestimmende Konstante) setzen, damit man mit einer leichten Rechnung

$$h(x+y) = \frac{h(x)+h(y)}{1 - A^2(4C-K^2)\,h(x)\,h(y)}$$

(auch Spezialfall von (61)) erhalte. Wir unterscheiden wieder die drei Fälle

1. $4C - K^2 = 0, \quad h(x+y) = h(x) + h(y),$

2. $4C - K^2 > 0, A^2 = \dfrac{1}{4C-K^2}, \; h(x+y) = \dfrac{h(x)+h(y)}{1-h(x)\,h(y)},$

3. $4C - K^2 < 0, A^2 = -\dfrac{1}{4C-K^2}, \; h(x+y) = \dfrac{h(x)+h(y)}{1+h(x)\,h(y)}.$

Dies sind noch allgemeiner bekannte Funktionalgleichungen als die Gleichungen (47), (51) und (55) (s. etwa [3] und [1] Nr. 2.2.8), ihre allgemeine etwa messbare (oder in einem Punkte stetige) Lösungen sind

$$h(x) = \begin{cases} kx \\ \operatorname{tg} kx, \\ \operatorname{th} kx \end{cases}$$

so dass wir mittels (69) und (62) wieder — *höchstens mit Ausnahme einer ins Unendliche dievrgierenden Punktfolge* —

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax+b}{cx+d} \\[2mm] \dfrac{a \operatorname{tg} kx + b}{c \operatorname{tg} kx + d} \\[2mm] \dfrac{a \operatorname{th} kx + b}{c \operatorname{th} kx + d} \end{cases} \qquad (ad - bc \neq 0)$$

als *die allgemeinen*, etwa *messbaren (oder in einem Punkte stetigen) Lösungen von* (2) erhalten, während wieder

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ak(x)+b}{ck(x)+d} \\[2mm] \dfrac{a \operatorname{tg} \bar{k}(x) + b}{c \operatorname{tg} \bar{k}(x) + d} \\[2mm] \dfrac{a \operatorname{th} k(x) + b}{c \operatorname{th} k(x) + d} \end{cases} \qquad \begin{matrix} (ad - bc \neq 0, k(x+y) = k(x) + k(y)) \\ (\bar{k}(x+y) \equiv \bar{k}(x) + \bar{k}(y) \pmod{\pi}) \end{matrix} \tag{70}$$

auch nichtmessbare (überall unstetige) Lösungen von (2) *enthält.* —

Alle unsere Betrachtungen lassen sich auch auf komplexe (die in §§ 7—8 mit Endergebnis (70) auch auf allgemeinere) Funktionen anwenden. Im Komplexen können natürlich die Fälle mit tg und mit th vereint werden.

In den obigen Betrachtungen können, wie man leicht sieht, die Mengen ohne endlichen Häufungspunkt durch beliebige Mengen mit der Eigenschaft E ersetzt werden. Dabei sagen wir von einer Menge, dass sie die Eigenschaft E hat, falls bei einer beliebigen Einteilung des unendlichen Grundbereiches (des Definitionsbereiches: etwa der Menge der rellen oder der komplexen Zahlen) in endlich viel Teilmengen (deren Vereinigung also der Grundbereich ist) wenigstens eine Teilmenge die Eigenschaft E nicht besitzt und Summen von endlich viel Mengen mit der Eigenschaft E auch die Eigenschaft E haben. U. a. haben auch die (im Grundbereich) nirgends dichten Mengen, die abzählbaren Mengen (bzw. die Mengen kleinerer Mächtigkeit als die des Grundbereiches) usw. die Eigenschaft E.

Die Funktionalgleichung (2) und die weitere (61) können auch durch eine von E. VINCZE in [7] ausgearbeitete allgemeine Methode zur Lösung mehrerer Funktionalgleichungstypen behandelt werden.

(Eingegangen: 10 April, 1962.)

[1] ACZÉL, J.: *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen.* Basel, Stuttgart und Berlin, 1961.

[2] ALT, W.: ,,Über die reellen Funktionen einer reellen Veränderlichen, welche ein rationales Additionstheorem besitzen.'' *Deutsche Math.* **5** (1940), 1–12.

[3] CACCIOPPOLI, R.: ,,L'equazione funzionale $f(x + y) = F(f(x), f(y))$.'' Giornale Mat. Battaglini **66** (1928), 69–74.

[4] HOSSZÚ, M.: ,,Észrevételek a relativitáselméleti időfogalom Reichenbach-féle értelmezéséhez''. *Nehézipari Műszaki Egyetem Közleményei* **9** (1963).

[5] REICHENBACH, H.: *Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre.* § 13. Braunschweig, 1924.

[6] RIDDER, J.: ,,On the additive functional equation and an additive functional congruence.'' *Euklides* **18** (1941), 84–92.

[7] VINCZE, E.: ,,Eine allgemeinere Methode in der Theorie der Funktionalgleichungen, I.'' *Publ. Math. Debrecen* **9** (1962), 149–163.

[8] WILSON, W. H.: ,,On certain related functional equations''. *Bull. Amer. math. Soc.* **26** (1919–1920), 300–312.

РЕШЕНИЕ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ИМЕЮЩЕГО СВЯЗЬ С АНГАРМОНИЧЕСКИМ ОТНОШЕНИЕМ

J. ACZÉL, K. FLADT и M. HOSSZÚ

Резюме

В статье приведено несколько методов решения функционального уравнения (2) — при постепенно слабеющих условиях регулярности.

Наиболее общее непрерывное решение, соответственно наиболее общее решение (например, за исключением расходящейся последовательности точек) имеет вид (13), соотв. (70).

Это функциональное уравнение появилось в аксиоматическом построении по Райхенбаху теории относительности и его можно толковать и так, что геометрическое ангармоническое отношение должно быть инвариантным относительно одновременной трансляции четырёх отметок на не обязательно линейно размеченной шкале.

REMARK ON A THEOREM OF DÉNES

by

MURRAY EDEN[1] and M. P. SCHÜTZENBERGER[2]

The aim of this note is to give a slightly more explicit form to the correspondence between labelled trees and cycles which was found by Dénes (1).

Let $X = \{x_i\}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ be a set of vertices and

$T = \{t_j = (x_{i_j}, x_{i'_j}) = (x_{i'_j}, x_{i_j})\}$, $(1 \leqq j \leqq n-1)$ be a set of edges so that (X, T) is a tree.

Considering T as an abstract alphabet, we denote by G the set of all words in the letters $t \in T$ that contain each t at most once and we define a mapping from G into the symmetric group of permutations S_n on elements $1, 2, \ldots, n$, by associating the transposition $\bar{t}_j = (i_j, i'_j)$ with each $t_j = (x_{i_j}, x_{i'_j})$ and the product $\bar{g} = \bar{t}_{j_1} \bar{t}_{j_2} \ldots \bar{t}_{j_k}$ with each $g = t_{j_1}, t_{j_2} \ldots t_{j_k}$. It is trivial that any two $\bar{t}_j$, s corresponding to disjoint edges commute. Thus, unless (X, T) is a „bush'' not all the associated cycles are distinct.

For any permutation $s \in S_n$ and triple (a, b, c) of distinct elements, we define the indicator $\sigma(s; a, b, c)$ with value zero if a, b, and c do not belong to the same cycle of s and with value ± 1 depending upon whether b is or is not between a and c. Formally,

$\sigma(s\,; a, b, c) = \sigma(s\,; b, c, a) = -\sigma(s\,; a, c, b) = 1$ if $s^n a = b$, $s^{n'} a = c$ with $n \leqq n'$ and $s^{n''} a \neq c$ for all $n'' < n'$.

Property 1. *For any $g = g't \in G$ and triple (a, b, c) if $\sigma(\bar{g}'; a, b, c) \neq 0$ then $\sigma(\bar{g}'; a, b, c) = \sigma(\bar{g}; a, b, c)$.*

Proof. The subgraph $(X, T') \subset (X, T)$ corresponding to the factors of $\bar{g}'$ is a disjoint union of trees $T' = (T''_1, T''_2, \ldots, T''_k)$ some of which may be reduced to a single vertex.

By DÉNES' Theorem there is a one to one correspondence between the trees T''_j and the cycles which constitute the factors of the permutation $\bar{g}'$.

Now $T' \cup \{t\} \subset T$ is also a disjoint union of trees. The new edge $t = (x_i, x_j)$ connects two disconnected components of the graph (T', X). Furthermore, i and j belong to two different cycles of $\bar{g}'$ say, $(i\, i_2\, i_3 \ldots i_m)$ and $(j\, j_2\, j_3 \ldots j_p)$. Now $\bar{g} = \bar{g}' i$ is obtained by replacing these two cycles by the single cycle $(i\, j_2\, j_3 \ldots j_p j\, i_2 \ldots i_m)$. The result follows immediately. As a consequence, we have:

Property 2. *If $t = (x_i, x_j)$ and $t' = (x_j, x_k)$ are two distinct factors of the word $g = g_1\, t\, g_2\, t'\, g_3$, then $\sigma(\bar{g}; i, j, k) = 1$.*

Proof. Using the construction which has been given for property 1, it follows that i and j are in one cycle and k in another cycle of $\bar{g}_1\, \bar{t}\, \bar{g}_2$, the particular cycles being $(il_2 \ldots l_m\, j l_{m+2} \ldots l_{m+m})$ and $(kk_2 \ldots k_{m''})$, say. Thus

[1] Massachusetts Institute of Technology.

[2] Harvard University.

$\bar{g}_1 \bar{t} \bar{g}_2 \bar{t}'$ contains the cycle $(jk_2 \ldots k_{m''} kl_{m+2} \ldots l_{m+m'} il_2 \ldots l_m)$. Hence, $\sigma(\bar{g}_1 \bar{t} \bar{g}_2 \bar{t}'; i, j, k) = 1$ and the results follow from property 1.

Let $h_i \in G$ denote a product of the set of all edges t_{j_i} incident to x_i. Let us now consider $W = \{w = (h_1, h_2, \ldots, h_n)\}$ the set of all n-tuples of elements $h_1, \ldots, h_n$. Clearly the number of elements w in W is

$$\Delta(X, T) \overset{\text{def}}{=} \prod_{1 \le i \le n} (\deg x_i)\,!$$

For any given $w \in W$ if $g^* = \prod_{j=1}^{n-1} t_j$ is a product of maximal degree $n - 1$, and if for each i, the symbol t_j corresponding to edges incident to x_i appear in g^* in the same order as in h_i, then we shall say after LYNDON [2] that the word g^* is a *minimal infiltration* of $w(g^* \in ((w)))$. Clearly if deg $x_i = 1$, h_i reduces to a single t and may as well be omitted from w.

For instance if $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ and $T = \{t_1 = (x_1, x_2), t_2 = (x_2, x_3), t_3 = (x_3, x_4)\}$ we have

$$W = \{(t_1, t_1 t_2, t_2 t_3, t_3), \ (t_1, t_2 t_1, t_2 t_3, t_3), \ (t_1, t_2 t_1, t_3 t_2, t_3), \ (t_1, t_1 t_2, t_3 t_2, t_3)\} =$$
$$= \{(t_1 t_2, t_2 t_3), \ (t_2 t_1, t_2 t_3), \ (t_1 t_2, t_3 t_2), \ (t_2 t_4 t_3 t_2)\}$$

and

$$((t_2 t_1, t_2 t_3)) = \{t_2 t_1 t_3, t_2 t_3 t_1\}$$
$$((t_1 t_2, t_3 t_2)) = \{t_1 t_3 t_2, t_3 t_1 t_2\}$$
$$((t_2 t_1, t_3 t_2)) = \{t_3 t_2 t_1\}$$
$$((t_1 t_2, t_2 t_3)) = \{t_1 t_2 t_3\}\,.$$

We now wish to prove:

Property 3. *If $g \in ((w))$ and $g' \in ((w'))$ then $\bar{g} = \bar{g}'$* i. f. f. $w = w'$.

Proof. By 2) we know that $w \neq w'$ implies $\bar{g} \neq \bar{g}'$ for every $g \in ((w))$ $g' \in ((w'))$ since there must be at least one triple such that $\sigma(g; i, j, k) = -\sigma(g'; i, j, k)$.

To prove the backward implication let us now assume that $f, f' \in ((w))$ and $f \neq f'$.

According to 3) it may be that $f = f'$ i.e. $f = t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_{n-1}}$, $f' = t_{i'_1} t_{i'_2} \ldots t_{i'_{n-1}}$ but that one can be reduced to the other by a certain number of exchanges of adjacent t's corresponding to disjoint edges in which case $\bar{f} = \bar{f}'$.

Assume there is no such reduction f^* of f to f'. Thus there exists some minimal n such that the left factor of f^* of degree n is different from the left factor of f', i.e.

$$f^* = g_1(x_j, x_k)\, g_2\,; \; f' = g_1(x_1, x_m)\, g_2'(x_j, x_k)\, g_3'.$$

Now g_1' contains an edge with either x_j or x_k as end point since otherwise n is not minimal. Suppose this edge is (x_j, x_p). Then $f^* = g_1(x_j, x_k)\, g_2'(x_j, x_p)\, g_{3'}$ and $f' = g_1(x_1, x_m)\, g_{2'}'(x_j, x_p)\, g_{3'}'(x_j, x_k)\, g_{4'}'$ in which case by property 2, $\sigma(f^*; j, k, p) \neq \sigma(f'; j, k, p)$.

This completes the proof and it follows immediately that the number of distinct cycles associated to the tree (X, T) is simply $\Delta(X, T)$.

(Received April 1, 1962)

REFERENCES

[1] DÉNES, J.: „The Representation of a Permutation as the Product of a Minimal Number of Transpositions and its Connection with the Theory of Graphs." *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **4** (1959) 63–70.

[2] LYNDON, R. C.: „On Burnside's Problem. I." *Trans. Amer. Math. Soc.* 77 (1954) 207–215.

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ DÉNES-A

M. EDEN и M. P. SCHÜTZENBERGER

Резюме

Авторы устанавливают соответствие между числом деревьев с n нумерированными вершинами и числом разложений цикла степени $n-1$ на произведений транспозиций. Они доказывают что эти два числа равны.

BEMERKUNG ZUR CHARAKTERISIERUNG DES GAUSS'SCHEN FEHLERGESETZES

von

E. VINCZE[1]

1. In der Literatur finden sich auch mehrere Arbeiten, in denen die *charakteristische Funktion* der normalen Verteilung durch die Funktionalgleichung

$$\varphi(x) = \varphi(ax)\,\varphi(bx) \tag{1'}$$

charakterisiert ist. Vor allem sind zu diesem Problem die Arbeiten von Ю. В. Линник [3] und G. Baxter [2] (vgl. [4], S. 182) zu erwähnen. Ein ähnliches Verfahren enthält auch das Buch von A. Rényi [5]. Die Gleichung (1') hat auch J. Aczél [1] (S.96) unter stärkeren Bedingungen gelöst.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir dieselbe Gleichung auflösen, *ohne* jedoch voraussetzen, dass $\varphi(x)$ eine charakteristische Funktion ist.

2. Wir betrachten die komplexe Funktionalgleichung

$$\varphi(x) = \varphi(ax)\,\varphi(bx) \qquad (a, b > 0\,; a^2 + b^2 = 1), \tag{1}$$

in welcher a, b *feste* Konstanten bezeichnen, weiter diese und auch x reell sind. Es gilt der folgende

Satz. *Die einzige komplexe, nicht identisch konstante und an der Stelle $x = 0$ zweimal derivierbare Lösung der Funktionalgleichung* (1) *ist*

$$\varphi(x) = e^{mx^2},$$

wobei $m(\neq 0)$ eine beliebige komplexe Konstante bezeichnet.

Beweis. Aus (1) geht hervor, dass $\varphi(x) \equiv 0$ und $\varphi(x) \equiv 1$ je eine Lösung von (1) darstellen; im weiteren sollen diese trivialen Lösungen ausgeschlossen bleiben.

Wir können annehmen, dass $a \geqq b$ ist. Mit $x = 0$ ergibt sich aus (1)

$$\varphi(0)\,[1 - \varphi(0)] = 0,$$

d.h. $\varphi(0) = 0$ oder $\varphi(0) = 1$. Falls nun $\varphi(0) = 0$, dann ist $\varphi(x) \equiv 0$, denn die Funktion $\varphi(x)$ ist an der Stelle $x = 0$ stetig, es gilt also

$$|\varphi(x)| < \varepsilon, \text{ wenn } |x| \leqq \delta. \tag{2}$$

---

[1] Technische Universität für Schwerindustrie, Miskolc—Egyetemváros.

Aus (1) ergibt sich ferner

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} \varphi(x) = \varphi(ax)\,\varphi(bx) = \varphi(a^2 x)\,\varphi(abx)^2\,\varphi(b^2 x) = \dots \\ \dots = \prod\limits_{\nu+\mu=n} \varphi(a^\nu b^\mu x), \end{cases}$$

worin die Anzahl der Faktoren des Produktes 2^n beträgt. Da $0 < b \leqq a < 1$, lässt sich zu jedem Wert $x = x_0$ durch entsprechende Wahl von n erreichen, dass

$$\text{(4)} \qquad a^\nu b^\mu x_0 \leqq a^n x_0 \leqq \delta .$$

Mit den Gleichungen (2) und (3) erhalten wir nun

$$|\varphi(x_0)| = \prod_{\nu+\mu=n} |\varphi(a^\nu b^\mu x_0)| < \varepsilon^{2^n},$$

und da wir den Wert ε beliebig klein wählen können, ist für jeden beliebigen Wert x_0 $\varphi(x_0) = 0$, also $\varphi(x) \equiv 0$.

Besitzt also die Gleichung (1) eine nicht identisch verschwindende Lösung, so ist $\varphi(0) = 1$.

Hieraus geht ferner hervor, dass $\varphi(x) \neq 0$. Da nämlich die Funktion $\varphi(x)$ an der Stelle $x = 0$ stetig ist, kann man $\delta > 0$ so angeben, dass

$$\text{(5)} \qquad |\varphi(x) - 1| < 1 \qquad\qquad |x| \leqq \delta$$

wird. Auch bei beliebigem Wert $x = x_0$ können wir durch entsprechende Wahl von n stets erreichen, dass (4) gültig wird. Dann gilt (5) für $\varphi(a^\nu b^\mu x_0)$, also ist $\varphi(a^\nu b^\mu x_0) \neq 0$ und wegen (3) ist $\varphi(x_0) \neq 0$ für jeden beliebigen Wert x_0.

Suchen wir jetzt die Lösung der Funktionalgleichung (1) in der Form

$$\varphi(x) = p(x)\, e^{ir(x)},$$

wo $p(x)$ (> 0) und $r(x)$ reelle Funktionen bezeichnen, dann erhalten wir aus (1)

$$p(x)\, e^{ir(x)} = p(ax)\, e^{ir(ax)}\, p(bx)\, e^{ir(bx)},$$

$$\text{(6)} \qquad p(x) = p(ax)\, p(bx),$$

$$\text{(7)} \qquad r(x) \equiv r(ax) + r(bx) \qquad (\operatorname{mod}\ 2\pi).$$

Wir betrachten zuerst die Gleichung (6) für $x \geqq 0$. Führen wir die Bezeichnung

$$\psi_1(x^2) \overset{\text{def}}{=} \log p(x) \qquad\qquad [x \geqq 0; p(x) > 0]$$

ein, dann kann man statt (6) die Gleichung

$$\text{(8)} \qquad \begin{cases} \psi_1(\xi) = \psi_1(\alpha\xi) + \psi_1(\beta\xi), \\ \xi = x^2,\ 0 < b^2 = \beta \leqq \alpha = a^2 < 1,\ \alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

schreiben. Es sei hier bemerkt, dass die Substitution $\psi_1(x^2) = \log p(x)$ wegen der Bedingung $x \geqq 0$ *umkehrbar* ist. Die triviale Lösung $\psi_1(\xi) \equiv 0$ [d.h. $p(x) \equiv 1$, $x \geqq 0$] kann ausser acht bleiben.

Durch Induktion ergibt sich

$$\psi_1(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \psi_1(\alpha^{n-k}\beta^k\xi). \tag{9}$$

Für $n = 1$ geht diese Gleichung in (8) über und aus den Gleichungen

$$\psi_1(\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \psi_1(\alpha^{n-1-k}\beta^k\xi), \tag{9a}$$

$$\psi_1(\alpha^{n-1-k}\beta^k\xi) = \psi_1(\alpha^{n-k}\beta^k\xi) + \psi_1(\alpha^{n-1-k}\beta^{k+1}\xi)$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

folgt tatsächlich, dass

$$\psi_1(\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} [\psi_1(\alpha^{n-k}\beta^k\xi) + \psi_1(\alpha^{n-1-k}\beta^{k+1}\xi)] =$$
$$= \binom{n-1}{0} \psi_1(\alpha^n\beta^0\xi) + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right] \psi_1(\alpha^{n-k}\beta^k\xi) +$$
$$+ \binom{n-1}{n-1} \psi_1(\alpha^0\beta^n\xi) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \psi_1(\alpha^{n-k}\beta^k\xi).$$

Aus (8) ergibt sich $\psi_1(0) = 0$. Wir beweisen, dass auch die Funktion $\psi_1(\xi)$ an der Stelle $\xi = 0$ derivierbar ist, falls man die Funktion $\varphi(x)$ und damit auch $p(x)$ an der Stelle $x = 0$ zweimal derivieren kann. Wegen

$$p''(0) = \lim_{x \to 0+0} \frac{p'(x) - p'(0)}{x - 0} \tag{10}$$

existiert $p'(x)$ in einer (kleinen) Umgebung der Stelle $x \geqq 0$, also lässt sich aus (6) die Gleichungen

$$p'(x) = ap'(ax)\,p(bx) + bp'(bx)\,p(ax) \qquad (x \geqq 0),$$

$$p'(0) = (a + b)\,p'(0)$$

schreiben, woraus $p'(0) = 0$ folgt. Wenn $\psi_1'(0)$ existiert, dann ist

$$\psi_1'(0) = \lim_{\xi \to 0} \frac{\psi_1(\xi) - \psi_1(0)}{\xi - 0} = \lim_{x \to 0+0} \frac{\log p(x)}{x^2}.$$

Da wegen (10) und $p'(0) = 0$

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{\log p(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{2\,p(x)} \frac{p'(x)}{x} = \frac{1}{2} p''(0)$$

gilt, existiert $\psi_1'(0)$ tatsächlich und ist

$$\psi_1'(0) = \frac{1}{2} p''(0) = m_1 .$$

Diese Formel bedeutet auch, dass $\delta > 0$ für beliebige $\varepsilon > 0$ so existiert, dass die Ungleichung

$$(11) \qquad (m_1 - \varepsilon)\,\xi \leqq \psi_1(\xi) \leqq (m_1 + \varepsilon)\,\xi \qquad 0 \leqq \xi \leqq \delta$$

gültig ist. Da $0 < \beta \leqq \alpha < 1$, folgt bei entsprechender Wahl von n für beliebigen Wert x_0 die Ungleichung

$$\alpha^{n-k}\,\beta^k\,\xi_0 \leqq \alpha^n\,\xi_0 \leqq \delta ,$$

wir können also auf Grund von (11) die Ungleichung

$$(m_1 - \varepsilon)\binom{n}{k}\alpha^{n-k}\,\beta^k\,\xi_0 \leqq \binom{n}{k}\psi_1(\alpha^{n-k}\,\beta^k\,\xi_0) \leqq (m_1 + \varepsilon)\binom{n}{k}\alpha^{n-k}\,\beta^k\,\xi_0$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n)$$

schreiben. Addieren wir diese Ungleichungen und beachten wir die Formel

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n-k}\,\beta^k = (\alpha + \beta)^n = 1 ,$$

dann ergibt sich

$$(m_1 - \varepsilon)\,\xi_0 \leqq \psi_1(\xi_0) \leqq (m_1 + \varepsilon)\,\xi_0 \qquad (\varepsilon > 0).$$

Da man den Wert ε beliebig klein wählen kann und diese Ungleichung für jedes $\xi = \xi_0$ gilt, ist $\psi_1(\xi) = m_1\xi$ $(m_1 \neq 0)$, also erhalten wir im Falle $x \geqq 0$

$$p(x) = e^{m_1 x^2} \qquad (m_1 \neq 0, \text{konst.}).$$

Gleichfalls erhalten wir aus (6) für $x \leqq 0$ die Lösung

$$p(x) = e^{m_1' x^2} \qquad (m_1' \neq 0, \text{konst.}),$$

aber wegen

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{p'(x)}{x} = p''(0) = \lim_{x \to 0-0} \frac{p'(x)}{x}$$

müssen m_1 und m_1' übereinstimmen.

Bei der Funktionalkongruenz (7) können wir wegen der Existenz $\varphi''(0)$ annehmen, dass die Funktion $r(x)$ in (einer kleinen Umgebung) $|x| < \delta$ stetig ist, also folgt aus (7)

$$r(x) = r(ax) + r(bx) \qquad |x| < \delta .$$

Diese Gleichung können wir ebenso auflösen, wie (6) und wir erhalten aus (7) für beliebiges x

$$r(x) = m_2\,x^2 + 2\,k(x)\,\pi,$$

wo $k(x)$ stets eine ganze Zahl ist [in $|x| < \delta$ $k(x) \equiv 0$].

Damit ist tatsächlich

$$\varphi(x) = e^{(m_1 + im_2)x^2}$$

und der Beweis ist vollendet.

3. Man kann die Frage aufwerfen, ob es genügt, für $\varphi(x)$ statt der zweimaligen Derivierbarkeit an der Stelle $x = 0$ weniger voraussetzen, so aber, dass die Lösung von (1) noch dieselbe Funktion bleibe. Die Frage muss verneint werden, wie dies ein interessantes Beispiel von J. Aczél (briefliche Mitteilung) zeigt:

Es seien $q(x)$ eine beliebige nach ω periodische Funktion und $\log a = r_1 \omega$, $\log b = r_2 \omega$ $(r_1, r_2$ *ganz*), *dann ist*

$$\varphi(x) = \exp\,[x^2\, q(\log|x|)]$$

eine einmalig derivierbare Funktion, die der Gleichung (1) *genügt.*

(Eingegangen: 25. August, 1959; in veränderter Form: 18. April, 1962.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Aczél, J.: *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen.* Basel—Stuttgart, 1961.
[2] Baxter, G.: „On a characterization of the normal law." *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **41** (1955) 383—385.
[3] Линник, Ю. В. *Разложения вероятностных законов.* Ленинград, 1960.
[4] Lukács, E.: *Characteristic functions.* London, 1960.
[5] Rényi A.: *Valószínűségszámítás.* Budapest, 1954.

ЗАМЕЧАНИЕ К ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ФУНКЦИИ ОШИБКИ ГАУССА

E. VINCZE

Резюме

Статья примыкает к работам Ю. В. Линника [3], G. Baxter [2] (сравн.: E. Lukács [4] и A. Rényi [5]) которые пользуются функциональным уравнением

$$\varphi(x) = \varphi(ax)\,\varphi(bx)\,; \qquad (a^2 + b^2 = 1) \tag{1'}$$

для характеризации *характеристической функции* нормального распределения. Уравнение (1') решается для комплексных значений функции, однако в процессе решения не обуславливается, что $\varphi(x)$ является характеристической функцией. Автор иллюстрирует при помощи одного примера (сообщённого ему письменно J. Aczél), что условия дальше ослаблять уже нельзя. Полученная теорема является по существу, обобщением одной теоремы J. Aczél [1] (стр. 96).

ÜBER DIE ABSOLUTE SUMMIERBARKEIT UND DIE KONVERGENZ DER ORTHOGONALREIHEN

von

G. ALEXITS—D. KRÁLIK[1]

Einleitung

Sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein im (endlichen) Intervall (a, b) orthonormiertes System bezüglich der monoton nicht-abnehmenden Funktion $\alpha(x)$ mit $\alpha'(x) > 0$ fast überall, d.h.

$$\int_a^b \varphi_k(x)\,\varphi_l(x)\,d\,\alpha(x) = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l. \end{cases}$$

Ist $\{\lambda_n\}$ eine positive, im strengen Sinne wachsende Zahlenfolge mit $\lambda_n \to \infty$, so heißt die Orthogonalreihe

$$\sum_n c_n\,\varphi_n(x) \tag{1}$$

im Punkt x $(R, \lambda_n, 1)$-summierbar, wenn die Folge der Summen

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}}\right) c_k\,\varphi_k(x) \tag{2}$$

konvergiert. Ist $\lambda_n = q^n$ für ein $q > 1$, so ist bekanntlich die $(R, q^n, 1)$-Summierbarkeit mit der Konvergenz gleichwertig, während die $(R, n, 1)$-Summierbarkeit $(\lambda_n = n)$ mit der $(C, 1)$-Summierbarkeit der Reihe (1) identisch ist.

Die Reihe (1) heißt $|R, \lambda_n, 1|$-summierbar (absolut $(R, \lambda_n, 1)$-summierbar) im Punkt x, wenn die Reihe $\Sigma\,|\,\sigma_n(x) - \sigma_{n-1}(x)\,|$ konvergiert. Die $|R, q^n, 1|$-Summierbarkeit $(q > 1)$ bedeutet also absolute Konvergenz, bzw. die $|R, n, 1|$-Summierbarkeit absolute $(C, 1)$-Summierbarkeit ($|C, 1|$-Summierbarkeit) von (1).

Tandori [4] hat bewiesen, daß die Bedingung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} c_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty$$

nicht nur hinreicht, was sich leicht beweisen läßt, sondern auch notwendig ist, damit (1) für jedes Orthonormalsystem $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall $|C, 1|$-summierbar sei. Für letzteres hat Billard [2] später einen recht einfachen Beweis gegeben.

Im folgenden wollen wir zunächst das obige, für die $|C, 1|$-Summation erreichte Resultat auf die $|R, \lambda_n, 1|$-Summation verallgemeinern. Es wird

[1] Technische Hochschule, Budapest.

sich herausstellen, daß unter der evident notwendigen Bedingung

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty \tag{3}$$

jede Orthogonalreihe (1) fast überall $|R, \lambda_n, 1|$-summierbar ist, wenn die Folge $\{\lambda_n\}$ (von den Koeffizienten c_n abhängend) entsprechend gewählt wird. Genauer: bezeichnet $\lambda(x)$ jene stets wachsende Funktion, welche für $x = n$ den Wert $\lambda(n) = \lambda_n$ hat und in $(n, n+1)$ linear ist, $l(x)$ die zu $\lambda(x)$ inverse Funktion und $[a]$ den ganzen Teil der positiven Zahl a, so gilt der folgende

Satz I.[2] *Die Bedingung*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=[l(2^n)]+1}^{[l(2^{n+1})]} c_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty \tag{4}$$

ist hinreichend, damit die Orthogonalreihe (1) *fast überall* $|R, \lambda_n, 1|$*-summierbar sei.*

Ist $\lambda(x)$ von oben oder von unten konvex und $\lambda(x) < q^x$, wo $1 < q < 2$, und ist (4) *nicht erfüllt, so gibt es Orthogonalreihen mit den Koeffizienten c_n, die fast überall nicht* $|R, \lambda_n, 1|$*-summierbar sind.*

Die für den notwendigen Teil des Satzes eingeführten Einschränkungen sind nicht wesentlich. Die einschränkende Konvexitätsforderung erlaubt nämlich die Betrachtung aller praktisch interessanten $(R, \lambda_n, 1)$-Methoden, während die Forderung $\lambda(x) < q^x$ mit $1 < q < 2$ keine weitere Einschränkung bedeutet; denn wäre $\lambda(x) \geqq q^x$ für ein $q > 1$, so würde sich die $|R, \lambda_n, 1|$-Summierbarkeit auf den trivialen Fall der absoluten Konvergenz reduzieren.

Aus dem Satz I [illegible] das folgende Korollar:

Ist nur (3) *erfüllt,* [illegible] *Orthogonalreihe* (1) *für jedes genügend langsam wachsende $\{\lambda_n\}$ fast* [illegible] $|R, \lambda_n, 1|$*-summiert werden.*

Wächst nämlich $\{\lambda_n\}$ genügend langsam, so wächst $\{l(n)\}$ rasch, d.h. es folgt aus (3) z.B.

$$\sum_{k=[l(2^n)]+1}^{\infty} c_k^2 < \frac{1}{n^4}$$

und folglich ist die hinreichende Bedingung (4) erfüllt.

Es ist nicht ohne Interesse jene Orthogonalreihen zu betrachten, deren Koeffizienten durch die entsprechenden Glieder einer positiven monotonen Nullfolge majorisiert werden können, d.h. für welche die Beziehung $c_n = O(q_n)$ mit $q_n \downarrow 0$ gilt. Für derartige Orthogonalreihen läßt sich ein $|R, \lambda_n, 1|$-Summationssatz selbst unter Berücksichtigung der Lückenhaftigkeits-Verhältnisse der Reihe (1) aussprechen. Wir nennen (1) $\mu(n)$-lückenhaft, wenn $\{\mu(n)\}$ eine positive, monoton wachsende Zahlenfolge ist und die Anzahl der nicht verschwindenden Koeffizienten mit Indizes zwischen n und $2n$ von der Größenordnung $O(\mu(n))$ ist. Da offensichtlich $\mu(n) \leqq n$ angenommen werden kann, bedeutet keine weitere Einschränkung, wenn wir $\{\mu(n)\}$ konkav (von oben konvex) annehmen.

---

[2] Während der Drucklegung haben wir erfahren, daß in der *Acta Sci. Math.* **23** (1962), S. 92—95 eine Arbeit von F. Móricz schon in den nächsten Wochen erscheinen wird, in welcher unser Satz I sogar ohne Konvexitätsforderungen bewiesen ist.

Satz II. *Ist die Funktion $\lambda(x) \leqq q^x$ $(q > 1)$ von oben oder von unten konvex und die ist Reihe* (1) *$\mu(n)$-lückenhaft mit konkavem $\{\mu(n)\}$, wo $\mu(n)$ außerdem noch der Bedingung $\mu(l(2^{n+1})) = O(\mu(l(2^n)))$ genügt, sind ferner die Koeffizienten c_n durch eine positive, monotone Folge $\{q_n\}$ majorisiert, welche die Bedingung*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\mu(n)}\, q_n\, \lambda'(n)}{\lambda(n)} < \infty \tag{5}$$

erfüllt ($\lambda'(x)$ ist die Ableitung von $\lambda(x)$), *so ist die Orthogonalreihe* (1) *bei Erfülltsein von* (3) *fast überall* $|R, \lambda_n, 1|$*-summierbar.*

Im Spezialfall der $|C, 1|$-Summation, d.h. im Spezialfall $\lambda(x) = x$ reduziert sich (5) auf

$$\sum_n \frac{\sqrt{\mu(n)}\, q_n}{n} < \infty,$$

also auf eine Summierbarkeitsbedingung, von welcher schon bekannt war (LEINDLER [3]), daß sie sogar die $\left|C, \alpha > \frac{1}{2}\right|$-Summation nach sich zieht (die $(C, \alpha > 0)$-Summation schon früher, ALEXITS ([1], S. 130)).

Für eine, die klassischen Fälle umfassende Klasse von Orthogonalreihen mit monoton majorisierbaren Koeffizienten läßt sich unter sehr schwachen Lückenhaftigkeits-Annahmen auch ein Konvergenzsatz beweisen. Diese sind die sog. polynomartigen Ortho[illegible]hen. (Für die Definition der polynomartigen Orthogonalsystem[illegible]XITS ([1], S. 177—178)). Sie umfassen u.a. die trigonometrische [illegible]e und die Entwicklungen nach Orthogonalpolynomen. Unser diesbezügliche Satz lautet wie folgt:

Satz III. *Sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein polynomartiges Orthonormalsystem, deren Funktionen im Teilintervall $[c, d]$ von $[a, b]$ der Bedingung $\varphi_n(x) = O(1)$ genügen. Sind die Koeffizienten von* (1) *durch die positive, monotone Folge $\{q_n\}$ majorisierbar, welche der Bedingung*

$$\sum_n q_n^2 (\log n)^\gamma < \infty \qquad (0 \leqq \gamma \leqq 1)$$

genügt, so folgt aus der $\mu(n)$-Lückenhaftigkeit der Reihe (1) *mit*

$$\mu(n) = O\left(\frac{n}{\log^{1-\gamma} n}\right)$$

ihre Konvergenz fast überall in (c, d).

Der Spezialfall $\gamma = 0$ scheint besonders interessant zu sein. Dann folgt nämlich die Konvergenz fast überall aus $\sum_n q_n^2 < \infty$ und $\mu(n) = O\left(\frac{n}{\log n}\right)$. Ob diese Lückenhaftigkeitsbedingung scharf ist, wissen wir nicht. Für allgemeine, also nicht notwendig polynomartige Orthogonalreihen muß sie durch $\mu(n) = O\left(\frac{n}{\log^2 n}\right)$ ersetzt werden und diese Bedingung ist schon scharf (vgl. ALEXITS [1] S. 137—138.)

Beweis des Satzes I

Durch Anwendung der Bunjakowski-Schwarzschen Ungleichung erhalten wir die Abschätzung

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b |\sigma_n(x)-\sigma_{n-1}(x)|\,d\alpha(x)=O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^2 c_k^2\right)^{\frac12}=$$

$$=O(1)\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{n=[l(2^\nu)]+1}^{[l(2^{\nu+1})]}\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^2 c_k^2\right)^{\frac12}=$$

$$=O(1)\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{n=[l(2^\nu)]+1}^{[l(2^{\nu+1})]}\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)\left(\sum_{k=1}^{[l(2^{\nu+1})]}\lambda_k^2 c_k^2\right)^{\frac12}=$$

$$=O(1)\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\sum_{j=1}^{\nu+1}\lambda_{[l(2^j)]}\left(\sum_{k=[l(2^{j-1})]+1}^{[l(2^j)]}c_k^2\right)^{\frac12}\right\}\frac{1}{\lambda_{[l(2^\nu)]+1}}.$$

Wegen $\lambda_{[l(2^j)]}\leqq\lambda(l(2^j))=2^j$ und $\lambda_{[l(2^\nu)]+1}\geqq\lambda_{l(2^\nu)}=2^\nu$ kann letzteres auch in der Form

$$O(1)\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\sum_{j=1}^{\nu+1}2^j\left(\sum_{k=[l(2^{j-1})]+1}^{[l(2^j)]}c_k^2\right)^{\frac12}\right\}\frac{1}{2^\nu}=O(1)\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{k=[l(2^\nu)]+1}^{[l(2^{\nu+1})]}c_k^2\right)^{\frac12}$$

geschrieben werden, woraus sich nach (4) die Konvergenz der Reihe $\Sigma\int_a^b|\sigma_\nu(x)-\sigma_{\nu-1}(x)|\,d\alpha(x)$ ergibt, also gilt

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|\sigma_\nu(x)-\sigma_{\nu-1}(x)|<\infty$$

fast überall. Damit haben wir die Hinlänglichkeit von (4) für die $|R,\lambda_n,1|$—Summation fast überall der Orthogonalreihe (1) bewiesen.

Jetzt zeigen wir, dem bei der $|C,1|$-Summation angewandten Gedankengang von BILLARD folgend, daß die Bedingung (4) erfüllt wird, wenn die Reihe (1) auf einer Menge $E\subset[0,1]$ von positivem Maß $|R,\lambda_n,1|$-summierbar ist und $\{\varphi_n(x)\}$ das Rademachersche Orthonormalsystem bedeutet. Wir gehen von einem bekannten Lemma aus (s. z.B. ZYGMUND [5], I. S. 203), das folgenderweise lautet: Sei $E\subset[0,1]$ eine beliebige Menge von positivem Maß, dann existiert eine (von der Menge E abhängende) natürliche Zahl $h_0=h_0(E)$, so daß für jede Summe $\sum_{k=h_0}^{N}a_k\varphi_k(x)$ die Beziehung

$$|E|^2\left(\sum_{k=h_0}^{N}a_k^2\right)^{\frac12}\leqq C\int_{(E)}|a_{h_0}\varphi_{h_0}(x)+\ldots+a_N\varphi_N(x)|\,dx$$

besteht, wo C eine absolute Konstante und $|E|$ das Maß der Menge E bedeutet.

Wird nun für die Reihe (1) die Beziehung

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_n(x) - \sigma_{n-1}(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n+1}}\right) \left| \sum_{k=0}^{n} \lambda_k c_k \varphi_k(x) \right| < \infty$$

auf einer Menge $E' \subset [0, 1]$ von positivem Maß erfüllt, so gibt es nach dem Egoroffschen Satz eine Menge $E \subset E'$ von ebenfalls positivem Maß, auf welcher die rechtsstehende Reihe gleichmäßig konvergiert und mithin die Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_n(x) - \sigma_{n-1}(x)| < M$$

gilt. Demzufolge besteht auch die weitere Ungleichung

$$M|E| > \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(E)} |\sigma_n(x) - \sigma_{n-1}(x)|\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n+1}}\right) \int_{(E)} \left| \sum_{k=0}^{n} \lambda_k c_k \varphi_k(x) \right| dx.$$

Nach dem zitierten Lemma existiert daher ein Index h_0 derart, daß für $n > h_0$ die Abschätzung

$$\int_{(E)} \left| \sum_{k=h_0+1}^{n} \lambda_k c_k \varphi_k(x) \right| dx \geqq C_1 |E|^2 \left(\sum_{k=h_0+1}^{n} \lambda_k^2 c_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

richtig ist. Da offensichtlich $\int_{(E)} \left| \sum_{k=0}^{h_0} \lambda_k c_k \varphi_k(x) \right| dx \leqq K_{h_0}$ ist, erhalten wir auf Grund der beiden vorangehenden Ungleichungen:

$$\sum_{n=h_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n+1}}\right) \int_{(E)} \left| \sum_{k=h_0+1}^{n} \lambda_k c_k \varphi_k(x) \right| dx < M|E| + \frac{K_{h_0}}{\lambda_{h_0}} = C_2.$$

Sei k_0 die kleinste natürliche Zahl, für welche $h_0 + 1 \leqq [l(2^{k_0})]$ ist, dann haben wir im Sinne des zitierten Lemmas

$$\sum_{n=[l(2^{k_0})]}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n+1}}\right) \left(\sum_{k=[l(2^{k_0})]}^{n} \lambda_k^2 c_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty .$$

Vernachlässigen wir in dieser Reihe jene Glieder, bei denen $[l(2^{k_0})] \leqq n < [l(2^{k_0+1})]$ ist, ersetzen sodann diejenigen Glieder, für die $[l(2^{k_0+j})] \leqq n < [l(2^{k_0+j+1})]$ $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ gilt, durch das nicht größere Glied

$$\left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n+1}}\right) \left(\sum_{k=[l(2^{k_0})]}^{[l(2^{k_0+j})]} \lambda_k^2 c_k^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

so erhalten wir statt der letzten konvergenten Reihe die nicht größere Summe

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=[l(2^{k_0})]}^{[l(2^{k_0+j})]}\lambda_k^2 c_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{n=[l(2^{k_0+j})]}^{[l(2^{k_0+j+1})]-1}\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=[l(2^{k_0})]}^{[l(2^{k_0+j})]}\lambda_k^2 c_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\lambda_{[l(2^{k_0+j})]}}-\frac{1}{\lambda_{[l(2^{k_0+j+1})]}}\right).$$

Wenn wir hier statt $\sum\limits_{k=[l(2^{k_0})]}^{[l(2^{k_0+j})]}\lambda_k^2 c_k^2$ die noch kleinere Summe $\sum\limits_{k=[l(2^{k_0+j-1})]+1}^{[l(2^{k_0+j})]}\lambda_k^2 c_k^2$ nehmen, weiterhin die Ungleichungen

$$\sum_{k=[l(2^{k_0+j-1})]+1}^{[l(2^{k_0+j})]}\lambda_k^2 c_k^2 \geqq \lambda^2_{[l(2^{k_0+j-1})]+1}\sum_{k=[l(2^{k_0+j-1})]+1}^{[l(2^{k_0+j})]}c_k^2 \geqq \lambda^2\big(l(2^{k_0+j-1})\big)\sum_{k=[l(2^{k_0+j-1})]+1}^{[l(2^{k_0+j})]}c_k^2$$

n Betracht ziehen und zur Abkürzung die Bezeichnung

$$A_\nu=\left(\sum_{k=[l(2^\nu)]+1}^{[l(2^{\nu+1})]}c_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

einführen, erhalten wir, da $\lambda\big(l(2^{k_0+j-1})\big)=2^{k_0+j-1}$ ist, schließlich die Beziehung

$$\sum_{j=1}^{\infty}A_{k_0+j-1}\left(\frac{2^{k_0+j-1}}{\lambda_{[l(2^{k_0+j})]}}-\frac{2^{k_0+j-1}}{\lambda_{[l(2^{k_0+j+1})]}}\right)<\infty. \tag{6}$$

Im Klammerausdruck ist der erste Bruch nicht kleiner, als $\dfrac{2^{k_0+j-1}}{\lambda\big(l(2^{k_0+j})\big)}=\dfrac{1}{2}$, und der zweite ist gleich

$$\frac{2^{k_0+j-1}}{\lambda\big(l(2^{k_0+j+1})\big)\cdot\dfrac{\lambda_{[l(2^{k_0+j+1})]}}{\lambda\big(l(2^{k_0+j+1})\big)}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\lambda\big(l(2^{k_0+j+1})\big)}{\lambda_{[l(2^{k_0+j+1})]}}.$$

Wie wir schon in der Einleitung erwähnt haben, steigt q^x (mit $1<q<2$) schneller an als $\lambda(x)$, und dasselbe gilt auch für ihre Logarithmen, d.h. die Sehne der Kurve $y=\log q^x$ hat für genügend große x eine größere Steigung als die entsprechende Sehne der Kurve von $\log\lambda(x)$. Infolgedessen gilt die folgende Ungleichung:

$$\log\lambda(x)-\log\lambda([x])\leqq\log q^x-\log q^{[x]},$$

bzw.

$$\log\frac{\lambda(x)}{\lambda([x])}\leqq\log\frac{q^x}{q^{[x]}},$$

woraus sich

$$\frac{\lambda(x)}{\lambda([x])}\leqq q^{x-[x]}<q<2$$

ergibt. Auf Grund dieses Resultates ist $\dfrac{\lambda\big(l(2^{k_0+j+1})\big)}{\lambda_{[l(2^{k_0+j+1})]}}$ nicht größer als q, so daß der Faktor von A_{k_0+j-1} in (6) gewiß nicht kleiner ist als $\frac{1}{2}-\frac{q}{4}>0$, woraus die Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu$ folgt. Damit haben wir auch den notwendigen Teil des Satzes I bewiesen.

Beweis des Satzes II

Auf Grund der $\mu(n)$ Lakunarität der Reihe (1) können wir den Ausdruck

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=[l(2^n)]+1}^{[l(2^{n+1})]} c_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

in der Form schreiben:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{q^2_{[l(2^n)]}\,\mu(l(2^n))} = O(1)\sum_{n=1}^{\infty} q_{[l(2^n)]}\sqrt{\mu(l(2^n))}\,.$$

Unter Berücksichtigung der Eigenschaften von $\lambda(x)$ können wir die letzte Summe folgendermaßen umformen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_{[l(2^n)]}\sqrt{\mu(l(2^n))}\sum_{k=[l(2^{n-1})]+1}^{[l(2^n)]}\frac{\lambda'(k)}{\lambda(k)},$$

so daß wir endlich

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=[l(2^{n-1})]+1}^{[l(2^n)]}\frac{\sqrt{\mu(k)}\,q_k\,\lambda'(k)}{\lambda(k)} = O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\mu(n)}\,q_n\,\lambda'(n)}{\lambda(n)} < \infty$$

erhalten, womit der Satz II bewiesen ist.

Beweis des Satzes III

Unser Satz, den wir ursprünglich umständlicher bewiesen haben, ist, wie es uns L. LEINDLER liebenswürdigerweise mitgeteilt hat, eine unmittelbare Folge des folgenden einfachen Lemmas:

Sind die Glieder c_n der $\mu(n)=O\left(\frac{n\,\alpha_n}{\beta_n}\right)$ — lakunären Reihe $\Sigma\, c_n$ durch die Glieder einer monotonen Nullfolge $\{q_n\}$ majorisierbar, wo $\{\alpha_n>0\}$ und $\{\beta_n>0\}$ monoton nichtabnehmend sind und den Bedingungen $\alpha_{2n}=O(\alpha_n)$, $\beta_{2n}=O(\beta_n)$ genügen, so folgt aus der Konvergenz von $\sum_n q_n^2\alpha_n$ die von $\sum_n c_n^2\beta_n$.

Es ist nämlich

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n^2\beta_n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} c_k^2\beta_k = O(1)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} q_k^2\beta_k =$$

$$= O(1)\sum_{n=0}^{\infty} q_{2^n}^2\,\beta_{2^{n+1}}\frac{2^n+\alpha_{2^n}}{\beta_{2^n}} = O(1)\sum_{n=1}^{\infty} q_{2^n}^2\,2^n\,\alpha_{2^n}\sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n}\frac{1}{k} =$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} q_k^2\alpha_k = O(1)\sum_{n=1}^{\infty} q_n^2\alpha_n < \infty\,.$$

Sei nun $\alpha_n = (\log n)^\gamma$, $\beta_n = \log n$, dann ergibt sich nach diesem Lemma aus unserer Annahme $\Sigma q_n^2 (\log n)^\gamma < \infty$ die Abschätzung $\Sigma c_n^2 \log n < \infty$. Es ist aber bekannt (s. ALEXITS [1], S. 182), daß die Orthogonalreihe (1) im Teilintervall (c, d) von (a, b) fast überall konvergiert, wenn das polynomartige Orthonormalsystem $\{\varphi_n(x)\}$ in $[c, d]$ beschränkt und die Reihe $\Sigma c_n^2 \log n$ konvergent ist. Damit haben wir den Satz III bewiesen.

Ist z.B. $\{\varphi_n(x)\}$ das System der trigonometrischen Funktionen oder der Jacobischen Polynome, so folgt aus der $\dfrac{n}{\log n}$-Lakunarität der Reihe (1) und der Majorisierbarkeit der Koeffizienten c_n durch eine monotone Nullfolge $\{q_n\}$ mit $\Sigma q_n^2 < \infty$ die Konvergenz von (1) fast überall.

Es erhebt sich die weitere Frage, ob unter diesen Voraussetzungen außer der Konvergenz auch etwa die $|C, 1|$-Summierbarkeit der Reihe (1) besteht? Diese Frage können wir nur unter Verengerung der Lakunaritätsbedingungen beantworten. Wenn z. B. $\mu(n) = O\left(\dfrac{n}{\omega_n \log n}\right)$ ist, wo $\{\omega_n\}$ monoton wächst und $\Sigma \dfrac{1}{\omega_n\, n \log n} < \infty$ gilt, so ist die Entwicklung (1) nach dem polynomartigen System $\{\varphi_n(x)\}$ bei Erfülltsein der Voraussetzungen $c_n = O(q_n)$ und $\Sigma q_n^2 < \infty$ nicht nur fast überall konvergent, sondern überdies auch $|C, 1|$-summierbar. Dann ist nämlich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\mu(n)}\, q_n}{n} = O(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/2}}{(\log n)^{1/2}\, \omega_n^{1/2}} \cdot \frac{q_n}{n} = O(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{n^{1/2}\, \omega_n^{1/2} (\log n)^{1/2}} =$$

$$= O(1) \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} q_n^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\, \omega_n \log n} \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist. Ob die $|C, 1|$-Summierbarkeit fast überall auch im Falle $\mu(n) = O\left(\dfrac{n}{\log n}\right)$ besteht, soll dahingestellt bleiben.

(Eingegangen: 7. Mai, 1962.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] ALEXITS, G.: *Convergence Problems of Orthogonal Series.* (Oxford—London—New York—Paris, 1961).

[2] BILLARD, P.: „Sur la sommabilité absolue des séries de fonctions orthogonales." *Bulletin des Sciences Math.* 85 (1961) 29—33.

[3] LEINDLER, L.: „Über die absolute Summierbarkeit der Orthogonalreihen." *Acta Sci. Math.* **22** (1961) 243—268.

[4] TANDORI, K.: „Über die orthogonalen Funktionen IX. (Absolute Summation)." *Acta Sci. Math.* **21** (1960) 292—299.

[5] ZYGMUND, A.: *Trigonometric Series* I.—II. (Cambridge, 1959).

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СУММИРУЕМОСТИ И СХОДИМОСТИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

G. ALEXITS—D. KRÁLIK

Резюме

В статье авторы занимаются абсолютным RIESZ-овым суммированием ($|R, \lambda, 1|$ — суммированием) общих ортогональных рядов. Ортогональный ряд $\sum\limits_n c_n \varphi_n(x)$ является $|R, \lambda, 1|$ — суммируемым, если $\Sigma\,|\sigma_n(x) - \sigma_{n-1}(x)| < \infty$, где

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}}\right) c_k \varphi_k(x).$$

Они показывают, что ортогональный ряд $\Sigma c_n \varphi_n(x)$, ($\Sigma c_n^2 < \infty$), почти всюду $|R, \lambda, 1|$ — суммируем, если выполняется условие

$$\text{(I)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=[l(2^n)]+1}^{[l(2^{n+1})]} c_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty$$

где $l(x)$ является обратной от функции $\lambda(x) \uparrow \infty$ определяющей RIESZ-овое суммирование. Используя одну идею BILLARDa, они доказивают, далее, что если условие (1) не выполнено, тогда существуют ортогональные ряды, не $|R, \lambda, 1|$ суммируемые почти всюду.

Они показывают еще, что условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\mu(n)}\, q_n \lambda'(n)}{\lambda(n)} < \infty$$

обеспечивает $|R, \lambda, 1|$ — суммируемость почти всюду $\mu(n)$ лакчнарного ряда $\Sigma c_n \varphi_n(x)$, если $c_n = O(q_n)$, где $q_n \downarrow 0$ и $\lambda'(x)$ производное от $\lambda(x)$.

Наконец, они доказывают, что если ортогональный ряд $\Sigma c_n \varphi_n(x)$ является $\dfrac{n}{\log^{1-\gamma} n}$ — лакчнарным $(0 \leqq \gamma \leqq 1)$ и $c_n = O(q_n)$, $(q_n \downarrow 0)$, тогда из условия $\Sigma q_n^2 (\log n)^\gamma < \infty$ следует сходимость ряда почти всюду в таком подинтервале основного интервала ортогональности, в котором полиномо образная система функций $\{\varphi_n(x)\}$ в своей совокупности ограничена.

ÜBER DIE REKURSIVITÄT EINIGER ÜBERSETZUNGS-TRANSFORMATIONEN

II. MITTEILUNG: VERWENDUNG EINER LINEARISIERUNGSWEISE DES KANTOROWITSCH-SCHEN AUSDRUCKS-GRAPHEN

von

RÓZSA PÉTER

1. In den Folgenden handelt es sich um Ausdrücke, die aus Variablen (von welchen eine abzählbare Folge zur Verfügung steht) mit Hilfe von 1- und 2-gliedrigen Operationen aufgebaut werden. Dabei werden verschiedene Einklammerungsweisen, und auch klammernfreie Bezeichnungsweisen benutzt. Wenn man einen Ausdruck von gewissen Variablen ausgehend so aufbaut, dass sooft man auf einen inzwischen auftretenden Teilausdruck $\mathfrak{a}_1 \Theta \mathfrak{a}_2$, wo Θ eine zweigliedrige Operation ist, wieder eine Operation anzuwenden hat, $\mathfrak{a}_1 \Theta \mathfrak{a}_2$ immer zwischen Klammern setzt, erhält man jene Form des Ausdruckes, die ich kurz seine *»volleingeklammerte Form«* nennen werde (diese ist etwas abweichend von der in der I. Mitteilung gebrauchten Form; aber auch damit gingen die folgenden Betrachtungen, nur nicht so einheitlich).

In der Praxis werden meistens Zwischenstufen zwischen der volleingeklammerten und der klammernfreien Bezeichungsweise gebraucht. Man nimmt gewisse Konventionen in Betracht, nach welchen eine Operation »stärker bindet« als die andere (z. B. bindet die Multiplikation stärker als die Addition, und die Negation stärker als die zweigliedrigen logischen Operationen; bereits im vorhin erwähnten »volleingeschachtelten« Fall werden die eingliedrigen Operationen stärker bindend als die zweigliedrigen betrachtet). Ferner wird bei gleich stark bindenden Operationen üblicherweise die Reihenfolge von links nach rechts gemeint (vor Kenntnis von Klammern bedeutet für ein Schulkind z.B. die Aufgabe $8 - 3 + 2$, dass 3 aus 8 abzuziehen, und 2 zum Ergebnis zu addieren ist). Die Bezugnahme solcher Konventionen führen zu einer Form eines Ausdrucks, die ich seine *»konventionelle Form«* nennen werde.

Aber am üblichsten wird vielleicht eine *»nicht-konsequent-konventionelle Form«* der Ausdrücke benutzt, wobei neben den in der konventionellen Form notwendigen Einklammerungen auch überflüssige Einklammerungen verwendet werden dürfen, aber nicht müssen (z.B. wird in der Programmierungssprache »Algol 60« mit einem Ausdruck $\mathfrak{a}$ grosszügig immer auch $(\mathfrak{a})$ als Ausdruck betrachtet).

Es kommt nun darauf an, die verschiedenen Formen eines Ausdrucks aufeinander zu übersetzen (auf die »halbeingeklammerte Form« von KALMÁR komme ich nach seiner Publikation zurück).

In der I. Mitteilung dieser Arbeit[1] wurde die Primitiv-Rekursivität der Übersetzungstransformationen zwischen der volleingeschachtelten und der

[1] *Ebanda* **7** (1962) S. 69—78.

LUKASIEWICZschen klammernfreien Form auf einer geeigneten Wortemenge gezeigt. In einer Arbeit, die im Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae im Erscheinen ist[2], habe ich dasselbe auch für andere klammernfreie Bezeichnungsweisen gezeigt, wobei als Hilfsmittel eine Linearisierung des KANTOROWITSCH-schen Ausdrucks-Graphen verwendet wurde. Derselbe Hilfsmittel eignet sich für alle solche Übersetzungstransformationen; so auch zwischen volleingeklammerten, konventionellen und nicht-konsequent-konventionellen Formen der Ausdrücke, worum es sich in dieser Arbeit handelt.

2. Betrachten wir z.B. den folgenden logischen volleingeklammerten Ausdruck (kurz *»v-Ausdruck«*):

$$(x \vee (y \,\&\, z)) \vee (u \to \neg\, v).$$

Da hier das Hauptoperationszeichen $\vee$ ist, und die beiden Glieder der Hauptoperation die (durch Weglassen der äussersten Klammern erhaltenen) »Enthüllten« der beiden Seiten dieses Zeichens:

$$x \vee (y \,\&\, z) \quad \text{und} \quad u \to \neg\, v,$$

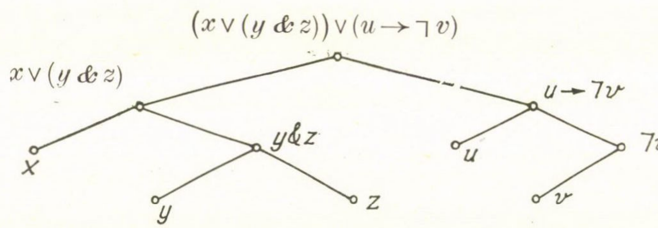
mit den Hauptoperationszeichen $\vee$ bzw. $\to$ sind, wo zum ersten

$$x \quad \text{und} \quad y \,\&\, z,$$

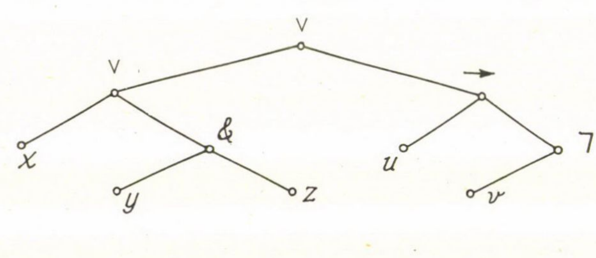
zum zweiten

$$u \quad \text{und} \quad \neg\, v$$

als Glieder gehören, wobei das Hauptoperationszeichen von $y \,\&\, z$ natürlich $\&$ ist, mit den Gliedern y und z, und die Hauptoperation von $\neg\, v$ natürlich $\neg$ ist, mit dem einzigen Glied v, so kann unserem Ausdruck der folgende Hilfsgraph zugeordnet werden:



Werden nun diejenigen der in den Knotenpunkten stehenden Teilausdrücke, welche auch Operationszeichen enthalten, durch ihre Hauptoperationszeichen ersetzt, so entsteht im wesentlichen der KANTOROWITSCH-sche Graph:



In meiner in Fussnote[2] zitierten Arbeit habe ich die derartigen Graphen (die gerichtete Wurzelbäume sind, mit einer gegebenen Reihenfolge der aus je einem Knotenpunkt hinauslaufenden Kanten) folgenderweise durch Paarenmengen linearisiert: Den Knotenpunkten sollen Variationen gewisser Elemente entsprechen — hier, wo höchstens zweigliedrige Operationen vorkommen, genügen dazu zwei Elemente a und b — und zwar so, dass dem Ausgangspunkt (dem Wurzelpunkt) die mit Λ bezeichnete »leere Variation« (»Variation 0-ter Klasse«) entspricht, und falls einem Knotenpunkt, dem ein 1- bzw. 2-gliedriges Operationszeichen zugeordnet ist, die Variation v entspricht, so dem Endpunkt der aus diesem Knotenpunkt hinauslaufenden Kante die Variation va entspricht, bzw. den Endpunkten der aus ihm hinauslaufenden beiden Kanten der Reihe nach die Variationen va und vb entsprechen. So gehört dann zu jedem Knotenpunkt ein Paar aus einem Operationszeichen und einer Variation, und die Menge dieser Paare charakterisiert den Ausdrucks-Graphen vollständig. Die Paarenmenge unseres Beispiels besteht aus folgenden Paaren:

$$(\vee, \Lambda),\ (\vee, a),\ (\rightarrow, b),\ (x, aa),\ (\&, ab),\ (u, ba),\ (\neg, bb),$$
$$(y, aba),\ (z, abb),\ (v, bba).$$

Diese Reihenfolge, wobei eine Variation höherer Klasse immer später an die Reihe kommt, und die Variationen derselben Klasse in der üblichen Reihenfolge stehen, werde ich, wie in meiner in der Fussnote[2] zitierten Arbeit, mit (P) bezeichnen; die so geordnete Paarenmenge werde ich kurz »Paarenfolge« des Ausdrucks nennen. Damit hat man eine Linearisierung des KANTOROWITSCH-schen Graphen.

3. In einem Ausdruck in konventioneller Form (kurz *»k-Ausdruck«)* kommen keine überflüssige äussere Klammern vor; ein k-Ausdruck ist seine eigene »Enthüllte«. In einem nicht-konsequent-konventionellen Ausdruck (kurz *»n-k-k-Ausdruck«)* — unter diesem Begriff fallen als Späzialfälle auch die Begriffe des v-Ausdrucks und des k-Ausdrucks — können dafür sogar mehrere überflüssige äussere Klammernpaare vorkommen; man enthüllt einen solchen Ausdruck durch sukzessive Streichung dieser Klammernpaare. Beginnt ein Ausdruck $\mathfrak{a}$ mit keinem (-Zeichen, so gilt für seine *Enthüllte* $*\mathfrak{a}$ natürlich $*\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$. Dasselbe gilt auch, falls $\mathfrak{a}$ mit (beginnt, aber noch bevor von links nach rechts gehend sein letztes Zeichen erreicht ist, die Anzahl der (- und) - Zeichen ausgeglichen wird. Wenn dies *nur* dann geschieht, wenn das letzte Zeichen von $\mathfrak{a}$ erreicht wird, dann hat man, um $*\mathfrak{a}$ zu erhalten, das äusserste Klammernpaar wegzulassen, und dieses Verfahren auf den übrigbleibenden Teilausdruck so oft wie möglich zu iterieren.

4. Um das Hauptoperationszeichen eines Ausdrucks herauszufinden, hat man den Aufbau der Ausdrücke näher zu betrachten.

Nehmen wir an, dass eine unendliche Folge $\mathfrak{V}$ von Variablen gegeben ist, ferner endlich viele von diesen abweichende Zeichen

$$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots,\ \Delta_r$$

für eingliedrige Operationen, die gleich stark binden, aber stärker als eine

[2] Über die Primitiv-Rekursivität einiger den Aufbau von Formeln charakterisierenden Wortfunktionen. (Eingegangen am 24. Mai, 1962.)

zweigliedrige Operation, ferner endlich viele, von diesen und von den Variablen verschiedene Zeichen

$$\begin{array}{l} \Theta_1^{(1)},\ \Theta_2^{(1)},\ \ldots,\ \Theta_{r_1}^{(1)}, \\ \Theta_1^{(2)},\ \Theta_2^{(2)},\ \ldots,\ \Theta_{r_2}^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Theta_1^{(l)},\ \Theta_2^{(l)},\ \ldots,\ \Theta_{r_l}^{(l)}, \end{array}$$

für zweigliedrige Operationen, von welchen die mit demselben oberen Index gleich stark binden, und $\Theta_{i_1}^{(j_1)}$ bei jedem i_1 und i_2 für $j_1 < j_2$ stärker als $\Theta_{i_2}^{(j_2)}$ bindet.

Ein beliebiger Ausdruck (worunter hier nur eine aus Variablen, Operationszeichen und Klammern bestehende Zeichenreihe verstanden wird) soll *»auf j-ter Stufe abgeschlossen«* genannt werden, wenn darin vor jedes vorkommende Zeichen $\Theta_{i'}^{(j')}$ mit $j' > j$ mehr Anfangsklammern als Endklammern stehen.

Unter der *»abgeschlossenen Hülle j-ter Stufe«* $\mathfrak{a}^{j*}$ eines Ausdrucks $\mathfrak{a}$ soll für auf j-ter Stufe angeschlossenes $\mathfrak{a}$ dieses $\mathfrak{a}$ selbst, und sonst $(\mathfrak{a})$ verstanden werden.

Ein Ausdruck heisst abgeschlossen, falls darin vor jedes vorkommende Zeichen Θ_i^j mehr Anfangsklammern als Endklammern stehen. Die abgeschlossene Hülle $\mathfrak{a}^*$ eines Ausdrucks $\mathfrak{a}$ ist $\mathfrak{a}$ selbst, falls $\mathfrak{a}$ abgeschlossen ist, und $(\mathfrak{a})$ sonst.

Es ist klar, dass ein Ausdruck $\mathfrak{a}$ dann und nur dann auf j-ter Stufe bzw. schlechthin abgeschlossen ist, falls $\mathfrak{a}^{j*} = \mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}$ gilt.

Mit diesen Begriffen kann der Begriff *»n-k-k-Ausdruck«* wie folgt definiert werden:

1) Jede Variable ist ein n-k-k-Ausdruck.

2) Ist $\mathfrak{a}$ ein n-k-k-Ausdruck, so ist für jedes $1 \leqq i \leqq r$ auch $\Delta_i\, \mathfrak{a}^*$ ein n-k-k-Ausdruck.

3) Sind $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ n-k-k-Ausdrücke, so ist für jedes $1 \leqq j \leqq l$; $1 \leqq i \leqq r_j$ auch $\mathfrak{a}_1^{j*}\, \Theta_i^{(j)}\, \mathfrak{a}_2^{(j-1)*}$ ein n-k-k-Ausdruck.

4) Mit $\mathfrak{a}$ ist auch $(\mathfrak{a})$ ein n-k-k-Ausdruck.

5) Alle n-k-k-Ausdrücke entstehen durch endlichmalige Verwendung von 1), 2), 3) und 4).

Wenn 4) weggelassen, und für »n-k-k-Ausdruck« überall »k-Ausdruck« gesetzt wird, so geht diese Definition in die Definition der k-Ausdrücke über.

Bei dem Aufbau der v-Ausdrücke werden alle zweigliedrigen Operationen als gleich stark bindend betrachtet (so hat es keinen Sinn, diese mit oberen Indizes zu versehen), und es wird auch keine Reihenfolge ihrer Verwendung ausgezeichnet. Hier ist also jedes $\mathfrak{a}^{j*}$ mit $\mathfrak{a}^*$ gleichbedeutend, und so wird aus der Definition der k-Ausdrücke die Definition der v-Ausdrücke, wenn für $\mathfrak{a}^{j*}$ und $\mathfrak{a}^{(j-1)*}$ darin $\mathfrak{a}^*$, und für »k-Ausdruck« überall »v-Ausdruck« gesetzt wird.

5. Nun erhält man das Hauptoperationszeichen eines beliebigen n-k-k-Ausdrucks $\mathfrak{a}$ aus seiner Enthüllten ${}^*\mathfrak{a}$ wie folgt:

(1) Ist diese der Form

$${}^*\mathfrak{a} = \Delta_i\, \mathfrak{a}',$$

wobei $\mathfrak{a}'^* = \mathfrak{a}'$ ist, so ist dieses Δ_i das Hauptoperationszeichen von $\mathfrak{a}$.

(2) Sonst (angenommen natürlich, dass $\mathfrak{a}$ überhaupt Operationszeichen enthält) hat man zunächst in $*\mathfrak{a}$ jene $\Theta_i^{(j)}$-Zeichen mit möglichst grösstem oberen Index zu suchen, deren beide Seiten je genau so viele (-Zeichen als)-Zeichen enthalten. (Für einen v-Ausdruck enthält $*\mathfrak{a}$ einen einzigen solchen Zeichen.) Das Hauptoperationszeichen von $\mathfrak{a}$ ist dann dasjenige dieser Zeichen, welches von rechts nach links gehend zuerst an die Reihe kommt.

Im Fall (1) ist das einzige Glied der Hauptoperation die Enthüllte des nach dem Hauptoperationszeichen Δ_i stehenden Ausdrucks.

Im Fall (2) sind die Glieder des Hauptoperations die Enthüllten der beiden Seiten des Hauptoperationszeichens $\Theta_i^{(j)}$.

6. Man erhält nun folgenderart die Paarenfolge eines beliebigen n-k-k-Ausdrucks:

Erst bildet man eine Hilfsfolge (im Sinne des Anfangs von Nr. 2). Das erste Paar davon ist $(*\mathfrak{a}, \Lambda)$. Angenommen, dass die ersten n Paare schon als Paare von Enthüllten gewisser n-k-k-Ausdrücke und Variationen der Elemente a und b gebildet sind, bildet man das $n+1$-te Paar wie folgt: Ist bisher ein Paar $(*\mathfrak{a}_1', v)$ vorgekommen, wo $*\mathfrak{a}'$ auch Operationszeichen enthält, und entweder I. die Variation va in keinem bisherigen Paar vorkommt, oder II. das Hauptoperationszeichen von $\mathfrak{a}'$ zweigliedrig ist, und va in einem bisherigen Paar vorkommt, aber vb in keinem, dass sei $(*\mathfrak{a}_1', v_1)$ das erste solche Paar; besteht dafür Fall I, dann sei der erste Komponent des $n+1$-ten Paars das erste (oder einzige) glied des Hauptoperations von $\mathfrak{a}_1'$, und sein zweiter Komponent $v_1 a$; besteht für $(*\mathfrak{a}_1', v_1)$ Fall II, dann sei der erste Komponent des $n+1$-ten Paars das zweite Glied der Hauptoperation von $\mathfrak{a}_1'$, und sein zweiter Komponent $v_1 b$. Nach endlich vielen Schritten wird schon kein Paar mit I oder II vorhanden sein; dann ist die Bildung der Hilfsfolge beendet. Nun hat man die ersten Komponenten der Paare durch ihre Hauptoperationszeichen zu ersetzen. (Es empfiehlt sich das Verfahren am Beispiel von Nr. 2 auszuprobieren.)

Wie man aus klammernfreien Ausdrücken ihre Paarenmengen (und umgekehrt) — und durch verschiedene Anordnungen dieser Mengen auch ihre unmittelbare Übersetzungen auf einander — erhält, das habe ich in meiner in Fussnote[2] zitierten Arbeit gezeigt.

7. Aus der Paarenfolge (in der Reihenfolge (P)) eines Ausdrucks erhält man dann ihre konventionelle oder volleingeklammerte Form (auf die man übersetzen will) wie folgt:

Wir ersetzen die Folge Schritt für Schritt durch eine andere. Bei jedem Schritt suchen wir in der gerade vorhandenen Folge von rechts nach links das erste solche Paar $(\mathfrak{v}, v)$, worin $\mathfrak{v}$ ein Operationszeichen ist. Ist darin $\mathfrak{v}$ ein Δ_i, dann soll $\mathfrak{v}$ durch $\mathfrak{v}\mathfrak{k}^*$ ersetzt werden, wo $\mathfrak{k}$ der erste Komponent des Paars mit dem zweiten Komponent va ist (ein solches Paar gibt es unbedingt). Ist $\mathfrak{v} = \Theta_i^{(j)}$, dann gibt es unbedingt Paare $(\mathfrak{k}_1, va)$ und $(\mathfrak{k}_2, vb)$, und $\mathfrak{v}$ soll durch $\mathfrak{k}_1^{j*}\ \Theta_i^{(j)} \mathfrak{k}_2^{(j-1)*}$ bzw. durch $\mathfrak{k}_1^* \ \Theta_i^{(j)} \ \mathfrak{k}_2^*$ ersetzt werden, je nachdem man die konventionelle oder die volleingeschachtelte Form des Ausdrucks erhalten will. Die anderen Paare bleiben dabei unberührt. Nach endlich vielen Schritten kommt man so zu einer Folge, in welcher schon kein Paar mit einem blossen Operationszeichen als erster Komponent vorkommt. Dann ist der erste Komponent des ersten Paars der Folge die gesuchte Form des Ausdrucks. (Man prüfe dies am Beispiel der Nr. 2 nach.)

8. Nun kommt es darauf an, zu zeigen, dass die dargestellten Übersetzungs-Algorithmen auf einer geeigneten Wortemenge primitiv-rekursiv sind. Ich zähle hier erst auf, was ich aus der rekursiven Theorie der Wortemengen über den in der I. Mitteilung Verwendeten, deren Kenntnis ich hier voraussetze, noch benutzen werde.[3] Betreffs der Kenntnisse über zahlentheoretische rekursive Funktionen berufe ich mich auf mein Buch.[4]

Zuerst möchte ich an die folgenden, auch in der I. Mitteilung erwähnten Tatsachen erinnern:

1) Für ein Wort $x = a_1 a_2 \ldots a_n$, wo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ Buchstaben sind, ist $o(x) = n$.

2) Die natürlichen Zahlen

$$0, \quad 1, \quad 2, \ldots$$

können etwa mit

$$\Lambda, \quad (, \quad ((, \ldots$$

identifiziert werden ((wird unter den Buchstaben unseres Alphabets vorkommen). Alle primitiv-rekursive zahlentheoretische Funktionen können zu primitiv-rekursive Funktionen einer bebliebigen Wortemenge erweitert werden.

3) In jeder Wortemenge gibt es primitiv-rekursive Funktionen

$$e_i(x), \qquad l_i(x), \qquad {}^{-i}x, \qquad x^{-i},$$

die für eine natürliche Zahl $i \leq o(x)$ der Reihe nach: das aus den ersten bzw. letzten i Buchstaben von x bestehende Wort, den Rest von x nach Weglassung von $e_i(x)$ vom Anfang, bzw von $l_i(x)$ vom Ende von x bedeuten.

4) Es ist y ein Vorgänger von x, in Zeichen $y \leq x$, falls y ein Abschnitt (ein zusammenhängender Bestandteil) von x ist.

5) Einer Wortefolge $x_0, x_1, \ldots, x_n$ kann in jeder Wortemenge ein Wort $c_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ als für festes n primitiv-rekursive Funktion derart zugeordnet werden, dass mit primitiv-rekursivem $k_i(x)$ und long (x) für $i = 0, 1, \ldots, n$

$$x_i = k_i(c_n(x_0, \ldots, x_n)) \qquad \text{und} \qquad n = \text{long}\,(c_n(x_0, \ldots, x_n))$$

gilt.

Ausser den in der I. Mitteilung aufgezählten Kenntnissen werde ich hier noch die Primitiv-Rekursivität in einer beliebigen Wortemenge der folgenden Funktionen gebrauchen:

6) $b_i(x)$, das für eine natürliche Zahl i den i-ten Buchstaben von x bedeutet.

7) $h^{(b)}(x)$, für einen beliebigen festen Buchstaben b, das die Anzahl des Auftretens von b in x angibt.

8) subst (x, y, z), welches für $y \neq \Lambda$ das aus x entstehende Wort bedeutet, wenn darin von rechts nach links gehend jedes vorkommen von y durch z ersetzt wird, vorausgesetzt, dass dies kein neues Vorkommen von y in x zustandebringt.

---

[3] Näheres darüber siehe (neben[2]): R. Péter, Über die Verallgemeinerung der Theorie der rekursiven Funktionen für abstrakte Mengen geeigneter Struktur als Definitionsbereiche, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae*, I. Teil **12** (1961) S. 271–314; II. Teil **13** (1962) S. 1–24.

[4] R. Péter, Rekursive Funktionen (Budapest, 1957), 2-te Auflage.

9) Mit einer Funktion von $x_1, \ldots, x_n$ ist immer auch eine solche Funktion von $x_1, \ldots, x_n, i$ primitiv-rekursiv, die für eine natürliche Zahl i die i-te Iteration der Funktion an der Stelle $x_1, \ldots, x_n$ angibt.

10) Mit einer Funktion $\bar{f}(x_1, \ldots, x_n, y)$ ist auch die Funktion

$$c^{\bar{f}}(x_1, \ldots, x_n, y) = c_{o(y)}(\bar{f}(x_1, \ldots, x_n, 0), \bar{f}(x_1, \ldots, x_n, 1), \ldots, \bar{f}(x_1, \ldots, x_n, o(y)))$$

primitiv-rekursiv.

9. Das Alphabet $\mathfrak{A}$ unserer Wortmenge $\mathfrak{M}$ enthält also die Elemente der Variablenmenge $\mathfrak{V}$, die Zeichen Δ_i und $\Theta_i^{(j)}$ der 1- und 2-gliedrigen Operationen, die — als Buchstaben des Alphabets fettgedruckten — Klammerzeichen, und die von all diesen verschiedenen Buchstaben a und b. Man sieht leicht, wie in der I. Mitteilung, dass die charakteristischen Funktionen

$$f_{\mathfrak{V}}(x), \quad f_{\Delta}(x), \quad f_{\Theta}(x), \quad f_{\Theta^{(j)}}(x)$$

der Beziehungen: »eine Variable, bzw. eines der Δ, bzw. eines der Θ, bzw. eines der $\Theta^{(j)}$ zu sein« primitiv-rekursiv in $\mathfrak{M}$ sind.

Die Enthüllte $^*x$ eines Wortes x kann nach Nr. 3 z. B. durch die $o(x)$-te Iterierte der Hilfsfunktion

$$h(x) = \begin{cases} ({}^{-1}x)^{-1}, \text{ falls } o(x) = \mu_i\left[i \leqq o(x) \,\&\, h^{(\mathbf{(})}(e_i(x)) = h^{(\mathbf{)})}(e_i(x))\right], \\ x \text{ sonst} \end{cases}$$

als in $\mathfrak{M}$ primitiv-rekursive Funktion definiert werden.

Auch die Beziehungen $B_{Ag}(x)$, $B_{Ag}^{(j)}(x)$: »abgeschlossen, bzw. auf j-ter Stufe abgeschlossen zu sein«, und die Funktionen x^*, x^{j*} (die abgeschlossene Hülle, bzw. die abgeschlossene Hülle j-ter Stufe von x) sind primitiv-rekursiv in $\mathfrak{M}$, da sie der Reihe nach wie folgt definiert werden können (siehe Nr. 4):

$$B_{Ag}(x) \equiv (i)\left[i \leqq o(x) \rightarrow (f_{\Theta}(b_i(x)) = \Lambda \rightarrow h^{(\mathbf{)})}(e_i(x)) \prec h^{(\mathbf{(})}(e_i(x)))\right],$$

$$B_{Ag}^{(j)}(x) \equiv (i)\,(j')\Big[i \leqq o(x) \rightarrow \Big(j' \leqq l \rightarrow \Big(f_{\Theta^{(j')}}(b_i(x)) = \Lambda \rightarrow (j \prec j' \rightarrow$$

$$\rightarrow h^{(\mathbf{)})}(e_i(x)) \prec h^{(\mathbf{(})}(e_i(x)))\Big)\Big)\Big],$$

$$x^* = \begin{cases} x, & \text{falls } B_{Ag}(x) \\ \mathbf{(}x\mathbf{)} & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$x^{j*} = \begin{cases} x, & \text{falls } B_{Ag}^{(j)}(x) \\ \mathbf{(}x\mathbf{)} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hiernach ist auch die Beziehung $B_{n-k-k}(x)$ »ein n-k-k-Ausdruck zu sein« (und ähnlich auch die Beziehungen $B_k(x)$ und $B_v(x)$ »ein k-Ausdruck bzw. ein v-Ausdruck zu sein«) primitiv-rekursiv in $\mathfrak{M}$, laut der Definition ihrer charakteristischen Funktion $f_{n-k-k}(x)$ (siehe Nr. 4):

$$f_{n-k-k}(\Lambda) = \Lambda$$

und für $c \in \mathfrak{B}$

$$f_{n-k-k}(xc) = \begin{cases} \Lambda, \text{ falls } f_{\mathfrak{B}}(xc) = \Lambda \vee (f_\Delta(b_1(x)) = \Lambda \,\&\, B_{Ag}({}^{-1}(xc))\,\& \\ \quad \&\, f_{n-k-k}({}^{-1}(xc)) = \Lambda) \vee (Ey_1)(Ey_2)(Ey)(Ej)\,[y_1, y \leqq x\,\& \\ \quad \&\, y_2 \leqq {}^{-1}(xc)\,\&\, j \leqq l\,\&\, B^{(j)}_{Ag}(y_1)\,\&\, B^{(j \dot{-} 1)}_{Ag}(y_2)\,\& \\ \quad \&\, f_{n-k-k}(y_1) = f_{n-k-k}(y_2)\, f_{\Theta^{(j)}}(y) = \Lambda \,\&\, x = y_1 y y_2] \vee \\ \quad \vee (Ey)\,[y \leqq x \,\&\, f_{n-k-k}(y) = \Lambda \,\&\, x = \boldsymbol{(}\, y\,\boldsymbol{)}] \\ \boldsymbol{(} \text{ sonst,} \end{cases}$$

die eine Wertverlaufsrekursion ist (das zeigt man wie in den ähnlichen Fällen der I. Mitteilung).

10. Nach dieser Definition sind für ein n-k-k-Ausdruck folgende drei Fälle zu unterscheiden:

1) x enthält keine Operationszeichen, d.h. es besteht die Beziehung:

$$B_{\mathfrak{B}}(x) \equiv f_{\mathfrak{B}}(^*x) = \Lambda\,.$$

2) Das Hauptoperationszeichen von x ist ein Δ-Zeichen d.h. es besteht nach Nr. 5 die Beziehung

$$B_\Delta(x) \equiv f_\Delta(b_1(^*x)) = \Lambda \,\&\, ({}^{-1}(^*x))^* = {}^{-1}(^*x)\,.$$

3) Wenn keines dieser Beziehungen besteht, diese Eigenschaft soll mit $B_\Theta(x)$ bezeichnet werden (diese Beziehung ist mit den vorangehenden auch primitiv-rekursiv in $\mathfrak{M}$), da in diesem Fall das Hauptoperationszeichen von x ein Θ-Zeichen ist.

In Fall 3) brauchen wir nach Nr. 5 zur Definition des Hauptoperationszeichens von x die folgenden Hilfsdefinitionen:

Sei $B_{O_p}(j, i, x)$ die Beziehung: »der i-te Buchstabe von $^*x$ ist ein $\Theta^{(j)}$-Zeichen, dessen beide Seiten genau so viele (- als)-Zeichen enthalten«. Dann ist

$$B_{Op}(j, i, x) \equiv f_{\Theta^{(j)}}(b_i(^*x)) = \Lambda \,\&\, h^{(()}(e_i(^*x)) = h^{())}(e_i(^*x))\,\&\, h^{(()}({}^{-i}(^*x)) = \\ = h^{())}({}^{-i}(^*x)),$$

und das grösste j, zu welchem es ein solches i gibt, ist

$$j(x) = \mu_j \left[j \leqq l \,\&\, (Ei)\,[i \leqq o(^*x) \,\&\, B_{0_p}(j, i, x)] \,\&\, (j')\, j' \leqq l \rightarrow (j < j' \rightarrow \right. \\ \left. \rightarrow (i)\,[i \leqq o(^*x) \rightarrow \neg\, B_{0_p}(j', i, x)])\right]\,;$$

endlich ist das grösste (von rechts nach links gehend das erste) solche i, für welches mit diesem $j(x)$ die Beziehung $B_{O_p}(j(x), i, x)$ besteht:

$$i(x) = \mu_i \left[i \leqq o(^*x) \,\&\, B_{0_p}(j(x), i, x) \,\&\, (i')\left[i' \leqq o(^*x) \rightarrow (i < i' \rightarrow \right.\right. \\ \left.\left. \rightarrow \neg\, B_{0_p}(j(x), i', x))\right]\right].$$

Dann lautet die Definition des Hauptoperationszeichens Hop(x) eines n-k-k-Ausdrucks x (die für keine Operationszeichen enthaltende Ausdrücke

x belanglos ist):

$$\mathrm{Hop}(x) = \begin{cases} \Lambda, \text{ falls } B_{\mathfrak{B}}(x) \\ b_1(*x), \text{ falls } B_\Delta(x) \\ b_{i(x)}(*x) \text{ sonst}, \end{cases}$$

daher ist diese eine in $\mathfrak{M}$ primitiv-rekursive Funktion, und mit ihr auch die Glieder der Hauptoperationen, da diese nach Nr. 5 durch

$$Gl_1(x) = \begin{cases} {}^{-1}(*x), \text{ falls } B_\Delta(x) \\ *e_{i(x)\dot{-}1}(*x), \text{ falls } B_\Theta(x) \\ \Lambda \text{ sonst} \end{cases}$$

und

$$Gl_2(x) = \begin{cases} *({}^{-i(x)}(*x)), \text{ falls } B_\Theta(x) \\ \Lambda \text{ sonst} \end{cases}$$

definirt werden können.

11. Nach Nr. 6 definiert man die Paare der Hilfsfolge zur Paarenfolge eines n-k-k-Ausdrucks wie folgt: Sei

$$f(x, \Lambda) = c_1(*x, \Lambda)$$

und für $d \in \mathfrak{A}$, falls mit

$$B_1(x, y, y_1) \equiv \neg\, B_{\mathfrak{B}}(k_0(f(x, y_1)))\,\&\,(y_2)\,[y_2 \leqq y \rightarrow k_1(f(x, y_2)) \neq \neq k_1(f(x, y_1))\,a]$$

und

$$B_2(x, y, y_1) \equiv B_\Theta(k_0(f(x, y_1)))\,\&\,(Ey_2)\,[y_2 \leqq y\,\&\,k_1(f(x, y_2)) = = k_1(f(x, y_1))\,a]\,\&\,(y_2)\,[y_2 \leqq y \rightarrow k_1(f(x, y_2)) \neq k_1(f(x, y_1))\,b]$$

$$B(x, y, y_1) \equiv B_1(x, y, y_1) \vee B_2(x, y, y_1)$$

und

$$y_1(x, y) = \mu_{y_1}[y_1 \leqq y\,\&\,B(x, y, y_1)$$

gesetzt wird,

$$f(x, yd) = \begin{cases} c_1\Big(Gl_1\big(k_0(f(x, y_1(x, y)))\big),\ k_1(f(x, y_1(x, y)))\,a\Big), \\ \qquad \text{falls } B_1(x, y, y_1(x, y)) \\ c_1\Big(Gl_2\big(k_0(f(x, y_1(x, y)))\big),\ k_1(f(x, y_1(x, y)))\,b\Big), \\ \qquad \text{falls } B_2(x, y, y_1(x, y)) \\ \Lambda \text{ sonst.} \end{cases}$$

Man sieht leicht, dass dies eine Wertverlaufsrekursion ist. Die Werte der damit auch in $\mathfrak{M}$ primitiv-rekursiven Funktion

$$\bar{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), \text{ falls } B_{\mathfrak{B}}(k_0(f(x,y))) \\ \text{subst}\,(f(x, y), k_0(f(x, y)), \text{Hop}\,(k_0(f(x, y)))) \text{ sonst} \end{cases}$$

liefern die Paare der zu x gehörigen Paarenfolge; man hat nur noch die Anzahl dieser Paare zu bestimmen. Es ist klar, dass soviele Paare gebildet werden, wieviele Operationszeichen und Variablen in x vorhanden sind, wie lang also das durch Streichung der Klammern aus x übrigbleibende Wort ist. Diese Anzahl ist also

$$m(x) = o(\text{subst}(\text{subst}(x, \mathbf{(}, \Lambda), \mathbf{)}, \Lambda)\,.$$

Daher ist das zur Paarenfolge vom n-k-k-Ausdruck x gehörige Wort

$$c^{\bar{f}}(x, m(x))\,,$$

also eine in $\mathfrak{M}$ primitiv-rekursive Funktion von x.

12. Sei nun umgekehrt x das der Paarenfolge eines n-k-k-Ausdrucks zugeordnete Wort. Dann verfolgen wir den Gedankengang von Nr. 7.

Sei $B_o(x)$ die Beziehung: »die zu x gehörige Folge enthält ein Glied, worin der erste Komponent ein Operationszeichen ist«:

$$B_o(x) \equiv (E_i)\left[i \leqq \text{long}\,(x)\ \&\left(f_\Delta(k_0(k_i(x))) = \Lambda \vee f_\Theta(k_0(k_i(x))) = \Lambda\right)\right]\,.$$

Von rechts nach links gehend geschieht das zum erstemal mit $i_1(x)$, wo

$$i_1(x) = \mu_i\Big[i \leqq \text{long}\,(x)\ \&\left(f_\Delta(k_0(k_i(x))) = \Lambda \vee f_\Theta(k_0(k_i(x))) = \Lambda\right) \&$$

$$\& (i')\Big[i' \leqq \text{long}\,(x) \rightarrow \Big(i \prec i' \rightarrow \Big(\neg\left(f_\Delta(k_0(k_i(x))) = \Lambda\right) \& \neg\left(f_\Theta(k_0(k_i(x))) = \Lambda\right)\Big)\Big)\Big]\Big]$$

Wir brauchen noch die Hilfsfunktionen

$$j(x) = \mu_j\left[j \leqq l\ \&\ f_{\Theta^{(j)}}(k_0(k_{i_1(x)}(x))) = \Lambda\right]$$

und

$$i_2(x, z) = \mu_i\left[i \leqq \text{long}\,(x)\ \&\ k_1(k_i(x)) = k_1(k_{i_1(x)}(x))\,z\right].$$

Dann sei

$$g(x, \Lambda) = x$$

und für $c \in \mathfrak{A}$

$$g(x, yc) = \begin{cases} \text{subst}\,\big(g(x, y), k_0(k_{i_1{}'g(x,y))}(g(x, y))), \\ \qquad k_0(k_{i_1{}'g(x,y))}(g(x, y)))\, k_0^*(k_{i_2{}'g(x,y), a)}(g(x, y)))\big)\,, \\ \quad \text{falls } B_o(g(x, y))\ \&\ f_\Delta\big(k_0(k_{i_1{}'g(x,y)}(g(x, y)))\big) = \Lambda \\ \text{subst}\,\big(g(x, y), k_0(k_{i_1(x,y)}(g(x, y)))\,, \\ \qquad k_0^{j*}(k_{i_2{}'g(x,y), a)}(g(x, y)))\, k_0(k_{i_1{}'g(x,y))}(g(x, y))) \\ \qquad k^{(j \dot- 1)*}(k_{i_2{}'g(x,y), b)}(g(x, y)))\big)\,, \\ \quad \text{falls } B_o(g(x, y))\ \&\ f_{\Theta^{(j)}}\big(k_0(k_{i_1(g(x,y))}(g(x, y)))\big) = \Lambda \\ g(x, y) \text{ sonst} \end{cases}$$

wo j für $j(g(x, y))$ steht (will man die volleingeschachtelte Form des Ausdrucks erhalten, dann soll hier statt $\Theta^{(j)}$ einfach Θ, statt beiden von $\mathfrak{k}_0^{j*}$ und $\mathfrak{k}_0^{(j-1)*}$ einfach $\mathfrak{k}_0^*$ stehen.

Wird für y eine mindestens so grosse Zahl gesetzt, wieviele Operationszeichen in x enthalten sind, z.B. $o(x)$, so erhält man immer dasselbe Wort: das der Hilfsfolge der solchen Paare zugeordnete Wort, deren erste Komponenten die den betreffenden Ausdruck aufbauenden Teilausdrücke sind. Der erste Komponent des ersten Gliedes dieser Folge ist der gesuchte k-Ausdruck (bzw. v-Ausdruck). Dieser ergibt sich daher als

$$k_0\bigl(k_0(g(x, o(x)))\bigr),$$

also, da die Definition von $g(x, y)$ eine primitive Rekursoin in $\mathfrak{M}$ ist, als eine in $\mathfrak{M}$ primitiv-rekursive Funktion.

13. So ergeben sich die hier betrachteten Übersetzungs-Algorithmen primitiv-rekursiv in $\mathfrak{M}$, da nach Nr. 11 die Paarenfolge eines n-k-k-Ausdrucks x (der speziell auch ein v-Ausdruck oder ein k-Ausdruck sein kann) primitiv-rekursiv von x abhängt, und nach Nr. 12 von der Paarenfolge sich sowohl die volleingeschachtelte als auch die konventionelle Form auf primitiv-rekursive Weise herstellen lässt.

Es würde keine neue Schwierigkeit bedeuten, wenn auch rechtsseitig zu setzende eingliedrige Operationszeichen (wie z.B. $n!$ in der Arithmetik) anzuwenden, und verschiedene Bindungskonventionen für eingliedrige Operationen zu berücksichtigen wären.

(Eingegangen: 15. August, 1962.)

О РЕКУРСИВНОСТИ ПЕРЕВОДНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ. II-ОЕ СООБЩЕНИЕ: ПРИМЕНЕНИЕ ОДНОГО МЕТОДА ЛИНЕАРИЗАЦИИ ГРАФА-ВЫРАЖЕНИЯ КАНТОРОВИЧА

R. PÉTER

Резюме

В первом сообщении [1] автор занималась переводом выражений «полностью скобочного» («volleingeschachtelt») вида в безскобочный вид Лукашевича и обратно. В одной, после этого написанной, еще не появившейся другой статье [2] автор дала для етих переводов и для переводов иных безскобочных выражений путём некоторой линеаризации графа-выражения Канторовича такой переводный алгорифм, который является примитивно-рекурсивным на одном подходящем множестве слов. Автор применяет в настоящем 11-ом сообщении этот метод в переводе некоторых «полностью скобочных», «конвенциональных» и «не консеквентно конвенциональных» видов выражений. В «конвенциональном» способе применения

скобок принимается во внимание, что некоторые операции по соглашению «связывают сильнее», чем другие и что однаково сильно связывающие операции принято выполнять идя слева направо. В наиболее часто встречающемся «неконсеквентно конвенциональном» способе применения скобок можно, но не обязательно нужно удалить любую из пар скобок становившейся излишными вследствие соглашения. Автор дает к каждому из этих трёх видов выражений алгорифм, преобразующий их в упомянутый линеаризованный вид графа-выражения; далее она также задаёт такой алгорифм, который преобразует линеаризованный вид некоторого графа-выражения будь то в полностью скобочный или в конвенциональный вид этого выражения. Таким образом, автор получает все переводные преобразования рассматриваемых видов и показывает, что они являются примитивно-рекурсивными на подходящем множестве слов.

О ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИИ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ

O. KIS

1. В работе мы пользуемся следующими обозначениями. C есть множество вещественных, непрерывных и 2π-периодических на вещественной оси функций. Если $f \in C$, то

$$\|f\| = \max_{-\infty < x < +\infty} |f(x)|$$

ее норма, а

$$\omega(f, t) = \sup_{\substack{-\infty < x < +\infty \\ 0 \leqq h \leqq t}} |f(x+h) - f(x)| \quad (0 \leqq t < +\infty)$$

ее модуль непрерывности.

Пусть $\omega(t)$ есть модуль непрерывности некоторой фиксированной функции из C. Подмножество тех функций f пространства C, для которых существует такая зависящая лишь от f постоянная $a(f)$, что выполняется условие

$$\omega(f, t) \leqq a(f)\, \omega(t) \quad (0 \leqq t < +\infty),$$

обозначается через $C(\omega)$.

X есть бесконечная треугольная матрица вещественных чисел

$$\begin{array}{c} x_{0,0} \\ x_{0,1}, x_{1,1}, x_{2,1} \\ x_{0,2}, x_{1,2}, x_{2,2}, x_{3,2}, x_{4,2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{array}$$

удовлетворяющих неравенствам

$$0 \leqq x_{0,n} < x_{1,n} < \dots < x_{2n,n} < 2\pi \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

$l_{i,n}(X, x)$ $(i = 0, 1, \dots, 2n;\ n = 0, 1, 2, \dots)$ суть фундаментальные функции тригонометрического интерполирования по узлам X, т. е. тригонометрические многочлены n-ого порядка, для которых

$$l_{i,n}(X, x_{k,n}) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k \\ 0, & \text{если } i \neq k \end{cases} \quad (i, k = 0, 1, \dots, 2n;\ n = 0, 1, 2, \dots).$$

Наконец,

(1.1) $$M_n(X) = \max_{-\infty<x<+\infty} \sum_{i=0}^{2n} |l_{i,n}(X, x)| \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

и для каждой $f \in C$

(1.2) $$L_n(f, X, x) = \sum_{k=0}^{2n} f(x_{k,n})\, l_{k,n}(X, x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

2. Известно, что последовательность тригонометрических интерполяционных многочленов $L_n(f, X, x)$ равномерно сходится к функции $f(x)$ из C, если

$$\lim_{n\to\infty} M_n(X)\, \omega\left(f, \frac{1}{n}\right) = 0.$$

Поэтому выполнения условия

(2.1) $$\lim_{n\to\infty} M_n(X)\, \omega\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

достаточно для того, чтобы для всех $f \in C(\omega)$ выполнялось соотношение

(2.2) $$\lim_{n\to 0} \| f - L_n(f, X) \| = 0.$$

Является ли достаточное условие (2.1) необходимым? В работе [1] С. М. Лозинский опубликовал следующие теоремы. Если выполняется хотя бы одно из неравенств

(2.3) $$\limsup_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n > 0,$$

(2.4) $$\liminf_{t=+0} \frac{\omega\,[t\, \omega(t)]}{\omega(t)} > 0,$$

то условие (2.1) необходимо для того, чтобы (2.2) имело место для всех $f \in C(\omega)$. Если же ни одно из соотношений (2.3) и (2.4) не выполняется, то (2.1) не является необходимым, так как существуют матрицы узлов интерполирования X и Y такие, что

$$M_n(X) = M_n(Y) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

для всех f из $C(\omega)$ имеет место (2.2), но для некоторой $f \in C(\omega)$

$$\limsup_{n\to\infty} \| L_n(f, Y) \| = +\infty.$$

Пусть ни (2.3), ни (2.4) не выполняются. Нельзя ли достаточное условие (2.1) заменить более слабым условием? В связи с Лагранжевым интерполированием P. Erdős и P. Turán в работе [2] доказали, что для функций класса $\mathrm{Lip}\,\alpha$ при $0 < \alpha < 1$ условие

$$\lim_{n\to\infty} M_n(X)\, n^{-\alpha} = 0$$

не может быть заменено условием

$$\lim_{n\to\infty} M_n(X)\, n^{-\beta} = 0$$

ни при каком $\beta > \alpha$. Здесь X матрица узлов Лагранжева интерполирования, $M_n(X)$ соответствующие постоянные Лебега.

3. В настоящей работе доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Обозначим через Z матрицу равноотстоящих узлов* $\dfrac{2\pi k}{2n+1}$ $(k = 0, 1, \ldots, 2n;\ n = 0, 1, 2, \ldots)$. *Если числовая последовательность M_n и модуль непрерывности $\omega(t)$ таковы, что*

$$\limsup_{n\to\infty} M_n\, \omega\left(\frac{1}{n}\right) > 0\,, \tag{3.1}$$

$$M_n \geqq M_n(Z) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,, \tag{3.2}$$

$$\lim_{t=+0} \frac{t}{\omega(t)} = 0\,, \tag{3.3}$$

то существует матрица узлов X и функция f из $C(\omega)$, для которых

$$M_n(X) = M_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,, \tag{3.4}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \| f - L_n(f, X) \| > 0\,. \tag{3.5}$$

Условие (3.1) здесь, очевидно, необходимо. Условие (3.2) также необходимо, если справедлива следующая гипотеза: для любой X

$$M_n(X) \geqq M_n(Z)\,.$$

Мне не известно, является ли необходимым условие (3.3). Для случая, когда оно не выполняется (тогда по лемме 2 из [1] $C(\omega)$ является подмножеством 2π-периодических функций из Lip 1), удалось доказать лишь следующую теорему.

Теорема 2. *Если имеет место* (3.2) *и*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M_n}{n} = +\infty\,, \tag{3.6}$$

то существует такая матрица узлов X и такая 2π-периодическая функция $f \in \mathrm{Lip}\ 1$, что выполняются (3.4) и (3.5).

Укажем на очевидное следствие теоремы 1: если выполняется (3.2) и

$$\limsup_{n\to\infty} M_n\, n^{-\alpha} > 0 \qquad (0 < \alpha < 1)\,,$$

то для некоторой матрицы X и 2π-периодической функции $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ имеет место (3.4) и (3.5).

4. Приступая к доказательству теорем, прежде всего построим узлы интерполирования, для которых будут доказаны утверждения теорем.

Для всевозможных последовательностей q_n, удовлетворяющих неравенствам

$$0 < q_n \leqq 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{4.1}$$

рассмотрим зависящие от них узлы интерполирования

$$x_{k,n} = q_n \frac{2\pi k}{2n+1} \quad (k = 0, 1, \ldots, 2n;\ n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{4.2}$$

Так как

$$l_{0,n}(X, x) = \prod_{k=1}^{2n} \frac{\sin \frac{x - x_{k,n}}{2}}{\sin \frac{x_{k,n}}{2}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

то

$$l_{0,n}(X, \pi) = \prod_{k=1}^{2n} \operatorname{ctg} \frac{x_{k,n}}{2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Следовательно,

$$\lim_{q_n=0} l_{0,n}(X,\pi) = +\infty \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

и, тем более,

$$\lim_{q_n=0} M_n(X) = +\infty \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

С другой стороны, если при любом n

$$q_n = 1,$$

то n-тая строка X и матрицы Z узлов $\dfrac{2\pi k}{2n+1}$ совпадает и поэтому

$$M_n(X) = M_n(Z).$$

Так как $M_n(X)$, очевидно, непрерывно зависит от q_n, то по теореме Больцано при некотором q_n выполняется (3.4), если только имеет место (3.2). В дальнейшем будем считать, что последовательность q_n и соответствующая матрица узлов X фиксированы таким образом.

5. Продолжая доказательство теорем, предположим сначала, что для только что фиксированной последовательности q_n

$$\liminf_{n\to\infty} q_n < 1. \tag{5.1}$$

Тогда узлы $x_{k,n}$ распределены на $[0, 2\pi]$ не равномерно, т. е. условие

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n[a, b)}{2n+1} = \frac{b-a}{2\pi}$$

не выполняется; здесь $N_n[a, b)$ означает число узлов $x_{n,k}$, для которых

$$a \leqq x_{k,n} < b,$$

a и b любые числа, для которых

$$0 \leqq a < b \leqq 2\pi .$$

В работе [3] было доказано, что тогда существует 2π-периодическая аналитическая функция f, для которой имеет место (3.5). Так как все такие функции, очевидно, принадлежат множеству $C(\omega)$, то в этом случае теоремы доказаны.

В дальнейшем мы будем предполагать, что условие (5.1) не выполняется. Тогда в силу (4.1)

$$\lim_{n\to\infty} q_n = 1 . \tag{5.2}$$

6. Для этого случая воспользуемся методом, аналогичным тому, которым доказывалась теорема 1 работы [4].

Для каждого n обозначим через u_n точку, в которой непрерывная функция Лебега $\sum_{k=0}^{2n} |l_{k,n}(X, x)|$ принимает свое наибольшее значение M_n. Пусть

$$x_{2n+1,n} = 2\pi, \quad l_{2n+1,n}(X) = l_{0,n}(X, x) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{6.1}$$

а $g_n(x)$ есть непрерывная 2π-периодическая функция, принимающая в узлах значения

$$g_n(x_{k,n}) = \operatorname{sign} l_{k,n}(u_n) \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2n+1) \tag{6.2}$$

и линейная между каждой парой соседних узлов.

Нам потребуются некоторые свойства этих функций. Очевидно,

$$|g_n(x)| \leqq 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{6.3}$$

и

$$g_n(x) \in \mathrm{Lip}\, 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Так как для любого модуля непрерывности $\omega(t)$

$$(C \cap \mathrm{Lip}\, 1) \subset C(\omega)$$

(эта лемма из [1] следует из неравенства

$$t \leqq 2 \frac{T}{\omega(T)} \omega(t) \qquad (0 < t \leqq T), \tag{6.4}$$

доказанного, например, на странице 109 монографии [5], если положить $T = 2\pi$), то

$$g_n(x) \in C(\omega) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{6.5}$$

Принимая во внимание (1.1), (1.2), (3.4) и (6.2), имеем:

$$L_n(g_n, X, u_n) = M_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{6.6}$$

Если при некотором m

$$\limsup_{n\to\infty} \| g_m - L_n(g_m, X) \| > 0 ,$$

то в силу (6.5) наши теоремы доказаны. Поэтому в дальнейшем можно считать, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup \| g_m - L_n(g_m, X) \| = 0 \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots). \tag{6.7}$$

7. До сих пор доказательства теорем 1 и 2 совпадали. В дальнейшем они несколько отличаются друг от друга. Продолжим сначала первое из них.

В силу (3.1) существует такая положительная постоянная a и такая последовательность натуральных чисел n_i, что

$$\omega\left(\frac{1}{n_i}\right) M_{n_i} > a. \tag{7.1}$$

Принимая во внимание (3.2), соотношение

$$\lim_{n\to\infty} M_n(Z) = +\infty,$$

(3.3), (4.2), (5.2), (6.1) и (6.7), мы можем считать, что последовательность n_i столь быстро растет, что

$$M_{n_1} > 2,\ M_{n_i} > 2^i M_{n_{i-1}} \qquad (i = 2, 3, 4, \ldots), \tag{7.2}$$

$$n_i\,\omega\left(\frac{1}{n_i}\right) < \frac{1}{2} n_{i+1}\,\omega\left(\frac{1}{n_{i+1}}\right) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots), \tag{7.3}$$

$$x_{k+1, n_i} - x_{k, n_i} > \frac{2}{n_i} \quad (k = 0, 1, \ldots, 2n;\ i = 1, 2, 3, \ldots), \tag{7.4}$$

$$\| g_{n_i} - L_n(g_{n_i}, X) \| < \frac{1}{2}, \text{ если } n \geqq n_{i+1} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots). \tag{7.5}$$

Пусть

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_{n_i}(x)}{M_{n_i}} \tag{7.6}$$

(в силу (6.3) и (7.2) стоящий справа ряд сходится).

8. Докажем, что

$$f(x) \in C(\omega). \tag{8.1}$$

Очевидно,

$$| f(x+h) - f(x) | \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{M_{n_i}} | g_{n_i}(x+h) - g_{n_i}(x) |. \tag{8.2}$$

Пусть t любое положительное число,

$$0 < h \leqq t, \tag{8.3}$$

j наименьшее натуральное число, для которого

$$n_j h \geqq 1. \tag{8.4}$$

Оценим, сначала, первые $j-1$ члена суммы, стоящей в правой части неравенства (8.2), предполагая, что $j > 1$.

Из определения функций $g_n(x)$ и из (7.4) следует неравенство

$$|g_{n_i}(x+h) - g_n(x)| < n_i h \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Поэтому

$$\frac{1}{M_{n_i}} |g_{n_i}(x+h) - g_{n_i}(x)| < \frac{n_i h}{M_{n_i}} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots). \tag{8.5}$$

Воспользовавшись неравенствами (7.1), (7.3), (6.4), (8.3) определением числа j, и тем фактом, что модуль непрерывности — неубывающая функция, получаем отсюда неравенства

$$\frac{1}{M_{n_i}} |g_{n_i}(x+h) - g_{n_i}(x)| < \frac{1}{a}\, n_i \omega\left(\frac{1}{n_i}\right) h < \frac{1}{a}\, 2^{i-j+1} n_{j-1} \omega\left(\frac{1}{n_{j-1}}\right) h \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{a}\, 2^{i-j+2} \omega(h) \leqq \frac{1}{a}\, 2^{i-j+2} \omega(t).$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{M_{n_i}} |g_{n_i}(x+h) - g_{n_i}(x)| < \frac{1}{a} (4 - 2^{3-j})\, \omega(t). \tag{8.6}$$

Оценим теперь j-тый член суммы. Ввиду (6.3)

$$\frac{1}{M_{n_j}} |g_{n_j}(x+h) - g_{n_j}(x)| \leqq \frac{2}{M_{n_j}}. \tag{8.7}$$

Принимая во внимание (7.1), (8.4), (8.3) и тот факт, что все модули непрерывности — неубывающие функции, получаем отсюда неравенства

$$\frac{1}{M_{n_j}} |g_{n_j}(x+h) - g_{n_j}(x)| < \frac{2}{a}\, \omega\left(\frac{1}{n_j}\right) \leqq \frac{2}{a}\, \omega(t). \tag{8.8}$$

Оценим, наконец, остальные члены суммы. В силу (6.3) и (7.2)

$$\frac{1}{M_{n_i}} |g_{n_i}(x+h) - g_{n_i}(x)| \leqq \frac{2}{M_{n_i}} < \frac{2^{1-i}}{M_{n_j}} \quad (i = j+1, j+2, j+3, \ldots). \tag{8.9}$$

Отсюда и из (8.8) следует неравенство

$$\sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{1}{M_{n_i}} |g_{n_i}(x+h) - g_{n_i}(x)| < \frac{2^{1-j}}{a}\, \omega(t). \tag{8.10}$$

(8.2), (8.6), (8.8) и (8.10) приводят к соотношению

$$|f(x+h) - f(x)| < \frac{6}{a}\, \omega(t). \tag{8.11}$$

Функция (7.6) 2π - периодична, так как $g_n(x)$ таковы. Отсюда, из (8.11) и (8.3) следует (8.1).

9. Прервав доказательство теоремы 1, займемся доказательством теоремы 2. В этом случае последовательность n_i следует выбрать так, чтобы в соответствии с (3.6) выполнялось неравенство

$$\frac{n_i}{M_{n_i}} < 2^{-i} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots), \tag{9.1}$$

а также (7.2), (7.4) и (7.5).

Если снова $h > 0$ и j наименьшее натуральное число, для которого имеет место (8.4), то (8.5) остается в силе, откуда, принимая во внимание (9.1), получаем соотношение

$$\sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{M_{n_i}} | g_{n_i}(x+h) - g_{n_i}(x) | < \sum_{i=j+1}^{\infty} 2^{-i} h = (1 - 2^{1-j}) h. \tag{9.2}$$

Так как (8.7) имеет место и в этом случае, то, ввиду (9.1) и (8.4),

$$\frac{1}{M_{n_j}} | g_{n_j}(x+h) - g_{n_i}(x) | < \frac{2^{1-j}}{n_j} \leqq 2^{1-j} h. \tag{9.3}$$

Отсюда и из остающегося в силе (8.9) следует, что

$$\sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{1}{M_{n_i}} | g_{n_i}(x+h) - g_n(x) | < \sum_{i=j+1}^{\infty} 2^{1-j-i} h = 2^{1-2j} h \leqq \frac{h}{2}. \tag{9.4}$$

Снова определяя 2π-периодическую функцию $f(x)$ формулой (7.6), из (8.2) и (9.2) — (9.4) получаем неравенство

$$| f(x+h) - f(x) | < \frac{3}{2} h,$$

поэтому, согласно утверждению теоремы 2,

$$f \in Lip\, 1.$$

10. Теперь можно одновременно завершить доказательство обеих теорем, показав, что имеет место (3.5).

Очевидно,

$$f(u_{n_k}) - L_{n_k}(f, X, u_{n_k}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{M_{n_i}} \left[g_{n_i}(u_{n_k}) - L_{n_k}(g_{n_i}, X, u_{n_k}) \right]. \tag{10.1}$$

Оценим по частям стоящую справа сумму. Если $k > 1$, то по (7.2) и (7.5)

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{M_{n_i}} \left[g_{n_i}(u_{n_k}) - L_{n_k}(g_{n_i}, X, u_{n_k}) \right] < \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} 2^{-i} = \frac{1}{2} - 2^{-k} \tag{10.2}$$

Ввиду (6.3) и (7.2)

$$\frac{1}{M_{n_k}} g_{n_k}(u_{n_k}) \leqq 2^{-k}. \tag{10.3}$$

В силу (6.6)

$$\frac{1}{M_{n_k}} L_{n_k}(g_{n_k}, X, u_{n_k}) = 1\,. \tag{10.4}$$

Так как для любой функции $g(x)$

$$|L_n(g, X, x)| \leqq M_n(X)\,\|g\| \qquad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

то, принимая во внимание (6.3) и (7.2), получаем неравенства

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{M_{n_i}} [g_{n_i}(u_{n_k}) - L_{n_k}(g_{n_i}, X, u_{n_k})] < \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1 + M_{n_k}}{M_{n_i}} < \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{1-i} = 2^{1-k}. \tag{10.5}$$

Резюмируя (10.1) — (10.5) видим, что

$$f(u_{n_k}) - L_{n_k}(f, X, u_{n_k}) < -\frac{1}{2} + 2^{1-k},$$

откуда следует (3.5).

(Поступила: 21 августа 1962 г.)

ЛИТЕРАТУРА

[1] Лозинский, С. М.: «Пространства $\widetilde{C}_\omega$ и $\widetilde{C}_\omega^*$ и сходимость интерполяционных процессов в них.» *ДАН* **59** (1948), 1389—1392.

[2] Erdős, P.—Turán, P.: „On the role of the Lebesgue functions in the theory of the Lagrange interpolation." *Acta Math. Acad Sci. Hung.* **6** (1955) 47—65.

[3] Киш, О.: „О сходимости тригонометрического и гармонического интерполирования." *Acta Math. Acad. Sci.. Hung.* **7** (1955) 173—200.

[4] Киш, О.: „О сходимости интерполяционных процессов в некоторых пространствах функций." *MTA Mat. Kut. Int Közl.* **7** (1962) 65—75.

[5] Тиман, А. Ф.: *Теория приближения функций действительного переменного.* Москва, физматгиз, 1960.

ON A SUFFICIENT CONDITION OF THE CONVERGENCE OF THE TRIGONOMETRIC INTERPOLATION

by

O. KIS

Let be $\omega(t)$ the continuity modulus of a function, 2π-periodical and continuous in $(-\infty, +\infty)$; $C(\omega)$ the set of 2π-periodical and continuous functions with continuity modulus of order of magnitude $O(\omega(t))$. X denotes an arbitrary matrix of fundamental points of the trigonometric interpolation, $M_n(X)$ the respective Lebesgue-constants, $L_n(f, X, x)$ the n-th trigonometric interpolation polynomial of the function $f(x)$ on X. If for $\omega(t)$ and the sequence of numbers M_n

$$\limsup_{k\to\infty} M_n\, \omega\left(\frac{1}{n}\right) > 0\,,$$

$$\lim_{t=+0} \frac{t}{\omega(t)} = 0\,,$$

(1) $$M_n \geqq M_n(Z) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

are true, where Z denotes the matrix of the equidistant fundamental points, then there exists a $f \in C(\omega)$ and a matrix X such that

(2) $$M_n(X) = M_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(3) $$\limsup_{n\to\infty} \max_{-\infty<x<+\infty} |f(x) - L_n(f, X, x)| > 0\,.$$

If

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M_n}{n} = +\infty$$

and (1) is true, then there exists a 2π-periodical $f \in \mathrm{Lip}\, 1$ and X such that (2) and (3) are true.

ON GAPS GENERATED BY A RANDOM SPACE FILLING PROCEDURE

by

G. BÁNKÖVI

§. 1. Formulation of the model

In paper [1] A. RÉNYI dealt with a one-dimensional random space filling procedure.[1]

This procedure consists in placing successive disjoint unit intervals on the interval $(0, x)$, according to the following rules:

a) for $x \leqq 1$ no interval can be placed,

b) for $x > 1$ the left endpoint of the first unit interval is uniformly distributed on the interval $(0, x - 1)$,

c) if k unit intervals $(k = 1, 2, \ldots)$ are already placed, the left endpoint of the $(k + 1)$-st unit interval will be uniformly distributed on the subdomain of the interval $(0, x - 1)$ by which no intersection with the former k intervals can be obtained,

d) the procedure will be finished when there remains no possibility of placing a further unit interval without intersection.

The number of the placed unit intervals is a random variable ν_x. It is proved that

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathbf{E}(\nu_x)}{x} = C = \int_0^\infty \exp\left\{-2 \int_0^t \frac{1 - e^{-u}}{u} du\right\} dt = 0{,}748 \ldots \tag{1}$$

and

$$\mathbf{D}(\nu_x) = O(\sqrt{x}) \qquad (x \to +\infty)$$

(An equivalent formulation of this model, describing the problem from the aspect of random experimentation is given in this section below).

Generalizations of the problem are treated in papers [2], [3] and [4].

This paper contains further investigations concerning the original model, namely the distribution of the gaps (i.e. those parts of the interval $(0, x)$ which are not covered by unit intervals) is considered.

First of all, an exact formulation of the model is given since the problems to be treated have rather complicated structures.

Let $\{t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots\}_x = T_x$ $(x > 1)$ be a sequence of independent observations of the random variable uniformly distributed on the interval $(0, x - 1)$. The set consisting of the elements T_x for a fixed x will be denoted by

[1] This is a special case of a three-dimensional problem raised by W. SCHMETTERER.

τ_x. Obviously τ_x can be interpreted as a random number generator. For every fixed T_x a set of indices $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ will be defined in the following manner. Let

$$i_1 = 1, \quad i_k = \min_i B_k(i) \qquad (k = 2, 3, \ldots)$$

where

$$B_k(i) = \left\{ i : \bigcup_{j=1}^{k-1} [(t_{i_j}, t_{i_j} + 1) \cap (t_i, t_i + 1)] = 0 \right\}.$$

The stopping rule is given by

$$\nu = \max_k \{k : i_k < +\infty\}.$$

(For the sake of brevity the index x of ν_x is sometimes omitted.)

The numbers $t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_\nu}$ denote the left endpoints of disjoint unit intervals and, according to the stopping rule, no more unit interval could be placed without intersection; thus the interval $(0, x)$ is "*filled*".

Let us denote the ordered set of $\{t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_\nu}\}$ by $\{t_1^*, t_2^*, \ldots, t_\nu^*\}$. The numbers

$$I_x^{(1)} = t_1^*, \quad I_x^{(k)} = t_k^* - (t_{k-1}^* + 1) \quad (k = 2, 3, \ldots, \nu), \quad I_x^{(\nu+1)} = x - (t_\nu^* + 1)$$

will be called "*gaps*", generated by the described random space filling procedure[2].

The probability spaces $\{\tau_x, S_x, \mathbf{P}_x\}$ occuring in problems concerning the gaps can be characterized in the following way. Let be

$$\tau_x(k) = \{T_x : \nu_x = k\} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Obviously $\tau_x(m) \cap \tau_x(n) = 0$ $(m \neq n)$ and $\bigcup_k \tau_x(k) = \tau_x$. Furthermore, the equality

$$\sum_{j=0}^{k+1} I_x^{(j)} = x - k \qquad (\tau_x(k) \neq 0,\ T_x \in \tau_x(k)) \tag{2}$$

holds. Let be

$$Z_x(k) =$$

$$= \left\{ z : z = (z_1, z_2, \ldots, z_{k+1}),\ 0 \leq z_j \leq 1\ (j = 1, 2, \ldots, k+1),\ \sum_{j=0}^{k+1} z_j \leq x - k \right\},$$

i.e. $Z_x(k)$ is the common part of a $(k+1)$-dimensional simplex and of a unit hypercube. (The numbers z_j $(j = 1, 2, \ldots, k+1)$ mean the gaps generated by an element T_x, $T_x \in \tau_x(k)$).

The set $\tau_x(k)$ is transformed by the random space filling procedure onto the domain $Z_x(k)$ in such a way that the inverse images of disjoint subsets of $Z_x(k)$ are disjoint in $\tau_x(k)$. Let $S_x(k)$ denote the σ-algebra of those subsets

[2] I.e. as there is no possibility of misunderstanding, "gap" may denote either an interval or its length.

of $\tau_x(k)$ which are the inverse images of the Borel sets of $Z_x(k)$. Then the σ-algebra

$$S_x = \bigcup_k S_x(k)$$

will be suitable for the problem treated in § 2. (We remark that for the problem treated in § 4, S_x can be given in a simpler way; in this case the Borel sets of $Z_x(k)$ only in respect of z_1 are to be considered).

The probability measure $\mathbf{P}_x$ is determined by the particular problems considered (i.e. by S_x); namely, roughly speaking, each T_x is "equally probable".

§. 2. Limiting distribution of a gap chosen at random

The first problem treated is the determination of the limiting distribution of a gap chosen at random on the filled interval $(0, x)$. More precisely, the distribution function

$$G_x(h) = \mathbf{P}(I_x < h) \qquad (0 < h \leq 1)$$

will be considered (for $x \to +\infty$), where I_x is selected with probability $1/\nu+1$ out of the gaps $I_x^{(1)}, I_x^{(2)}, \ldots, I_x^{(\nu+1)}$ generated by the random sequence T_x.

Definitions and notations. Let $\vartheta_x(h)$ denote the random number of gaps not smaller than h $(0 < h \leq 1)$, occurring on the filled interval $(0, x)$. Let

$$\xi_x(h) = \nu_x + \vartheta_x(h) \tag{3}$$

and

$$\varrho_x(h) = \frac{\xi_x(h) + 1}{\nu_x + 1}. \tag{4}$$

In the following we shall use the notations

$$\mathbf{E}(\nu_x) = M(x),\ \mathbf{D}(\nu_x) = D(x),\ \mathbf{E}(\xi_x(h)) = M_h(x),\ \mathbf{D}(\xi_x(h)) = D_h(x).$$ [3]

In dealing with the asymptotic behaviour of the model (for $x \to +\infty$) we shall need three lemmas.

Lemma 1. *The function $M_h(x)$ satisfies the functional equation*

$$M_h(x+1) = \frac{2}{x}\int_0^x M_h(t)\,dt + 1 \qquad (x > 0) \tag{5}$$

and the initial condition

$$M_h(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad 0 \leq x < h \\ 1 & \text{for} \quad h \leq x \leq 1. \end{cases} \tag{6}$$

Lemma 2.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{M_h(x)}{x} = C(h) = 2\int_0^\infty \exp\left\{-ht - 2\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}\,du\right\}dt \qquad (0 < h \leq 1). \tag{7}$$

[3] The random variables $\xi_x(1)$ and ν_x differ only on a set of measure 0 and therefore their corresponding moments are equal.

Lemma 3.

$$D_h(x) = O(\sqrt{x}) \qquad (0 < h \leqq 1\,;\ x \to +\infty)\,.$$

The first assertion can be easily seen; let us namely consider the filling procedure of the interval $(0, x+1)$ generated by the random sequence T_{x+1} $(x > 0)$. It follows from the model that for $t_1 = t$ the equation

$$M_h(x+1 \mid t) = M_h(t) + M_h(x-t) + 1 \tag{8}$$

holds, where $M_h(x+1 \mid t)$ denotes the conditional expectation of $\xi_{x+1}(h)$; t is uniformly distributed on $(0, x)$ and therefore

$$M_h(x+1) = \frac{1}{x}\int_0^x M_h(x+1 \mid t)\,dt\,. \tag{9}$$

The equation (5) follows by integrating (8) and considering (9). The initial condition (6) obviously follows from the model.

Lemma 2 is a special case of Theorem 4 in [4] but a shorter proof, similar to that of Lemma 6 can be also given; both of these proofs make use of Lemma 1.

Lemma 3 is a simple consequence of the results obtained by A. Rényi (see [1], pp. 121—123).

Theorem 1.

$$\lim_{x\to+\infty} G_x(h) = G(h) = 2 - C^{-1}\,C(h) \tag{10}$$

for every h $(0 < h \leqq 1)$ where $C(h)$ is defined by (7) *and* $C = C(1)$ (see (1)).

Proof. The quotient

$$\frac{\vartheta_x(h)}{\nu_x + 1}$$

is the ratio of the number of gaps not smaller than h, relative to the number of all gaps. The equality

$$\mathbf{P}(I_x \geqq h) = \mathbf{E}\left(\frac{\vartheta_x(h)}{\nu_x+1}\right) \tag{11}$$

obviously follows from the given definitions. Considering (3) and (4)

$$\frac{\vartheta_x(h)}{\nu_x+1} = \varrho_x(h) - 1\,,$$

and thus (11) can be written in the form

$$G_x(h) = 2 - \mathbf{E}(\varrho_x(h))\,.$$

The random variables $\varrho_x(h)$ $(0 \leqq x < +\infty)$ are uniformly bounded (namely as $0 \leqq \vartheta_x(h) \leqq \nu_x + 1$, $1 \leqq \varrho_x(h) \leqq 2$); in completing the proof it suffices to show[4] that

$$\lim_{x\to+\infty} \text{st.}\, \varrho_x(h) = C^{-1}\,C(h)$$

[4] See e.g. exercise 17. of Chap. XI. in [5].

as from this

$$\lim_{x \to +\infty} \mathbf{E}(\varrho_x(h)) = C^{-1} C(h)$$

follows[5].

Let A and $A(h)$ denote the events

$$|\nu_x - M(x)| \leqq \lambda_1 D(x)$$

and

$$|\xi_x(h) - M_h(x)| \leqq \lambda_2 D_h(x),$$

respectively, where λ_1 and λ_2 are fixed but arbitrarily chosen positive numbers; $\bar{A}$ and $\bar{A}(h)$ denote the complements of A and $A(h)$, respectively. According to Chebyshev's inequality

$$\mathbf{P}(\bar{A}) < \frac{1}{\lambda_1^2}, \quad \mathbf{P}(\bar{A}(h)) < \frac{1}{\lambda_2^2}$$

hold. Let x_0 be a number such that for $x < x_0$

$$M(x) + 1 > \lambda_1 D(x);$$

(x_0 can be chosen in such a way, as $M(x) = O(x)$, $D(x) = O(\sqrt{x})$). $\varrho_x(h)$ can be written in the form

$$\varrho_x(h) = \frac{\xi_x(h) - M_h(x) + M_h(x) + 1}{\nu_x - M(x) + M(x) + 1},$$

thus, for $x > x_0$ we obtain the estimate

$$(12) \qquad \begin{aligned} 1 - \frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_2^2} < \mathbf{P}(A \cap A(h)) \leqq \\ \leqq \mathbf{P}\left(\frac{M_h(x)\left(1 + \dfrac{1 - \lambda_2 D_h(x)}{M_h(x)}\right)}{M(x)\left(1 + \dfrac{1 + \lambda_1 D(x)}{M(x)}\right)} < \varrho_x(h) < \frac{M_h(x)\left(1 + \dfrac{1 + \lambda_2 D_h(x)}{M_h(x)}\right)}{M(x)\left(1 + \dfrac{1 - \lambda_1 D(x)}{M(x)}\right)} \right). \end{aligned}$$

Considering the asymptotic behaviour of the functions $M(x)$, $M_h(x)$, $D(x)$ and $D_h(x)$ (see Lemma 2 and Lemma 3) (12) can be written in the form

$$(13) \qquad \mathbf{P}\left(\frac{M_h(x)}{M(x)}(1 + \varepsilon_1) < \varrho_x(h) < \frac{M_h(x)}{M(x)}(1 + \varepsilon_2)\right) > 1 - \frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_2^2},$$

where $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(x; h, \lambda_1, \lambda_2)$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(x; h, \lambda_1, \lambda_2)$, $|\varepsilon_1| \to 0$ and $|\varepsilon_2| \to 0$ as $x \to +\infty$. It follows from (13) that

$$\mathbf{P}\left(\left|\varrho_x(h) - \frac{M_h(x)}{M(x)}\right| > \frac{M_h(x)}{M(x)} \max(|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|)\right) < \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2};$$

this means (considering (1) and (7)) that $\varrho_x(h)$ converges in probability to $C^{-1}C(h)$ as it was to be proved.

---

[5] The symbol lim st. denotes convergence in probabilitv.

Evaluated values of $G(h)$ and $C(h)$ are tabulated in § 5.

Theorem 2.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \mathbf{E}(I_x) = C^{-1} - 1 .$$

Proof. It is obvious (see (2)) that for every k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, $\tau_x(k) \neq 0$ and for every $T_x \in \tau_x(k)$

$$(k+1)\,\mathbf{E}(I_x \mid T_x) = x - k ,$$

and from this

$$\mathbf{E}(I_x) = \mathbf{E}\left(\frac{x - \nu_x}{\nu_x + 1}\right) \tag{14}$$

follows. In the following the proof is similar to that of Theorem 1. It can be easily shown that

$$\lim_{x \to +\infty} \text{st.}\ \frac{x - \nu_x}{\nu_x + 1} = C^{-1} - 1 \tag{15}$$

since (see [1])

$$\lim_{x \to +\infty} \text{st.}\ \frac{\nu_x}{x} = C .$$

The random variables $(x - \nu_x)(\nu_x + 1)^{-1}$ are bounded for $0 \leqq x < +\infty$, namely

$$0 \leqq \frac{x - \nu_x}{\nu_x + 1} \leqq {}^1/_2 ;$$

from this fact and (15), under consideration of (14), the assertion follows.

Another proof can be given by starting from

$$m = \int_0^1 y G'(y)\, dy .$$

(This method is used in the proof of the following theorem.)

Theorem 3.

$$\sigma^2 = \lim_{x \to +\infty} \mathbf{D}^2(I_x) =$$

$$= -2 + C^{-1}\left(6 - 8 \int_0^\infty \left(\frac{1 - e^{-t}}{t}\right)^2 \exp\left\{-2\int_0^t \frac{1 - e^{-u}}{u}\, du\right\} dt\right) - C^{-2} .$$

Proof.

$$\lim_{x \to +\infty} E(I_x^2) = \int_0^1 y^2 G'(y)\, dy = 2C^{-1} \int_0^1 \left(\int_0^\infty y^2 t \exp\left\{-yt - 2\int_0^t \frac{1 - e^{-u}}{u}\right\} dt\right) dy =$$

$$= 2C^{-1} \int_0^\infty \left(\int_0^1 y^2 e^{-yt}\, dy\right) t \exp\left\{-2\int_0^t \frac{1 - e^{-u}}{u}\, du\right\} dt =$$

$$= -1 + 4C^{-1} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-t} - te^{-t}}{t^2} \exp\left\{-2 \int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}\, du\right\} dt =$$

$$= -1 + 4C^{-1} \int_0^\infty \left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right)' \exp\left\{-2 \int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}\, du\right\} dt =$$

$$= -1 + 4C^{-1} - 8C^{-1} \int_0^\infty \left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right)^2 \exp\left\{-2 \int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}\, du\right\} dt\,.$$

Since

$$\sigma^2 = \lim_{x \to +\infty} \mathbf{E}(I_x^2) - m^2,$$

considering Theorem 2, the assertion follows.

§. 3. Two further problems

In this paragraph two problems are simply solved by applying the results of § 2.

1. What is the probability of the event that a point placed at random on the filled interval $(0, x)$ is placed on a gap smaller than h $(0 < h \leq 1)$?

The answer will be given for $x \to +\infty$.

On the filled interval $(0, x)$ the number of those gaps for which the inequality

$$h \leq I_x^{(k)} < h + dh \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu_x + 1) \tag{16}$$

holds, clearly equals

$$\vartheta_x(h) - \vartheta_x(h + dh) = \xi_x(h) - \xi_x(h + dh)\,.$$

The sum of these gaps is approximately equal to $h(\xi_x(h) - \xi_x(h + \mathrm{d}h))$. Thus the probability of placing a point on such a gap is given by

$$p_x(h)\, dh \approx \mathbf{E}\left(\frac{h}{x}(\xi_x(h) - \xi_x(h + dh))\right) = h\left(\frac{M_h(x)}{x} - \frac{M_{h+dh}(x)}{x}\right). \tag{17}$$

Considering (7) we obtain from (17)

$$p(h)\, dh = \lim_{x \to +\infty} p_x(h)\, dh \approx h\,(C(h) - C(h + dh)) \approx -hC'(h)\, dh \tag{18}$$

and since from (10)

$$C'(h) = -C\,G'(h)\,, \tag{19}$$

thus the required probability equals

$$P(h) = \int_0^h p(y)\, dy = C \int_0^h y\, G'(y)\, dy = C(h\, G(h) - \int_0^h G(y)\, dy)\,.$$

2. What is the probability of the event that a segment of length L $(0 < L < 1)$ placed at random on the filled interval $(0, x)$ intersects none of the unit intervals?

Let us consider the interval $(0, x+L)$; the left endpoint of the segment is uniformly distributed on $(0, x)$. Therefore the probability of the event that such a segment will lie on one of the gaps for which (16) holds, equals approximately

$$\frac{h-L}{x}(M_h(x) - M_{h+dh}(x)) \approx \frac{h-L}{h} p_x(h)\, dh.$$

Thus the required probability for the interval $(0, x+L)$ is equal to

$$\int_L^1 \frac{y-L}{y} p_x(y)\, dy$$

and hence for $x \to +\infty$ (considering (18) and (19)) we obtain

$$P_L = \int_L^1 \frac{y-L}{y} p(y)\, dy = -\int_L^1 (y-L)\, C'(y)\, dy = C \int_L^1 (1 - G(y))\, dy.$$

We remark that

$$P(1) = \lim_{L \to +0} P_L = Cm = 1 - C.$$

§. 4. On the distribution of the first gap

By considering I_x, we have investigated so far only the "average properties" of the gaps. A further interesting problem is that of the properties of $I_x^{(k)}$ for a fixed k; for $k > 1$ the tackling of this question seems to be rather complicated, but for $k = 1$, the limiting distribution of $I_x^{(1)}$ can be determined and compared with that of I_x.

Let us introduce the following notations

$$\mathbf{P}(I_x^{(1)} < h) = G^*(x; h), \quad \mathbf{E}((I_x^{(1)})^j) = M_j^*(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Lemma 4. *For every fixed h $(0 < h \leqq 1)$, $G^*(x; h)$ satisfies the functional equation*

$$G^*(x+1\,;\, h) = \frac{1}{x} \int_0^x G^*(t\,;\, h)\, dt \qquad (x > 0) \tag{20}$$

and the initial condition

$$G^*(x; h) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leqq x < h \\ 0 & \text{for } h \leqq x \leqq 1. \end{cases} \tag{21}$$

Lemma 5. *The functions $M_j^*(x)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ satisfy the functional equations*

$$M_j^*(x+1) = \frac{1}{x} \int_0^x M_j^*(t)\, dt \qquad (x > 0) \tag{22}$$

and the initial conditions

$$M_j^*(x) = x^j \qquad (0 \leqq x \leqq 1). \tag{23}$$

The initial conditions (21) and (23) obviously follow from the model. The equations (20) and (22) can be deduced similarly to (5).

Lemma 6. *If the function $Q(x)$ satisfies the functional equation*

$$Q(x+1) = \frac{1}{x}\int_0^x Q(t)\,dt \qquad (x > 0) \tag{24}$$

and the initial condition

$$Q(x) = q(x) \qquad (0 \leqq x \leqq 1) \tag{25}$$

where $q(x)$ is integrable and

$$0 \leqq q(x) \leqq K \qquad (0 \leqq x \leqq 1), \tag{26}$$

then

$$\lim_{x\to+\infty} Q(x) = \int_0^\infty A(t)\ \exp\left\{-\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}\,du\right\} dt\,,$$

where

$$A(t) = \int_0^1 q(x)\,e^{-tx}\,dx \qquad (0 \leqq t < +\infty)\,.$$

Proof. Let us introduce the Laplace-transform of $Q(x)$,

$$\varphi(s) = \int_0^\infty Q(x)\,e^{-sx}\,dx \qquad (\mathrm{Re}\, s > 0)\,.$$

$\varphi(s)$ exists, since it follows from (24), (25) and (26) that

$$Q(x) \leqq K \qquad (0 \leqq x < +\infty)$$

and thus

$$\varphi(s) \leqq K\int_0^\infty e^{-sx}\,dx = \frac{K}{s}\,.$$

As

$$\int_0^\infty \left(\int_0^x Q(t)\,dt\right) e^{-sx}\,dx = \frac{\varphi(s)}{s} \tag{27}$$

and

$$\int_0^\infty x\,Q(x+1)\,e^{-sx}\,dx = -\frac{d}{ds}\bigl(e^s(\varphi(s) - A(s))\bigr), \tag{28}$$

irom (24), (27) and (28) the ordinary differential equation

$$\frac{d}{ds}\left(e^s(\varphi(s)-A(s))\right)+\frac{\varphi(s)}{s}=0 \tag{29}$$

is obtained. By substituting

$$\psi(s)=e^s(\varphi(s)-A(s)), \tag{30}$$

(29) can be written in the form

$$\psi'(s)+\frac{e^{-s}}{s}\psi(s)+\frac{A(s)}{s}=0. \tag{31}$$

It is easy to show that

$$\lim_{s\to+\infty}\psi(s)=0\,; \tag{32}$$

namely

$$\psi(s)=e^s\int_1^\infty Q(x)\,e^{-sx}\,dx=\int_0^\infty Q(x+1)\,e^{-sx}\,dx\leqq\frac{K}{s}.$$

The solution of the equation (31) under the initial condition (32) is

$$\psi(s)=\frac{1}{s}\int_s^\infty A(t)\exp\left\{-\int_s^t\frac{1-e^{-u}}{u}\,du\right\}dt. \tag{33}$$

From (33) and (30) the relation

$$\lim_{s\to+0}(s\,\psi(s))=\lim_{s\to+0}(s\,\varphi(s))=\int_0^\infty A(t)\exp\left\{\int_0^t\frac{1-e^{-u}}{u}\,du\right\}dt \tag{34}$$

ollows, since

$$0\leqq\lim_{s\to+0}(se^s A(s))\leqq\lim_{s\to+0}\left(Kse^s\int_0^1 e^{-sx}\,dx\right)=K\lim_{s\to+0}(e^s-1)=0\,.$$

In completing the proof, we shall make use of the following Tauberian theorem (see [6] Theorem 108 and [1]): If $\alpha(x)$ is a monotonically increasing function $(0<x<+\infty)$, $\beta>0$ and

$$\lim_{s\to+\infty}s^\beta\int_0^\infty e^{-sx}\,d\alpha(x)=c$$

then

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(x)}{x^\beta}=\frac{c}{\Gamma(\beta+1)}\,.$$

Let us put $\alpha(x)=\int_0^x Q(t)\,dt$ and $\beta=1$; considering that in this case

$$\int_0^\infty e^{-sx}\,d\alpha(x)=\varphi(s)\,,$$

we obtain

$$(35) \qquad \lim_{s\to+0} (s\,\varphi(s)) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x Q(t)\,dt}{x} = \lim_{x\to+\infty} Q(x)\,.$$

Comparing (35) with (34), our assertion follows.

Applying Lemmas 4, 5 and 6, the following theorems are obtained:

Theorem 4.

$$\lim_{x\to+\infty} G^*(x;h) = G^*(h) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-ht}}{t} \exp\left\{-\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}du\right\} dt \qquad (0 < h \leq 1)\,.$$

Theorem 5.

$$m^* = \lim_{x\to+\infty} M_1^*(x) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-t}-te^{-t}}{t^2} \exp\left\{-\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}du\right\} dt\,.$$

Theorem 6.

$$m_2^* = \lim_{x\to+\infty} M_2^*(x) = 2\int_0^\infty \frac{1-e^{-t}-te^{-t}-\frac{1}{2}t^2e^{-t}}{t^3} \exp\left\{-\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}du\right\} dt\,.$$

Thus the asymptotic variance of $I_x^{(1)}$ equals:

$$(\sigma^*)^2 = \lim_{x\to+\infty} \mathbf{D}^2(I_x^{(1)}) = m_2^* - (m^*)^2.$$

Obviously, also other proofs can be given for Theorem 5 and Theorem 6, by making use of Theorem 4 and the relations

$$m^* = \int_0^1 y\,G^{*\prime}(y)\,dy, m_2^* = \int_0^1 y^2\,G^{*\prime}(y)\,dy\,.$$

§. 5. Experimental results

The computing of $G(h)$ for a fixed h requires the evaluation of the double integral $C(h)$. This laborious work can be avoided by applying the Monte Carlo method[6], the great advantage of which consists in obtaining estimates of $G(h)$ for all $h\,(0 < h \leq 1)$ simultaneously. Of course, this method yields only approximate values with a random fluctuation.

The stochastic model was given (see § 1). We have performed ten experiments on the interval (0, 100).[7] The results are tabulated in Table 1; the accuracy is about 10^{-2}. The average value of $10^{-2}\nu_{100}$ was 0.746.

[6] See e.g. [7].

[7] We made use of the table of random numbers of [8].

Table 1.

h	$G(h)$	$C(h)$	h	$G(h)$	$C(h)$
0.05	0.166	1.370	0.55	0.765	0.923
0.10	0.269	1.293	0.60	0.791	0.903
0.15	0.346	1.236	0.65	0.813	0.887
0.20	0.425	1.177	0.70	0.837	0.869
0.25	0.493	1.126	0.75	0.865	0.848
0.30	0.555	1.079	0.80	0.898	0.823
0.35	0.604	1.043	0.85	0.919	0.808
0.40	0.642	1.014	0.90	0.946	0.787
0.45	0.688	0.980	0.95	0.976	0.765
0.50	0.724	0.953	1.00	1.000	0.747

By numerical integration we have obtained from the above values the following estimates:

$$\int_0^1 G(y)\,dy \approx 0{,}662\,, \qquad \int_0^1 yG(y)\,dy \approx 0{,}402\,.$$

Thus we have the estimates:

$$m = 1 - \int_0^1 G(y)\,dy \approx 0{,}338\,,$$

$$\sigma^2 = 2\int_0^1 (1-y)\,G(y)\,dy - \Bigl(\int_0^1 G(y)\,dy\Bigr)^2 \approx 0{,}082\,,$$

and, considering Theorem 2,

$$C = \frac{1}{1+m} \approx 0{,}747\,. \tag{36}$$

The estimate (36) is in good agreement with (1). This fact shows the relatively good accuracy of the experimental method. It is interesting that σ^2 is near to the variance (1/12) of the random variable uniformly distributed on the interval (0,1).

To obtain good estimates for the values of $G^*(h)$ by the Monte Carlo method, requires by far more experiments. This work was not done.

Finally, in Table 2 we have tabulated the estimates obtained for the values of P_L.

Table 2.

L	P_L	L	P_L	L	P_L
0.1	0.211	0.4	0.122	0.7	0.060
0.2	0.176	0.5	0.100	0.8	0.039
0.3	0.146	0.6	0.080	0.9	0.019

(Received May 4, 1962)

REFERENCES

[1] RÉNYI A.: „Egy egydimenziós véletlen térkitöltési problémáról." *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **3** (1958) 109—127.
[2] PALÁSTI, I.: „On some random space filling problems." *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **5** (1960) A. 353—360.
[3] BÁNKÖVI, G.: „Evaluation of integrals by Monte Carlo methods based on the onedimensional random space filling." *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **5** (1960) A. 339—352.
[4] BÁNKÖVI G.—DOBÓ A.: „Egydimenziós véletlen térkitöltés változó hosszúságú szakaszokkal". *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **11** (1961) 399—415.
[5] RÉNYI A.: *Valószínűségszámítás.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.
[6] HARDY, G. H.: *Divergent series.* Oxford University Press, 1949.
[7] MEYER, H. A. (ed.): *Symposium on Monte Carlo methods.* Wiley, New York, 1956.
[8] HALD, A.: *Statistical Tables and Formulas.* Wiley, New York, 1952.

О ПРОМЕЖУТКАХ, СОЗДАННЫХ ОДНОЙ ПРОЦЕДУРОЙ СЛУЧАЙНОГО ЗАПОЛНЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА

G. BÁNKÖVI

Резюме

В работе [1] A. RÉNYI исследовал случайное заполнение отрезка $(0, x)$ единичными отрезками. Он определил математическое ожидание асимптотического числа (при $x \to +\infty$) расположенных отрезков.

В этой работе исследуются промежутки между отрезками. В § 1 дается точная формулировка модели. В § 2 определяется предельное распределение промежутка, выбранного из всех промежутков случайным образом. В § 3 решаются две задачи относительно заполненного отрезка $(0, x)$. В § 4 определяется предельное распределение первого промежутка. В § 5 сообщаются результаты опытов проведенных методом Монте-Карло.

A CENTRAL LIMIT THEOREM FOR THE SUM OF A RANDOM NUMBER OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES

by

J. MOGYORÓDI[1]

§. 1. Introduction

Let $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ denote throughout the present paper a sequence of independent and identically distributed random variables with mean value 0 and variance 1. Let us put

$$\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n \tag{1}$$

and

$$\eta_n = \frac{\zeta_n}{\sqrt{n}}. \tag{2}$$

Then by the simplest case of the central limit theorem

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(\eta_n < x) = \Phi(x) \qquad (-\infty < x < +\infty). \tag{3}$$

Here and in what follows $\mathbf{P}(\,.\,)$ denotes the probability of the event in the brackets and $\Phi(x)$ the standard form of the normal distribution function, i.e.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \tag{4}$$

In the present paper we shall investigate the limiting distribution of the random variables η_{ν_n} for $n \to +\infty$, where ν_n $(n = 1, 2, \ldots)$ is a sequence of positive integer-valued random variables. We mention that in this paper nothing is supposed about the dependence of ν_n on the random variables ξ_k.

The first results of this kind have been obtained by F. J. ANSCOMBE [1]. We mention here a special case of a more general result of the mentioned author.

Theorem 1. *If ν_n is a sequence of positive integer-valued random variables such that ν_n/n converges for $n \to +\infty$ in probability to a constant $c > 0$, then*

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(\eta_{\nu_n} < x) = \Phi(x) \tag{5}$$

holds.

---

[1] Eötvös Loránd University, Mathematical Institute, Budapest.

Recently A. RÉNYI [2] generalized Theorem 1. He investigated the case when $\frac{\nu_n}{n}$ tends in probability to a positive random variable λ having a discrete distribution. He proved the following

Theorem 2. *If ν_n $(n = 1, 2, \ldots)$ is a sequence of positive integer-valued random variables such that ν_n/n converges in probability to a positive random variable λ having a discrete distribution, then* (5) *holds.*

In paper [6] we set ourself as an aim to investigate in a following paper the case when ν_n/n converges in probability to a positive variable λ having arbitrary distribution.

According to this program, the aim of the present paper is to generalize RÉNYI's result by omitting the restriction that the positive random variable λ has a distribution of the discrete type.

We prove the following

Theorem 3.[2] *Let $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ be a sequence of independent and identically distributed random variables with mean value* 0 *and variance* 1.

If ν_n $(n = 1, 2, \ldots)$ is a sequence of positive integer-valued random variables such that ν_n/n converges in probability to a positive random variable λ, then (5) *holds.*

§ 2. Some theorems and an inequality of Kolmogorov type

We denote by $A \circ B$ the symmetric difference $(A - B) + (B - A)$ of the random events A and B in the following.

Lemma 1. *Let $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ be a sequence of random variables and suppose that τ_n converges in probability to a random variable τ. Let further a_1 and a_2 $(a_1 < a_2)$ be continuity points of the distribution function $F(x)$ of the random variable τ. Let A denote the event $\{a_1 \leqq \tau < a_2\}$ and A_n the event $\{a_1 \leqq \tau_n < a_2\}$. Then $\mathbf{P}(A_n \circ A) \to 0$ if $n \to +\infty$.*

Proof. Given any $\varepsilon > 0$ we can choose (because of the continuity of $F(x)$ at the points a_1 and a_2) a positive number δ such that $|F(x) - F(a_i)| < \varepsilon$ if $|x - a_i| \leqq \delta$ $(i = 1, 2)$.

We have the following sequence of equalities and inequalities

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_n \bar{A}) &= \mathbf{P}(A_n \bar{A}, \tau < a_1 - \delta) + \mathbf{P}(A_n \bar{A}, \tau \geqq a_2 + \delta) + \\ &+ \mathbf{P}(A_n \bar{A}, a_1 - \delta \leqq \tau < a_1) + \mathbf{P}(A_n \bar{A}, a_2 \leqq \tau \leqq a_2 + \delta) \leqq \\ &\leqq \mathbf{P}(|\tau_n - \tau| > \delta) + F(a_1) - F(a_1 - \delta) + F(a_2 + \delta) - F(a_2)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\bar{A}_n A) &= \mathbf{P}(\bar{A}_n A, a_1 + \delta \leqq \tau < a_2 - \delta) + \mathbf{P}(\bar{A}_n A, a_1 \leqq \tau < a_1 + \delta) + \\ &+ \mathbf{P}(\bar{A}_n A, a_2 - \delta \leqq \tau < a_2) \leqq \mathbf{P}(|\tau_n - \tau| > \delta) + \\ &+ F(a_1 + \delta) - F(a_1) + F(a_2) - F(a_2 - \delta)\,.\end{aligned}$$

Taking into account that τ_n converges in probability to τ we can choose the positive integer n_0 such that if $n \geqq n_0$ we have $\mathbf{P}(|\tau_n - \tau| > \delta) < \varepsilon$.

---

[2] Professor RÉNYI kindly informed me that in the paper "On the strong law of large numbers for a class of stochastic processes" written by J. R. BLUM, D. L. HANSON, and L. H. KOOPMANS the same theorem is proved independently of me. This paper is to be appear in "Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete". (Springer-verlag. Berlin — Göttingen — Heidelberg. 1962).

Thus we have $\mathbf{P}(A_n\bar{A}) < 3\varepsilon$ and $\mathbf{P}(\bar{A}_n A) < 3\varepsilon$ and so $\mathbf{P}(A_n \circ A) < 6\varepsilon$. This gives our assertion.

We shall use this Lemma 1 in the following form:

Consequence. If $[a_1, b_1), [a_2, b_2), \ldots, [a_k, b_k)$ are disjoint intervals $(k = 1, 2, \ldots)$, a_i, b_i $(i = 1, 2, \ldots k)$ are continuity points of the distribution function of τ and $A^{(i)}$ denotes the event $\{a_i \leqq \tau < b_i\}$ and $A_n^{(i)}$ the event $\{a_i \leqq \tau_n < b_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ then for any fixed positive integer k

$$\sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(A_n^{(i)} \circ A^{(i)}) \to 0, \quad \text{if} \quad n \to +\infty .$$

The following Lemma is almost trivial.

Lemma 2. *If $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ is a sequence of random variables which converges in probability to a random variable τ and a is a continuity point of the distribution function τ such that $\mathbf{P}(\tau < a) < \varepsilon$ (resp. $1 - \mathbf{P}(\tau < a) < \varepsilon$) then there exists a positive integer n_0 such that for $n \geqq n_0$*

$$\mathbf{P}(\tau_n < a) < 2\varepsilon . \quad (\textit{resp.}\ 1 - \mathbf{P}(\tau_n < a) < 2\varepsilon).$$

Proof. The assertion follows at once from the fact that a is a continuity point of the distribution function of τ and from the following equalities and inequalities:

$$\mathbf{P}(\tau_n < a) = \mathbf{P}(\tau_n < a, |\tau_n - \tau| \leqq \delta) + \mathbf{P}(\tau_n < a, |\tau_n - \tau| > \delta) \leqq$$
$$\leqq \mathbf{P}(\tau - \delta < a) + \varepsilon, \text{ if } n \geqq n_0 .$$

The case when $1 - \mathbf{P}(\tau < a) < \varepsilon$, can be treated similarly.

We formulate a theorem of A. Rényi [4].

Theorem 4. *If τ_n is a sequence of independent random variables such that putting*

$$\sigma_n = \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} \tau_k, \quad \textit{where} \quad B_n \to +\infty$$

the distribution of the random variable σ_n tends to a limiting distribution, then the conditional distribution of σ_n under any condition having positive probability, tends to the same limiting distribution.

Theorem 5. *Let $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ be a sequence of random variables such that for $n = 1, 2, \ldots$ $\mathbf{M}(\tau_n)$ exists*[3] *and*

$$\mathbf{M}(\tau_n) \to M \qquad (|M| < +\infty)$$

as $n \to +\infty$.

Let us suppose that

a)

$$\lim_{N \to +\infty} \int_{|\tau_n| > N} |\tau_n| \, d\mathbf{P} = 0$$

[3] Here and in what follows $\mathbf{M}(\cdot)$ and $\mathbf{M}(\cdot|A)$ denote the mathematical expectation and the conditional mathematical expectation resp. of the random variable in the brackets.

uniformly in n.

b) $$\lim_{n\to+\infty} |\mathbf{P}(\tau_n < x | A) - \mathbf{P}(\tau_n < x)| = 0$$

where A *is an event such that* $1 > \mathbf{P}(A) > 0$.

Then

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{M}(\tau_n | A) = M.$$

Proof. We have

$$\mathbf{M}(\tau_n | A) = \frac{1}{\mathbf{P}(A)}\left\{ \int\limits_{(A\cap\{|\tau_n|\leqq N\})} \tau_n \, d\mathbf{P} + \int\limits_{(A\cap\{|\tau_n|>N\})} \tau_n \, d\mathbf{P}\right\}$$

where N is an arbitrary positive number.

Condition a) ensures that for any $\varepsilon > 0$ we can choose a number $N = N(\varepsilon, A)$ such that

(6) $$\left|\frac{1}{\mathbf{P}(A)} \int\limits_{(A\cap\{|\tau_n|>N(\varepsilon)\})} \tau_n \, d\mathbf{P}\right| \leqq \frac{1}{\mathbf{P}(A)} \int\limits_{(|\tau_n|>N(\varepsilon))} |\tau_n| \, d\mathbf{P} < \varepsilon$$

holds for $n = 1, 2, \ldots$.

Thus we have

(7) $$\left|\mathbf{M}(\tau_n | A) - \frac{1}{\mathbf{P}(A)} \int\limits_{(A\cap(|\tau_n|\leqq N(\varepsilon)))} \tau_n \, d\mathbf{P}\right| < \varepsilon. \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

It is easy to see that for $n = 1, 2, \ldots$

$$\frac{1}{\mathbf{P}(A)} \int\limits_{\{A\cap\{|\tau_n|\leqq N(\varepsilon)\}\}} \tau_n \, d\mathbf{P} \geqq \sum_{|kh_0|\leqq N(\varepsilon)} kh_0 \, \mathbf{P}(kh_0 \leqq \tau_n < (k+1)\, h_0 | A)$$

where h_0 is a fixed positive number and $h_0 < \varepsilon$.

Let

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{N(\varepsilon)\left[\dfrac{N(\varepsilon)}{h_0}\right]},$$

Then it follows from condition b) that we can choose an index $n_0 = n_0(\varepsilon') = n_0(\varepsilon)$ such that for $n \geqq n_0$ the following inequality holds:

$$|\mathbf{P}(kh_0 \leqq \tau_n < (k+1)\, h_0 | A) - \mathbf{P}(kh_0 \leqq \tau_n < (k+1)\, h_0)| < \varepsilon'$$

for any integer k such that $|k h_0| \leqq N(\varepsilon)$.

Using this inequality we obtain for $n \geqq n_0$

$$\frac{1}{\mathbf{P}(A)} \int\limits_{\{A\cap\{|\tau_n|\leqq N(\varepsilon)\}\}} \tau_n \, d\mathbf{P} \geqq \sum_{|kh_0|\leqq N(\varepsilon)} kh_0 \, \mathbf{P}(kh_0 \leqq \tau_n < (k+1)\, h_0) - \varepsilon.$$

Thus from (7) we see that for $n \geqq n_0$

$$\mathbf{M}(\tau_n|A) \geqq \sum_{|kh_0| \leqq N(\varepsilon)} kh_0 \mathbf{P}(kh_0 \leqq \tau_n < (k+1) h_0) - 2\varepsilon. \tag{8}$$

On the other hand it follows from (6) that

$$\left|\mathbf{M}(\tau_n) - \int_{(|\tau_n| \leqq N(\varepsilon))} \tau_n \, d\mathbf{P}\right| < \varepsilon \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

and we have for $n = 1, 2, \ldots$

$$\left|\int_{(|\tau_n| \leqq N(\varepsilon))} \tau_n \, d\mathbf{P} - \sum_{|kh_0| \leqq N(\varepsilon)} kh_0 \mathbf{P}(kh_0 \leqq \tau_n < (k+1) h_0)\right| \leqq h_0 < \varepsilon.$$

Confering these last two inequalities with (8) we obtain for $n \geqq n_0$

$$\mathbf{M}(\tau_n|A) \geqq \mathbf{M}(\tau_n) - 4\varepsilon. \tag{9}$$

It follows from (9) that

$$\liminf_{n \to +\infty} \mathbf{M}(\tau_n \,|\, A) \geqq M. \tag{10}$$

Now condition b) ensures that

$$\lim_{n \to +\infty} |\mathbf{P}(\tau_n < x \,|\, \bar{A}) - \mathbf{P}(\tau_n < x)| = 0.$$

Similarly, as in the preceding argumentation, one shows that

$$\liminf_{n \to +\infty} \mathbf{M}(\tau_n \,|\, \bar{A}) \geqq M. \tag{11}$$

Now from (11) and from the equality

$$\mathbf{M}(\tau_n) = \mathbf{M}(\tau_n \,|\, A)\, \mathbf{P}(A) + \mathbf{M}(\tau_n \,|\, \bar{A})\, \mathbf{P}(\bar{A})$$

we deduce that

$$\limsup_{n \to +\infty} \mathbf{M}(\tau_n \,|\, A) \leqq M. \tag{12}$$

(10) and (12) together give our assertion.

Theorem 6. *Let $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$ be a sequence of independent random variables with mean value* 0 *and variances $D_1, D_2, \ldots$. Put*

$$\sigma_n = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n}{B_n}$$

(where $B_n^2 = D_1^2 + D_2^2 + \ldots + D_n^2$ and $B_n \to +\infty$). Let us suppose that the distribution function $F_n(x)$ of the random variable σ_n tends to a non-degenerate limiting distribution function $F(x)$. Let us suppose further that

$$\mathbf{M}(\sigma_n^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, dF(x).$$

Then under any condition A, having positive probability, we have

$$\mathbf{M}(\sigma_n^2 \,|\, A) \to 1 \qquad (as\ n \to +\infty).$$

Proof. We prove that under conditions of our theorem

$$\lim_{N\to+\infty} \int_{|x|\geqq N} x^2\, dF_n(x) = 0$$

holds uniformly in n.

For this purpose let us choose the positive number $N(\varepsilon)$ according to the given positive number ε such that for $N \geqq N(\varepsilon)$

$$\int_{|x|\geqq N} x^2\, dF(x) < \frac{\varepsilon}{4}$$

be satisfied. Then we have for these N

$$\left| 1 - \int_{|x|<N} x^2\, dF(x) \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

On the other hand, since $F_n(x)$ converges to $F(x)$ at all continuity points of $F(x)$, we have for $n \geqq n_0(\varepsilon)$

$$\left| \int_{|x|\leqq N} x^2\, d\, F_n(x) - \int_{|x|\leqq N} x^2\, dF(x) \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Thus for $n \geqq n_0(\varepsilon)$ and for $N \geqq N(\varepsilon)$ the following inequality holds

$$\left| 1 - \int_{|x|\leqq N} x^2\, dF_n(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{13}$$

Further from the condition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, dF_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, dF(x)$$

we deduce that

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, dF_n(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, dF(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{14}$$

if $n \geqq n_1(\varepsilon)$. Let $n(\varepsilon) = \max\left(n_0(\varepsilon), n_1(\varepsilon)\right)$. Confering (13) with (14) we conclude

$$0 \leqq \int_{|x|\geqq N} x^2\, dF_n(x) < \varepsilon,$$

if $n \geqq n(\varepsilon)$ and $N \geqq N(\varepsilon)$. This essentially means the asserted uniform integrability.

We are now in the position to prove the assertion of our theorem. According to the preceding note we can choose for any n and for any positive ε a positive number $N(\varepsilon)$ such that

$$0 \leqq \int_{|x| \geqq N(\varepsilon)} x^2 \, dF_n(x) \leqq \varepsilon \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

and

$$0 \leqq \int_{|x| \geqq N(\varepsilon)} x^2 \, dF(x) \leqq \varepsilon .$$

Using this inequality we obtain for any fixed condition A, having positive probability,

(15)

$$0 \leqq \int_{|x| \geqq N(\varepsilon)} x^2 \, dF_n(x \mid A) \leqq \frac{1}{\mathbf{P}(A)} \int_{|x| \geqq N(\varepsilon)} x^2 \, dF_n(x) \leqq \frac{\varepsilon}{\mathbf{P}(A)}, \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Thus it is sufficient to deal with the convergence of the integrals

$$\int_{|x| \leqq N(\varepsilon)} x^2 \, d\, F_n(x \mid A) .$$

Now according to the assertion of Theorem 4 we have

$$F_n(x \mid A) \to F(x)$$

at all continuity points of $F(x)$.

This means that

$$\int_{|x| \leqq N(\varepsilon)} x^2 \, d\, F_n(x \mid A) \to \int_{|x| \leqq N(\varepsilon)} x^2 \, dF(x) . \tag{16}$$

Taking into account the choosing of $N(\varepsilon)$ and confering (15) with (16) we obtain the assertion of our Theorem.

Theorem 7. *Let $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ be a sequence of independent random variables with mean values $\mathbf{M}(\tau_i) = M_i$ and variances $\mathbf{D}(\tau_i) = D_i$. Let further*

$$\sigma_n = \frac{\tau_1 + \ldots + \tau_n - (M_1 + \ldots + M_n)}{S_n}$$

where

$$S_n = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + \ldots + D_n^2} .$$

Let us suppose that the distribution function $F_n(x)$ of random variable σ_n converges to the non-degenerate distribution function $F(x)$ with variance 1. Let further C be an arbitrary random event having positive probability. Then there exists an integer $n_0 = n_0(C)$ such that for $n \geqq n_0$

$$\mathbf{P}\left(\max_{1 \leqq k \leqq n} \left| \sum_{i=1}^{k} (\tau_i - M_i) \right| \geqq \lambda S_n, C \right) \leqq \frac{3\sqrt{\mathbf{P}(C)}}{\lambda^2}$$

where λ is an arbitrary positive number.

Proof. Let $\vartheta_k = \sum_{i=1}^{k} (\tau_i - M_i)$ and let γ denote the indicator of the event C, i.e.

$$\gamma = \begin{cases} 1, & \text{if } C \text{ occurs} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Let further A_k $(k = 2, \ldots n)$ denote the following event:

$$|\vartheta_i| \leqq \lambda S_n, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-1) \text{ and } |\vartheta_k| \geqq \lambda S_n,$$

and A_1 the following event: $|\vartheta_1| \geqq \lambda S_n$,
and let α_k be the indicator of the event A_k. Then

$$\alpha_i \alpha_j = 0, \quad \text{if} \quad i \neq j, \quad 0 \leqq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \leqq 1 \quad \text{and}$$

$$\mathbf{M}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right)\gamma\right] = \mathbf{P}\left(\max_{1 \leqq k \leqq n} \left|\sum_{i=1}^{k} (\tau_i - M_i)\right| \geqq \lambda S_n, C\right).$$

Let us investigate the mean value of $\gamma \vartheta_n^2$. It is easy to see that

$$\mathbf{M}(\gamma \vartheta_n^2) \geqq \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}(\gamma \alpha_k \vartheta_k^2) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{M}(\gamma \alpha_k \vartheta_k (\vartheta_n - \vartheta_k)).$$

The second sum of the right-hand side can be written as follows

$$\mathbf{M}\left(\gamma \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \vartheta_k (\vartheta_n - \vartheta_k)\right) = \mathbf{M}\left(\gamma \sum_{j=2}^{n} \beta_j\right),$$

where

$$\beta_j = (\tau_j - M_j) \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k \vartheta_k. \qquad (j = 2, 3, \ldots, n).$$

The system $\{\beta_j\}$ is suborthonormal $(j = 2, 3, \ldots, n)$.

For, if $j \neq i$ and $j < i$, then $(\tau_i - M_i)$ is independent of all the random variables playing role in the product $\beta_j \beta_i$, and thus we have $\mathbf{M}(\beta_j \beta_i) = 0$.

On the other hand

$$\mathbf{M}(\beta_j^2) = \mathbf{M}((\tau_j - M_j)^2)\, \mathbf{M}\left(\left(\sum_{k=1}^{j=1} \alpha_k \vartheta_k\right)^2\right) \leqq D_j^2 S_n^2 < +\infty.$$

Thus applying the inequality of Cauchy and Bessel resp. we obtain

$$\left|\mathbf{M}\left(\gamma \sum_{j=2}^{n} \beta_j\right)\right| = \left|\sum_{j=2}^{n} \mathbf{M}\left(\gamma \frac{\beta_j}{\sqrt{\mathbf{M}(\beta_j^2)}} \sqrt{\mathbf{M}(\beta_j^2)}\right)\right| \leqq$$

$$\leqq \sqrt{\sum_{j=2}^{n} \mathbf{M}^2\left(\gamma \frac{\beta_j}{\sqrt{\mathbf{M}(\beta_j^2)}}\right) \sum_{j=2}^{n} \mathbf{M}(\beta_j^2)} \leqq \sqrt{\mathbf{M}(\gamma^2)} \sqrt{S_n^2 \sum_{j=1}^{n} D_j^2} \leqq \sqrt{\mathbf{P}(C)}\, S_n^2.$$

Taking into account this inequality we can write

$$\mathbf{M}(\gamma\,\vartheta_n^2) \geqq \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}(\gamma\alpha_k)\,\lambda^2 S_n^2 - 2\sqrt{\mathbf{P}(C)}\,S_n^2\,. \tag{17}$$

On the other hand according to Theorem 6 we have

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{M}(\gamma\sigma_n^2) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{M}(\sigma_n^2 \mid \gamma = 1)\,\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(C).$$

Thus there is an index $n_0 = n_0(C)$ such that if $n \geqq n_0$

$$\mathbf{M}(\gamma\sigma_n^2) \leqq \sqrt{\mathbf{P}(C)}$$

or

$$\mathbf{M}(\gamma\vartheta_n^2) \leqq S_n^2 \sqrt{\mathbf{P}(C)}\,. \tag{18}$$

Confering (17) with (18) we get the assertion.

Remark. Theorem 7 is in some sense an extension of the celebrated Kolmogorov inequality. Its deficiency however is that we postulate the convergence of the distribution functions $\mathbf{P}(\sigma_n < x)$ to a non-degenerate distribution function $F(x)$. This requirement is eliminated in a theorem of A. Rényi [5] but on the other hand the existence of the fourth moment of random variables τ_n is postulated in his theorem. We give here a generalized form of the theorem of A. Rényi, where only the existence of the $2+p$-adic (p is an arbitrary positive number) moment of the random variables τ_n is required.

Theorem 8. *Let $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ be independent random variables and suppose that their moment of order $2 + p$ (p is an arbitrary positive number) exists. Let further C be any event of positive probability. If M_i, S_n, λ denote the same quantities as in the preceding theorem then the following inequality holds for any $n = 1, 2, \ldots$*

$$\mathbf{P}\left(\max_{1\leqq k\leqq n}\left|\sum_{i=1}^{k}(\tau_i - M_i)\right| \geqq \lambda S_n,\ C\right) \leqq$$

$$\leqq \frac{\mathbf{P}(C)^{\frac{p}{2+p}}}{\lambda^2}\left[\frac{B_p \sum_{j=1}^{n}\left(|\tau_j - M_j|^{2+p}\right)^{\frac{2}{2+p}}}{S_n^2} + 2\right]$$

where B_p is a positive constant depending only on the parameter p.

The proof of this theorem can be performed in somewhat similar way as that of the theorem of A. Rényi.

§ 3. Proof of theorem 3

Let us consider the distribution function of the positive random variable λ. Given any $\varepsilon > 0$ we can choose a sufficiently small $a > 0$ and a sufficiently large $b > 0$ such that a and b are continuity points of the distribution function of λ and

$$\mathbf{P}(a \leqq \lambda < b) > 1 - \varepsilon\,.$$

Then taking into account that ν_n/n converges in probability to λ, there exists by virtue of Lemma 2 a positive integer n_0 such that for $n \geqq n_0$

$$\mathsf{P}\left(a \leqq \frac{\nu_n}{n} < b\right) > 1 - 2\varepsilon .$$

Denoting by A_n the event $a \leqq \frac{\nu_n}{n} < b$ we can write

$$\mathsf{P}(\eta_{\nu_n} < x) = \mathsf{P}(\eta_{\nu_n} < x,\ A_n) + \mathsf{P}(\eta_{\nu_n} < x,\ \bar{A}_n) .$$

The second member of the right-hand side is smaller than 2ε, and thus we have only to deal with the first member. Let us divide the interval $[a, b)$ into k subintervals by the points $a_1 < a_2 < \ldots < a_{k-1}$ $(a < a_1,\ a_{k-1} < b)$ and suppose that they are continuity points of the distribution function of λ. We introduce the following notations:

$$a_0 = a,\ a_k = b, \text{ and } A_n^{(i)} = \left\{a_{i-1} \leqq \frac{\nu_n}{n} < a_i\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, k) .$$

Then $\sum_{i=1}^{k} A_n^{(i)} = A_n$ and $A_n^{(i)} \cdot A_n^{(j)} = \bigcirc$, if $i \neq j$.

We can write

$$\mathsf{P}(\eta_{\nu_n} < x, A_n) = \sum_{i=1}^{k} \mathsf{P}(\eta_{\nu_n} < x, A_n^{(i)}). \tag{19}$$

We have clearly

$$\eta_{\nu_n} = \eta_{[na_{i-1}]} + \sqrt{\frac{[na_{i-1}]}{\nu_n}}\left(\frac{\zeta_{\nu_n} - \zeta_{[na_{i-1}]}}{\sqrt{[na_{i-1}]}}\right) + \eta_{[na_{i-1}]}\left(\sqrt{\frac{[na_{i-1}]}{\nu_n}} - 1\right) . \tag{20}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k) .$$

Let us denote by $C(n, k, i, \varrho)$ the event that

$$\left|\sqrt{\frac{[na_{i-1}]}{\nu_n}}\left(\frac{\zeta_{\nu_n} - \zeta_{[na_{i-1}]}}{\sqrt{[na_{i-1}]}}\right) + \eta_{[na_{i-1}]}\left(\sqrt{\frac{[na_{i-1}]}{\nu_n}} - 1\right)\right| < 2\varrho \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Let us choose the positive number ϱ such that the following inequality

$$|\Phi(x) - \Phi(x \pm 2\varrho)| < \varepsilon$$

be satisfied.

Let further the positive integer k be choosen such that

$$\frac{12\,(b - a)}{\varrho^2 \sqrt{k}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

be satisfied.

On the basis of (19) we can write

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(\eta_{\nu_n} < x, A_n) &= \sum_{i=1}^{k} \mathsf{P}(\eta_{\nu_n} < x, A_n^{(i)}, C(n, k, i, \varrho)) + \\ &+ \sum_{i=1}^{k} \mathsf{P}(\eta_{\nu_n} < x, A_n^{(i)}, \overline{C(n, k, i, \varrho)}) . \end{aligned} \tag{21}$$

Applying now the inequalities

$$\mathbf{P}(ABC) \geqq \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(AC) - \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A\overline{C}), \quad \text{and} \quad \mathbf{P}(AB) \leqq \mathbf{P}(A)$$

and taking into account (20) we have

$$\begin{aligned}(22)\quad &\sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(\eta_{[na_{i-1}]} < x - 2\varrho, A_n^{(i)}) - \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}\big(A_n^{(i)}, \overline{C(n,k,i,\varrho)}\big) \leqq \\ &\leqq \mathbf{P}(\eta_{\nu_n} < x, A_n) \leqq \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(\eta_{[na_{i-1}]} < x + 2\varrho, A_n^{(i)}) + \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}\big(A_n^{(i)}, \overline{C(n,k,i,\varrho)}\big).\end{aligned}$$

It follows from the consequence of Lemma 1 that for any $\varepsilon > 0$ there exists a positive integer n_1 $(n_1 \geqq n_0)$ such that if $A^{(i)}$ denotes the event $(a_{i-1} \leqq \lambda < a_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ then

$$(23)\qquad \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(A_n^{(i)} \circ A^{(i)}) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{if } n \geqq n_1.$$

Obviously we have for any three event

$$|\,\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(AC)\,| \leqq \mathbf{P}(B \circ C)$$

and thus for $n \geqq n_1$

$$\begin{aligned}(24)\quad &\sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(\eta_{[na_{i-1}]} < x \pm 2\varrho, A^{(i)}) - \varepsilon \leqq \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(\eta_{[na_{i-1}]} < x \pm 2\varrho, A_n^{(i)}) \leqq \\ &\leqq \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(\eta_{[na_{i-1}]} < x \pm 2\varrho, A^{(i)}) + \varepsilon.\end{aligned}$$

We obtain thus the following estimate for $\mathbf{P}(r_{\nu_n} < x, A_n)$

$$\begin{aligned}(25)\quad &\sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(\eta_{[na_{i-1}]} < x - 2\varrho, A^{(i)}) - \varepsilon - \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}\big(A_n^{(i)}, \overline{C(n,k,i,\varrho)}\big) \leqq \mathbf{P}(\eta_{\nu_n} < x, A_n) \leqq \\ &\leqq \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(\eta_{[na_{i-1}]} < x + 2\varrho, A^{(i)}) + \varepsilon + \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}\big(A_n^{(i)}, \overline{C(n,k,i,\varrho)}\big)\end{aligned}$$

if $n \geqq n_1$.
Since the distribution of random variables $\eta_{[na_{i-1}]}$ converges to (4), we have by Theorem 4

$$\begin{aligned}(26)\quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(\eta_{[na_{i-1}]} < x \pm 2\varrho, A^{(i)}) &= \Phi(x \pm 2\varrho) \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(A^{(i)}) = \\ &= \Phi(x \pm 2\varrho)\, \mathbf{P}(a \leqq \lambda < b)\end{aligned}$$

if k is the fixed integer.

This means that there exists a positive integer n_2 $(n_2 \geqq n_1)$ such that if $n \geqq n_2$,

$$\left| \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(\eta_{[na_{i-1}]} < x \pm 2\varrho, A^{(i)}) - \Phi(x \pm 2\varrho)\, \mathbf{P}(a \leqq \lambda < b) \right| < \varepsilon.$$

From this inequality and from (25) we have

$$\Phi(x-2\varrho)\,\mathsf{P}(a \leqq \lambda < b) - 2\varepsilon - \sum_{i=1}^{k} \mathsf{P}(A_n^{(i)}, \overline{C(n,k,i,\varrho)}) \leqq \mathsf{P}(\eta_{\nu_n} < x, A_n) \leqq$$
$$(27)\qquad \leqq \Phi(x+2\varrho)\,\mathsf{P}(a \leqq \lambda < b) + 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{k} \mathsf{P}(A_n^{(i)}, C(n,k,i,\varrho))$$

if $n \geqq n_2$. We have

$$\mathsf{P}(a \leqq \lambda < b) > 1 - \varepsilon$$

and thus for $n \geqq n_2$ and the chosen ϱ

$$\Phi(x) - 4\varepsilon - \sum_{i=1}^{k} \mathsf{P}(A_n^{(i)}, \overline{C(n,k,i,\varrho)}) \leqq \mathsf{P}(\eta_{\nu_n} < x, A_n) \leqq$$
$$(28)\qquad \leqq \Phi(x) + 3\varepsilon + \sum_{i=1}^{k} \mathsf{P}(A_n^{(i)}, \overline{C(n,k,i,\varrho)})\,.$$

The proof will be completed if we prove that for any $\varepsilon > 0$ there exists n_3 ($n_3 \geqq n_2$) such that for $n \geqq n_3$

$$\sum_{i=1}^{k} \mathsf{P}(A_n^{(i)}, \overline{C(n,k,i,\varrho)}) < \varepsilon\,.$$

For this purpose we remark that the following inequality holds

$$\mathsf{P}(A_n^{(i)}, \overline{C(n,k,i,\varrho)}) \leqq \mathsf{P}\left(A_n^{(i)}, \left|\sqrt{\frac{[na_{i-1}]}{\nu_n}}\left(\frac{\zeta_{\nu_n} - \zeta_{[na_{i-1}]}}{\sqrt{[na_{i-1}]}}\right)\right| \geqq \varrho\right) +$$
$$(29)\qquad + \mathsf{P}\left(A_n^{(i)}, \left|\eta_{[na_{i-1}]}\left(\sqrt{\frac{[na_{i-1}]}{\nu_n}} - 1\right)\right| \geqq \varrho\right).$$

First of all we remark that if the event $A_n^{(i)}$ takes place then

$$0 \leqq \sqrt{\frac{[na_{i-1}]}{\nu_n}} \leqq 1\,.$$

Thus we have only to estimate the sum of the probabilities

$$(30)\qquad \mathsf{P}\left(\left|\frac{\zeta_{\nu_n} - \zeta_{[na_{i-1}]}}{\sqrt{[na_{i-1}]}}\right| \geqq \varrho, A_n^{(i)}\right)$$

where ϱ is the fixed positive number, $(i = 1, 2, \ldots, k)$. It can be easily seen that (30) is smaller than

$$(31)\qquad \mathsf{P}\left(\max_{na_{i-1} \leqq l \leqq na_i}\left|\frac{\zeta_l - \zeta_{[na_{i-1}]}}{\sqrt{[na_{i-1}]}}\right| \geqq \varrho, A_n^{(i)}\right).$$

It follows from (31) by the aid of the inequality

$$|\mathsf{P}(AB) - \mathsf{P}(AC)| \leqq \mathsf{P}(B \circ C)$$

and by (23) that for $n \geqq n_3(\varepsilon)$

$$\sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}\left(\max_{na_{i-1} \leqq l \leqq na_i} \left| \frac{\zeta_l - \zeta_{[na_{i-1}]}}{\sqrt{[na_{i-1}]}} \right| \geqq \varrho, A_n^{(i)}\right) \leqq \tag{32}$$
$$\leqq \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}\left(\max_{na_{i-1} \leqq l \leqq na_i} \left| \frac{\zeta_l - \zeta_{[na_{i-1}]}}{\sqrt{[na_{i-1}]}} \right| \geqq \varrho, A^{(i)}\right) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Applying Theorem 7 to the terms of the right-hand side of (32) we obtain for $n \geqq n_4$ $(n_4 \geqq n_3)$

$$\mathbf{P}\left(\max_{na_{i-1} \leqq l \leqq na_i} \left| \frac{\zeta_l - \zeta_{[na_{i-1}]}}{\sqrt{[n(a_i - a_{i-1})]}} \right| \geqq \varrho \sqrt{\frac{[na_{i-1}]}{[n(a_i - a_{i-1})]}}, A^{(i)}\right) \leqq \tag{33}$$
$$\leqq 3 \sqrt{\mathbf{P}(A^{(i)})}\, \frac{[n(a_i - a_{i-1})]}{\varrho^2 [na_{i-1}]}.$$

Since the set of the continuity points of the distribution function of λ is everywhere dense, we can choose the points of subdivision such that for any $\delta > 0$

$$a_i - a_{i-1} = (b - a)\frac{1 + \varepsilon_i \delta}{k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

holds with some ε_i, $|\varepsilon_i| \leqq 1$.

Putting now this subdivision of $[a, b)$ we obtain from (33) the following inequality

$$\mathbf{P}\left(\max_{na_{i-1} \leqq l \leqq na_i} \left| \frac{\zeta_l - \zeta_{[na_{i-1}]}}{\sqrt{[na_{i-1}]}} \right| \geqq \varrho, A^{(i)}\right) \leqq 3 \sqrt{\mathbf{P}(A^{(i)})}\, \frac{n(b - a)}{\varrho^2 [na]} \frac{1 + \delta}{k}. \tag{34}$$

Let us choose $n_5 (n_5 \geqq n_4)$ such that for $n \geqq n_5$ the inequality

$$\frac{n}{[na]} < \frac{1}{a - \delta}$$

be satisfied.

Then (34) gives

$$\mathbf{P}\left(\max_{na_{i-1} \leqq l \leqq na_i} \left| \frac{\zeta_l - \zeta_{[na_{i-1}]}}{\sqrt{[na_{i-1}]}} \right| \geqq \varrho, A^{(i)}\right) \leqq \frac{K \sqrt{\mathbf{P}(A^{(i)})}}{\varrho^2 k} \tag{35}$$

where K is a positive constant independent of n. Substituting (35) in (32) we have for

$$\sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}\left(\max_{na_{i-1} \leqq l \leqq na_i} \left| \frac{\zeta_l - \zeta_{[na_{i-1}]}}{\sqrt{[na_{i-1}]}} \right| \geqq \varrho, A_n^{(i)}\right) \leqq \frac{K}{\varrho^2 k}\left(\sum_{i=1}^{k} \sqrt{\mathbf{P}(A^{(i)})}\right) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{36}$$

The cauchy inequality gives

$$\sum_{i=1}^{k} \sqrt{\mathbf{P}(A^{(i)})} \leqq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(A^{(i)})}\, \sqrt{k} \leqq \sqrt{k}.$$

Taking into account the choice of k and the preceding estimate we obtain for $n \geqq n_5$

$$\sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}\left(\max_{na_{i-1} \leqq l \leqq na_i} \left| \frac{\zeta_l - \zeta_{[na_{i-1}]}}{\sqrt{[na_{i-1}]}} \right| \geqq \varrho,\, A_n^{(i)} \right) \leqq \varepsilon . \tag{37}$$

Our next aim is to estimate the sum of the probabilities

$$\mathbf{P}\left(\left| \eta_{[na_{i-1}]} \left(\sqrt{\frac{[na_{i-1}]}{\nu_n}} - 1 \right) \right| \geqq \varrho,\, A_n^{(i)} \right), \qquad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{38}$$

Arguing again similarly as in the preceding estimation (37) we obtain that for $n \geq n_6$ $(n_6 \geq n_5)$ and for the chosen k

$$\sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}\left(\left| \eta_{[na_{i-1}]} \left(\sqrt{\frac{[na_{i-1}]}{\nu_n}} - 1 \right) \right| \geqq \varrho,\, A_n^{(i)} \right) \leq \varepsilon . \tag{38}$$

Confering now (28), (29), (37) and (38) we obtain the assertion of Theorem 3.

§ 4. Some additional remarks

It is easy to see that the above method of proof of Theorem 3 can be applied to the case also when the random variables ξ_k are not identically distributed, but are such that the distribution of the normed sums of random variables ξ_k tends to a non-degenerate limiting distribution. Especially the following generalization of Theorem 3 is valid.

Theorem 9. *Let $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ be a sequence of independent random variables with mean value* 0 *(this is not an essential restriction) and variance* Var $\xi_k = D_k$. *Let us denote by η_n the expression*

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{B_n}$$

where

$$B_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} D_k^2} .$$

Let us suppose that the distribution of η_n tends to a non-degenerate limiting distribution and that the sequence B_n is in the sense of Karamata *„slowly oscillating" i. e.*

$$B_n = n^{\alpha} L(n) , \qquad (\alpha > 0)$$

where for any $c > 0$, $L(cn)/L(n) \to 1$, if $n \to +\infty$. Let further ν_n be a sequence of positive integer-valued random variables such that $\frac{\nu_n}{n}$ converges in probability to λ. Then η_{ν_n} has the same limiting distribution as η_n.

The proof of this theorem can be performed in the same way as that of Theorem 3.

We remark also that the supposition that $\frac{\nu_n}{n}$ converges in probability to λ can be replaced by the more general supposition that $\frac{\nu_n}{\omega(n)}$ converges in probability to λ where $\omega(n)$ is an arbitrary positive function tending to infinity for $n \to +\infty$.

(Received October 20, 1961; in revised from August 10, 1962)

REFERENCES

[1] Anscombe, F. J.: „Large sample theory of sequential estimation". *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **48** (1952) 600.

[2] Rényi, A.: „On the central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables". *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **11** (1960) 97—102.

[3] Rényi, A.: „On the asymptotic distribution of the sum of a random number of independent random variables". *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **8** (1957) 193—199.

[4] Rényi, A.: „On mixing sequences of sets." *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **9** (1958) 215—228.

[5] Rényi, A.: „On Kolmogoroff's inequality." *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences* **6** (1961) Series A, 411—415.

[6] Mogyoródi, J.: „On limiting distributions for sums of a random number of independent random variables". *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences* **6** (1961) Series A, 365—371.

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СУММ СЛУЧАЙНОГО ЧИСЛА НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

J. MOGYORÓDI

Резюме

Доказывается следующая

Теорема 3. *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — *последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, с математическим ожиданием* 0 *и дисперсией* 1.

Если ν_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — *последовательность положительных целочисленных случайных величин, таких что* $\frac{\nu_n}{n}$ *стремится по вероятности к некоторой положительной случайной величине* λ, *то мы имеем:*

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_{\nu_n}}{\sqrt{\nu_n}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy .$$

Теорема 3 является обобщением результатов Anscombe-а [1], Rényi [2], [3] и автора [6]. Именно в работе Anscombe-а и автора предполагается, что $\frac{\nu_n}{n}$ стремится по вероятности к некоторой положительной константе, а в работах Rényi к некоторой положительной случайной величине λ, имеющей дискретное распределение.

Теорема 9, является легким обобщением Теоремы 3. Метод доказательства Теоремы 3 переносится почти тривиальным образом на доказательство Теоремы 9.

Теорема 3 доказывается с помощью Теоремы 7, которая основывается на следующей теореме:

Теорема 6. *Пусть $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$ последовательность независимых случайных величин с математическим ожиданием 0 и дисперсией $D_1, D_2, \ldots$, таких, что функция распределения $F_n(x)$ случайной величины*

$$\sigma_n = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n}{B_n} \qquad (B_n \to +\infty)$$

стремится к некоторой несобственной функции распределения $F(x)$. Пусть

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{M}(\sigma_n^2) = M, \quad (|M| < +\infty,\ M = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 d\,F(x))$$

то мы имеем для условных математических ожиданий

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{M}(\sigma_n^2 | A) = M,$$

где A — произвольное случайное событие, имеющее положительную вероятность.

Теорема 7. *Пусть $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин. Предполагается, что математическое ожидание $\mathbf{M}(\vartheta_i) = M_i$ и дисперсия $\mathbf{D}(\vartheta_i) = D_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ существуют для всех i.* Возьмем

$$\sigma_n = \frac{\vartheta_1 + \ldots + \vartheta_n - (M_1 + \ldots + M_n)}{S_n}$$

где

$$S_n = \sqrt{D_1^2 + \ldots + D_n^2}.$$

Предположим, что функция распределения $F_n(x)$ случайной величины σ_n стремится к некоторой несобственной функции распределения. Если C — случайное событие, имеющее положительную вероятность, то существует целое число $n_0 = n_0(C)$, такое что для чисел n, больших n_0 мы имеем:

$$\mathbf{P}\left(\max_{1\le k\le n} \left|\sum_{i=1}^{k} (\vartheta_i - M_i)\right| \geq \lambda S_n, C\right) \leq \frac{3\sqrt{P(C)}}{\lambda^2}$$

где λ произвольное положительное число.

ON RANDOM SETS

by

KATALIN BOGNÁR

P. ERDŐS raised the following combinatorial problem: Let $N(n)$ subsets of a set $\mathscr{H}$ of n elements be chosen at random, independently and so that at every choice any subset is chosen with the same probability $\frac{1}{2^n}$; how large must be $N(n)$ to ensure with probability near to 1 (as n tends to infinity) that among these $N(n)$ sets there is a pair such that one is a subset of the other.

A. RÉNYI [1] solved this problem and obtained (among others) the following results:

I. Let $P_n(N(n))$ denote the probability of the event that there exist among the $N(n)$ subsets chosen at random at least two, one being a subset of the other. Then for any fixed $c > 0$, if

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(n)}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n} = c\,,$$

then

$$\lim_{n\to\infty} P_n(N(n)) = 1 - e^{-c^2}. \tag{1}$$

II. Let γ_n denote the number of pairs of subsets A_i, A_j $(i < j)$ among the chosen sets $A_1, A_2, \ldots, A_{N(n)}$ such that $A_i \subseteq A_j$ or $A_j \subseteq A_i$.[1]

Suppose

$$N(n) \sim \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \omega(n) \quad ^{2}$$

where $\lim\limits_{n\to\infty} \omega(n) = \infty$, but $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\omega(n)} = 1$. Then for any fixed ε $(0 < \varepsilon < 1)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|\, \gamma_n - \omega^2(n)\,| < \omega(n)^{1+\varepsilon}) = 1\,.$$

($\mathbf{P}(\ldots)$ denotes the probability of the event in the brackets.)

---

[1] $A_1 \subseteq A_2$ denotes that A_1 is a subset of A_2, $A_1 + A_2$ denotes the union of the sets A_1, A_2, while A_1A_2 denotes the intersection of the sets A_1, A_2.

[2] The sign $\sim$ denotes asymptotic equality.

Rényi also obtained results (analogous to (1)) concerning other relations than $A_i \subseteq A_j$, namely

a) $\mathbf{A}_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_r$ (see theorem 6 of [1])

b) $A_3 = A_1 + A_2$ or $A_3 = A_1 A_2$ (see theorem 8 of [1]).

The generalization of this problem — raised by A. Rényi — is as follows: Let us choose at random $N(n, R) \overset{\text{def.}}{=} N$ subsets of a set $\mathscr{H}$ of n elements independently and so that at each choice any subset of $\mathscr{H}$ is chosen with the same probability, i.e. with probability $\frac{1}{2^n}$. Let be given an arbitrary relation

$$R(X_1, X_2, \ldots, X_r) \tag{2}$$

of r set variables, defined on subsets of $\mathscr{H}$, which can be expressed by Boolean operations and which can be fulfilled by r different subsets.[3] How large must be N and of what type must be the relation, that for sufficiently large n with probability near to 1 there should exist among these N subsets at least one r-tuple of sets, fulfilling the given relation?

This paper is devoted to this problem. After giving some notations, we shall prove a lemma concerning the probability that the relation R holds for a random r-tuple of sets (analogous to the lemma 2 of [1]). There will be given a class $\mathcal{R}$ of relations („regular" relations, see def. 1, (8)) such that if $R \in \mathcal{R}$ and if N is suitably chosen ($N \sim (C(R))^n \omega(n)$ where $C(R) > 1$ is a constant, depending only upon the relation R, and $\omega(n) \to \infty$ as $n \to \infty$), then there can be found among the N randomly chosen subsets of $\mathscr{H}$ with probability tending to 1 as $n \to \infty$ at least one r-tuple of sets for which the relation R holds. Our result is valid e.g. for the following relations:

$$R(A_1, A_2, A_3) \equiv A_1, A_2, A_3 \text{ are pairwise disjoint.}$$

$$R(A_1, A_2, A_3) \equiv (A_3 = \bar{A}_1 + \bar{A}_2) \qquad \text{etc.}$$

There will be given a class $\mathcal{R}_1 (\subset \mathcal{R})$ of relations („strictly regular" relations, see def. 1, (9)) such that if $R \in \mathcal{R}_1$ and if $N \sim c(C(R))^n$, where $c > 0$ fixed, then the probability that among the N randomly chosen subsets of $\mathscr{H}$ there can be found at least one r-tuple of sets, for which the relation R holds, tends to $1 - e^{-c^r}$ as $n \to \infty$.

It will be mentioned furthermore, that the „balancedness" of the relation (see def. 2) is a necessary condition of the relation R being fulfilled with positive probability by at least one r-tuple of sets of the N randomly chosen subsets if $N \sim c(C(R))^n$.

Notations. Let $X_1, X_2, \ldots, X_r$ be an ordered r-tuple of subsets of the set $\mathscr{H}$ of n elements. Let us consider all possible set-theoretical products of r factors such that the j-th factor is either equal to X_j or to $\bar{X}_j$ where $\bar{X}_j$ denotes the complementary set of X_j with respect to $\mathscr{H}$, and let us call these products *the atoms of the r set variables* $X_1, X_2, \ldots, X_r$, or simply: *atoms*. The number of possible atoms is obviously 2^r (some of them may be equal to 0, when for $X_1, X_2, \ldots, X_r$ some relation holds). Let these atoms be numbered in some way from 1 to 2^r, the m-th will be denoted by $E_m(X_1, X_2, \ldots, X_r)$.

[3] It will be said that the relation $R(X_1, X_2, \ldots, X_r)$ holds for $X_1^0, X_2^0, \ldots, X_r^0$ if $X_1^0, X_2^0, \ldots, X_r^0$ fulfill R in the given order.

(The numbering may be done e.g. as follows: let be

(3) $$E_{m+1}(X_1, X_2, \ldots, X_r) = X_1^{\delta_1} X_2^{\delta_2} \ldots X_r^{\delta_r}, \qquad (m = 0, 1, \ldots, 2^r - 1)$$

where

$$X_j^{\delta_j} = \begin{cases} X_j, & \text{if } \delta_j = 0 \\ \overline{X}_j, & \text{if } \delta_j = 1 \end{cases}$$

in case

$$m = \sum_{j=1}^{r} \delta_j 2^{j-1}$$

where δ_j equals 0 or 1. E.g. in case $r = 2$

$$E_1(X_1, X_2) = X_1 X_2 \,;\; E_2(X_1, X_2) = X_1 \overline{X}_2 \,;\; E_3(X_1, X_2) = \overline{X}_1, X_2 \,;$$
$$E_4(X_1, X_2) = \overline{X}_1, \overline{X}_2 \,.$$

It is well known ([2]), that any relation $R(X_1, X_2, \ldots, X_r)$ which may be expressed by Boolean operations, can be written in disjunctive normal form (in short: normal form), i.e. in the following form:

(4) $$\sum_{m \in \Gamma} E_m(X_1, X_2, \ldots, X_r) = \mathscr{H},$$

where Γ is a set of indices m. ($\Gamma \subset \{1, 2, \ldots, 2^r\}$). In other words, the normal form of R means that the following two conditions are equivalent:

(a) $$R(X_1, X_2, \ldots, X_r) \text{ holds,}$$

(b) $$\sum_{m \in \Gamma} E_m(X_1, X_2, \ldots, X_r) = \mathscr{H}.$$

Let the number $\nu(\Gamma)$ of elements in Γ be denoted by s, i.e. s is the number of atoms occurring in the normal form of R. Obviously $1 \leq s \leq 2^r$, and when the relation does not hold identically, then $s < 2^r$. As an example, let the relation $R(X_1, X_2, X_3)$ be the following:

$$R(X_1, X_2, X_3) \equiv X_1 + X_2 \subseteq X_3.$$

The normal form of this relation is:

$$X_1X_2X_3 + X_1\overline{X}_2X_3 + \overline{X}_1X_2X_3 + \overline{X}_1\overline{X}_2X_3 + \overline{X}_1\overline{X}_2\overline{X}_3 = \mathscr{H}.$$

Let $(i_1, i_2, \ldots, i_l)$ be an l-tuple ($l \leq r$) of the numbers $1, 2, \ldots, r$. Let us form from $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_l}$ all possible 2^l atoms. Let

(5) $$s_q(i_1, i_2, \ldots, i_l) \qquad (q = 1, 2, \ldots, 2^l)$$

denote the number of atoms occurring in the normal form of R, containing as component the atom $E_q(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_l})$.[4]

[4] For a given relation $R(X_1, X_2, \ldots, X_r)$, the number $s_q(i_1, i_2, \ldots, i_l)$ depends obviously only upon the serial number (in R) of the sets occurring in the atom $E_q(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_l})$ and not upon the sets themselves.

Obviously

$$0 \leqq s_q(i_1, i_2, \ldots, i_l) \leqq 2^{r-l},$$

and

$$\sum_{q=1}^{2^l} s_q(i_1, i_2, \ldots, i_l) = s. \tag{6}$$

Let us put further

$$\sum_{q=1}^{2^l} s_q^2(i_1, i_2, \ldots, i_l) \overset{\text{def.}}{=} S^2(i_1, i_2, \ldots, i_l). \tag{7}$$

Definition 1. If for the relation $R(X_1, X_2, \ldots, X_r)$

$$\underset{(i_1, i_2, \ldots, i_l)}{\text{Max}} S^2(i_1, i_2, \ldots, i_l) \leqq s^{2-\frac{l}{r}} \qquad (l = 1, 2, \ldots, r-1) \tag{8}$$

holds, $R(X_1, X_2, \ldots, X_r)$ will be called a *regular* relation. If for the relation $R(X_1, X_2, \ldots, X_r)$

$$\underset{(i_1, i_2, \ldots, i_l)}{\text{Max}} S^2(i_1, i_2, \ldots, i_l) < s^{2-\frac{l}{r}} \qquad (l = 1, 2, \ldots, r-1) \tag{9}$$

holds, $R(X_1, X_2, \ldots, X_r)$ will be called a *strictly regular* relation.

Examples. I. The relation

$$R(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_t};\ A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_t}) \equiv$$

$$\equiv A_{i_1} \subseteq A_{j_1} \text{ and } A_{i_2} \subseteq A_{j_2} \text{ and } \ldots \text{ and } A_{i_t} \subseteq A_{j_t}$$

is regular, but not strictly regular. Namely, it is easy to see, that $s = 3^t$ and

$$\underset{(h_1, h_2, \ldots h_{2l-1})}{\text{Max}} S^2(h_1, h_2, \ldots, h_{2l-1}) = 3^{l-1} \cdot 3^{(t-l)2} + 3^{l-1}(2.3^{t-l})^2 =$$

$$= 5.3^{2t-l-1} < 3^{t\left(2-\frac{2l-1}{2t}\right)};$$

further

$$\underset{(h_1, h_2, \ldots, h_{2l})}{\text{Max}} S^2(h_1, h_2, \ldots, h_{2l}) = 3^l(3^{t-l})^2 = 3^{t\left(2-\frac{2l}{2t}\right)}.$$

II. The following relations are strictly regular:

1. $R(A_1, A_2, A_3) \equiv A_1 + A_2 = A_3$, $\qquad (s = 4)$;
2. $R(A_1, A_2, A_3) \equiv A_3 \subseteq A_1 + A_2$, $\qquad (s = 7)$;
3. $R(A_1, A_2, A_3) \equiv A_1, A_2, A_3$ are pairwise disjoint, $(s = 4)$.

III. The relation

$$R(A_1, A_2, A_3, A_4) \equiv A_1 \subseteq A_2 \subseteq (A_3 + A_4) \qquad (s = 10)$$

is not regular.

Definition 2. Let $R_1(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_t})$ (where $t \leqq r$ and $(i_1, i_2, \ldots, i_t)$ is a t-tuple of the numbers $1, 2, \ldots, r$) and $R(X_1, X_2, \ldots, X_r)$ be two relations. We shall write

$$R_1(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_t}) \leqq R(X_1, X_2, \ldots, X_r),$$

if the relation $R_1(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_t})$ holds whenever $R(X_1, X_2, \ldots, X_r)$ holds; in this case we shall say, that $R_1(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_t})$ is a *subrelation* of the relation $R(X_1, X_2, \ldots, X_r)$. Let $K(R)$ denote for a relation R the number $1/\sqrt[r]{s}$ where r is the number of sets occurring in the relation R and s is the number of atoms in the normal form of the relation R. The number $K(R)$ will be called the *balance number* of the relation R.

A relation R is called *balanced*, if for any relation R_1 for which

$$R_1 \leqq R$$

holds, the corresponding balance numbers fulfil the inequality

$$K(R_1) \leqq K(R) .$$ [5]

Remark. If

$$\sum_{m \in \Gamma} E_m(X_1, X_2, \ldots, X_r) = \mathscr{H}$$

is the normal form of the relation $R(X_1, X_2, \ldots, X_r)$ of r variables, then the relation $R_1(X_1, X_2, \ldots, X_r)$, — the normal form of which is

$$\sum_{m \in \Gamma_1} E_m(X_1, X_2, \ldots, X_r) = \mathscr{H}$$

where $\Gamma \subseteq \Gamma_1$, — is a subrelation of R and all subrelations $R_1(X_1, X_2, \ldots, X_r)$ of $R(X_1, X_2, \ldots, X_r)$ can be obtained in this way.

Let $R_2(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_t})$ $(\{X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_t}\} \subset \{X_1, X_2, \ldots, X_r\})$ be any subrelation of R. The normal form of R_2 can be obtained as follows: we add atoms (of the r set variables $X_1, X_2, \ldots, X_r$) to the normal form of R until it is possible to bracket out all the atoms $E_q(X_{i_{t+1}}, X_{i_{t+2}}, \ldots, X_{i_r})$ $(q = 1, 2, \ldots, 2^{r-t})$ (here $X_{i_{t+1}}, X_{i_{t+2}}, \ldots, X_{i_r}$ are those of the sets $X_1, X_2, \ldots, X_r$ which are not contained among $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_t}$), i.e. until the normal form of R can be written in the form:

$$\sum_{q=1}^{2^{r-t}} E_q(X_{i_{t+1}}, X_{i_{t+2}}, \ldots, X_{i_r}) \sum_{m \in \Gamma_2} E_m(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_t}) = \mathscr{H}$$

where obviously the first factor is equal to $\mathscr{H}$. Thus we get a relation R^*:

$$\sum_{m \in \Gamma_2} E_m(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_t}) = \mathscr{H} ,$$

which clearly is a subrelation of R. Now evidently R_2 is a subrelation of R^* and thus R_2 can be obtained from R^* by eventually adding some atoms of the variables $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_t}$ to the normal form of R^*.

It can be easily shown that every regular relation is balanced. As a matter of fact if $R_1(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_t})$ is any subrelation of the regular relation

[5] The concept of a balanced relation is very similar to that of a balanced graph. (See [3], p. 22.).

$R(X_1, X_2, \ldots, X_r)$ where $1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_l \leqq r$, further if t denotes the number of atoms in the normal form of R_1 and s in that of R, we have evidently

$$t \geqq \sum_{\substack{s_q(i_1, i_2, \ldots, i_l) > 0 \\ (q=1,2,\ldots,2^l)}} 1 .$$

Thus by the inequality of Cauchy we obtain

$$s^2 = \left(\sum_{q=2}^{2^l} s_q(i_1, i_2, \ldots, i_l)\right)^2 = \left(\sum_{s_q(i_1, i_2, \ldots, i_l) > 0} s_q(i_1, i_2, \ldots, i_l)\right)^2 \leqq t \sum_{q=1}^{2^l} s_q^2(i_1, i_2, \ldots, i_l)$$

and therefore as R is by supposition regular we obtain

$$s^2 \leqq t s^{2 - \frac{l}{r}}$$

and thus

$$K(R_1) = \frac{1}{\sqrt[l]{t}} \leqq \frac{1}{\sqrt[r]{s}} = K(R) .$$

This proves our assertion.

On the other hand a balanced relation is not necessarily regular. For example the following relations are balanced, but not regular:

(1) $$R(A_1, A_2, A_3) \equiv (A_1 + A_2) \subseteq A_3 , \qquad (s = 5) ;$$

(2) $$R(A_1, A_2, A_3, A_4) \equiv (A_1 + A_2) \subseteq A_3 A_4 , \qquad (s = 7) .$$

To give an example of a relation which is not balanced, let us consider the relation

$$R_i(A_0, A_1, \ldots, A_{i-1}) \equiv A_0 \supseteq A_1 ; \; A_0 \supseteq A_2 ; \ldots ; \; A_0 \supseteq A_{i-1} .$$

$R_i(A_0, A_1, \ldots, A_{i-1})$ is not balanced if $i \geqq 4$.

As a matter of fact it is easy to see that for the balance number of R_i we have

$$K(R_i) = \frac{1}{\sqrt[i]{2^{i-1} + 1}} .$$

Further

$$R_1 \leqq R_2 \leqq \ldots \leqq R_{i-1} < R_i$$

holds, but among the numbers $K(R_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ $K(R_3)$ is the largest.

In the following we prove a lemma concerning the probability, that the given relation (2) holds for an r-tuple of subsets $A_1, A_2, \ldots, A_r$ of the set $\mathscr{H}$ chosen at random and independently in the above described sense.

Lemma.

(10) $$\mathbf{P}(R(A_1, A_2, \ldots, A_r) \text{ holds}) = \left(\frac{s}{2^r}\right)^n .$$

Proof. Let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ denote the elements of $\mathscr{H}$. Let be

$$\varepsilon_k(j) = \begin{cases} 1, & \text{if } a_k \in A_j \\ & \text{if } a_k \notin A \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} j = 1, 2, \ldots, r ; \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix} .$$

It is shown in [1] (lemma 1), that the random variables $\varepsilon_k(j)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ are independent and they take on the values 0 and 1 each with probability $\frac{1}{2}$. It is obvious that the random choice of a subset A_j corresponds to a sequence of n experiments for the random variables $\varepsilon_1(j), \varepsilon_2(j), \ldots, \varepsilon_n(j)$. The probability of any fixed result of such a sequence is equal to $\frac{1}{2^n}$. It is obvious furthermore, that the relation R holds if and only if a corresponding relation R_ε concerning the random variables $\varepsilon_k(1), \varepsilon_k(2), \ldots, \varepsilon_k(r)$ holds for $k = 1, 2, \ldots, n$. However the probability of the latter can be obtained — for a given k — by determining the number s' of sequences $\varepsilon_k(1), \varepsilon_k(2), \ldots, \varepsilon_k(r)$ for which the relation R_ε holds and dividing this number by 2^r (the number of all possible sequences of r elements each 0 or 1). On account of the above mentioned independence the probability that R_ε holds for every k, i.e. that R holds, is equal to $\left(\frac{s'}{2^r}\right)^n$. But $s' = s$, since the sequence $\varepsilon_k(1), \varepsilon_k(2), \ldots, \varepsilon_k(r)$ corresponds to the atom $A_1^{1-\varepsilon_k(1)} \cdot A_2^{1-\varepsilon_k(2)} \ldots A_r^{1-\varepsilon_k(r)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ of the normal form of R (see (3)), which proves the lemma.

Theorem 1. *Let* $\eta(R, N, n) \overset{\text{def.}}{=} \eta$ *denote the number of ordered r-tuples,* $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r}$ *among the randomly, independently chosen N subsets* $A_1, A_2 \ldots, A_N$ *of the set* $\mathscr{H}$ *of n elements, for which the relation* $R(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r})$ *holds. If the relation is regular* (see (8)), *and if*

$$N \sim \left(\frac{2}{\sqrt[r]{s}}\right)^n \sqrt[r]{\omega(n)} \tag{11}$$

where

$$\lim_{n\to\infty} \omega(n) = \infty,$$

then

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\eta = 0) = 0. \tag{12}$$

By other words, there exists, with probability tending to 1 *when n tends to infinity, at least one r-tuple of sets for which the relation R holds.*

Proof. Let us denote by $\mathbf{M}(\xi)$ resp. $\mathbf{D}^2(\xi)$ the mean value resp. variance of the random variable ξ. It is sufficient to prove that

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{D}^2(\eta)}{\mathbf{M}^2(\eta)} = 0, \tag{13}$$

since

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\eta = 0) &< \mathbf{P}\left(\eta < \frac{\mathbf{M}(\eta)}{2}\right) < \mathbf{P}\left(|\eta - \mathbf{M}(\eta)| \geq \frac{\mathbf{M}(\eta)}{2}\right) = \\ &= \mathbf{P}\left(|\eta - \mathbf{M}(\eta)| \geq \frac{\mathbf{M}(\eta)}{2\,\mathbf{D}(\eta)} \cdot \mathbf{D}(\eta)\right) \leq \frac{4\,\mathbf{D}^2(\eta)}{\mathbf{M}^2(\eta)}. \end{aligned} \tag{14}$$

The latter follows from Chebyshev's inequality. Hence from (13) and (14), we obtain (12). We prove (13).

Let us put

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \begin{cases} 1, \text{ if } R(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r}) \text{ holds} \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases} \tag{15}$$

Obviously

$$\eta = \sum_{\substack{1 \leq i_j \leq N \\ i_j \neq i_k \\ j=1,2,\ldots,r}} \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_r}, \tag{16}$$

(i.e. the summation runs over all ordered r-tuples from the integers $1, 2, \ldots, N$). We shall make use of the following asymptotical formula

$$\binom{M-k}{p} \sim \frac{M^p}{p!} \tag{17}$$

which is valid if $k \geqq 0, p \geqq 1$ are fixed integers, and $M \to +\infty$.

For the mean value of η we have from (16), (10), (17) and (11)

$$\mathbf{M}(\eta) = \binom{N}{r} r! \left(\frac{s}{2^r}\right)^n \sim \omega(n). \tag{18}$$

Now let us estimate the variance of η, making use of the identity:

$$\mathbf{D}^2(\eta) = \mathbf{M}(\eta^2) - \mathbf{M}^2(\eta). \tag{19}$$

Since by (15) $\mathbf{M}(\varepsilon^2_{i_1 i_2 \ldots i_r}) = \mathbf{M}(\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_r})$ and since

$$\mathbf{M}(\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_r} \cdot \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_r}) = \mathbf{M}(\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_r})\, \mathbf{M}(\varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_r})$$

in case $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ and $(j_1, j_2, \ldots, j_r)$ are disjoint (because of independence), thus we have

$$\mathbf{M}(\eta^2) = \mathbf{M}(\eta) + \sum_{\substack{i_h \neq j_k \\ (h,k=1,2,\ldots,r)}} \mathbf{M}(\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_r})\, \mathbf{M}(\varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_r}) + \sum{}' \mathbf{M}(\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_r} \cdot \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_r}) \tag{20}$$

where the sum $\sum'$ contains those terms $\mathbf{M}(\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_r}\, \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_r})$ for which some of the i_h-s are equal to some of the j_k-s. Since furthermore

$$\sum_{\substack{i_h \neq j_k \\ (h,k=1,2,\ldots,r)}} \mathbf{M}(\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_r})\, \mathbf{M}(\varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_r}) \leq \left(\sum_{\substack{1 \leq i_j \leq N \\ i_j \neq i_k \\ j=1,2,\ldots,r}} \mathbf{M}(\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_r}) \right)^2 = \mathbf{M}^2(\eta), \tag{21}$$

hence from (19), (20), (21) we have

$$\mathbf{D}^2(\eta) \leq \mathbf{M}(\eta) + \sum{}' \mathbf{M}(\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_r}\, \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_r}). \tag{22}$$

In order to verify (13), it will suffice according to (22) and (18), to show, that

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum' \mathbf{M}(\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_r} \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_r})}{\mathbf{M}^2(\eta)} = 0. \tag{23}$$

For this there will be needed to compute the probability that the relation R holds simultaneously for both of the r-tuples of subsets $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r}$ and $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_r}$ (i.e. $R(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r}) R(A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_r})$ holds) in case some of the indices $i_1, i_2, \ldots, i_r$ coincide with some of the indices $j_1, j_2, \ldots, j_r$. Let l $(l \leq r)$ denote the number of common elements of $i_1, i_2, \ldots, i_r$ and $j_1, j_2, \ldots, j_r$. Let us suppose e.g., that

$$(*) \qquad i_{h_t} = j_{k_t}, \quad t = 1, 2, \ldots, l; \ 1 \leq h_t, k_t \leq r .$$

The probability

$$\mathbf{P}(R(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r}) \, R(A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_r}) \text{ holds on condition } (*))$$

can be obtained according to lemma 1, by determining the number σ_l of atoms in the normal form of $R(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r}) \, R(A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_r})$. This normal form is obviously the product of the normal forms of $R(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r})$ and $R(A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_r})$. The latters can be written by condition (*) (bracketing out the common components, i.e. the components containing the sets $A_{i_{h_1}}, A_{i_{h_2}}, \ldots, A_{i_{h_l}}$) in the following form:

$$(24) \qquad \sum_{m=1}^{2^l} E_m(A_{i_{h_1}}, A_{i_{h_2}}, \ldots, A_{i_{h_l}}) \sum_{t \in \Gamma_{l,m}(h_1, h_2, \ldots, h_l)} E_t(A_{i_{h_{l+1}}}, A_{i_{h_{l+2}}}, \ldots, A_{i_{h_r}}),$$

resp.

$$(25) \qquad \sum_{m=1}^{2^l} E_m(A_{i_{h_1}}, A_{i_{h_2}}, \ldots, A_{i_{h_l}}) \sum_{t \in \Gamma_{l,m}(k_1, k_2, \ldots, k_l)} E_t(A_{j_{k_{l+1}}}, A_{j_{k_{l+2}}}, \ldots, A_{j_{k_r}}),$$

where[6]

$$\nu(\Gamma_{l,m}(h_1, h_2, \ldots, h_l)) = s_m(h_1, h_2, \ldots, h_l) ,$$

resp.

$$\nu(\Gamma_{l,m}(k_1, k_2, \ldots, k_l)) = s_m(k_1, k_2, \ldots, k_l) ,$$

(see (5)). Multiplying (24) by (25) we get non-zero members only when multiplying members which contain the same component $E_m(A_{i_{h_1}}, A_{i_{h_2}}, \ldots, A_{i_{h_l}})$. Hence for the number σ_l of atoms of the normal form of

$$R(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r}) \, R(A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_r})$$

(by (*)) we have:

$$(26) \qquad \sigma_l = \sum_{m=1}^{2^l} s_m(h_1, h_2, \ldots, h_l) \, s_m(k_1, k_2, \ldots, k_l), \qquad (l = 1, 2, \ldots, r)$$

and by lemma 1, we have

$$(27) \quad \mathbf{P}(R(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r}) \, R(A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_r}) \text{ holds on condition}(*)) = \left(\frac{\sigma_l}{2^{2r-l}}\right)^n$$

$$(l = 1, 2, \ldots, r) .$$

[6] $\nu(E)$ denotes — as before — the number of elements of the (finite) set E.

Hence

$$(28)\qquad \begin{aligned}\sum{}' \mathbf{M}(\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_r}\varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_r}) &= \sum_{l=1}^{r}\sum_{(*)}\left(\frac{\sigma_l}{2^{2r-l}}\right)^n = \\ &= \sum_{l=1}^{r-1}\frac{\binom{N}{l}\binom{N-l}{r-l}\binom{N-r}{r-l}r!^2}{2}\left(\frac{\sigma_l}{2^{2r-l}}\right)^n + \frac{\binom{N}{r}r!\,(r!-1)}{2}\left(\frac{\sigma_r}{2^r}\right)^n.\end{aligned}$$

According to (17) and (11), we have from (28)

$$(29)\qquad \begin{aligned}\sum{}' \mathbf{M}(\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_r}\varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_r}) \sim \sum_{l=1}^{r-1}\left(\frac{\sigma_l}{s^{2-\frac{l}{r}}}\right)^n \omega(n)^{2-\frac{l}{r}}\cdot\frac{r!^2}{2l!\,(r-l)!^2} + \\ + \left(\frac{\sigma_r}{s}\right)^n\omega(n)\,\frac{r!-1}{2}.\end{aligned}$$

According to Cauchy's inequality, by (7) and because of the regularity of the relation R, we have from (26)

$$(30)\qquad \begin{aligned}\sigma_l &\leqq S(h_1, h_2, \ldots, h_l)\,S(k_1, k_2, \ldots, k_l) \leqq \\ &\leqq \operatorname*{Max}_{(\varrho_1,\varrho_2,\ldots,\varrho_l)} S^2(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_l) \leqq s^{2-\frac{l}{r}}, \quad (l = 1, 2, \ldots, r-1)\end{aligned}$$

and

$$(31)\qquad \sigma_r \leqq s$$

is trivial. (23) follows immediately from (29), (30) and (31), which proves Theorem 1.

Theorem 2. *Let $P_n(N, R)$ denote the probability that among the randomly chosen N subsets $A_1, A_2, \ldots, A_N$ of the set $\mathcal{H}$ of n elements, there exists at least one ordered r-tuple of sets: $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r}$ for which the relation $R(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r})$ holds. If the relation is strictly regular* (see (9)) *and if*

$$(32)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{N}{\left(\frac{2}{\sqrt[r]{s}}\right)^n} = c \qquad (c > 0 \text{ fixed}),$$

then

$$(33)\qquad \lim_{n\to\infty} P_n(N, R) = 1 - e^{-c^r}.$$

We wish to remark, that the proof is very similar to that of Theorem 4 of [1], nevertheless for the sake of completeness it will be given in detail. The proof is based on the sieving theorem, given in [1], which makes use of a graph-theoretical lemma. We shall give here the lemma and the sieving theorem without proof; the proof can be found in [1].

A graph-theoretical lemma. (See [1], p. 89.). Let H be a finite set. N_H denotes the number of elements of a set H. H^2 denotes the set of all possible unordered pairs of different elements of H. If $N_H = m$, then obviously $N_{H^2} = \binom{m}{2}$. Let $E \subset H^2$ be any subset of H^2. The pair of sets $(H, E) = G$ is called a (finite) graph; the elements of H are called the *vertices* and the elements of E the *edges* of G. If V_i, V_j are vertices of G, and (V_i, V_j) is an edge of G, then it is said that V_i and V_j are connected by an edge in G. If $G = (H, E)$, we put $N_G = N_H$ and $M_G = N_E$.

Let A be a subset of H. Let the graph $AG \overset{\text{def.}}{=} (A, A^2E)$. If $M_{AG} = j$, then it is said that the set A contains j edges of G.

Put

$$N_G(j, \alpha) + \sum_{\substack{A \subset H \\ N_A = \alpha \\ M_{AG} \leqq j}} 1\,; \qquad N_G(j, 0) = 1\,.$$

By other words, $N_G(j, \alpha)$ is equal to the number of subsets of H which have α elements and contain not more than j edges of the graph G. Let further be

$$N_G^{(1)}(j, 2\,\alpha + 1) = \sum_{\beta=0}^{\alpha} N_G(j, 2\,\beta + 1)$$

and

$$N_G^{(0)}(j, 2\,\alpha) = \sum_{\beta=0}^{\alpha} N_G(j, 2\,\beta)\,.$$

Thus $N_G^{(1)}(j, m)$ (resp. $N_G^{(0)}(j, m)$) denotes the number of subsets of H which contain an odd (resp. even) number $\leqq m$ of elements of H and contain not more than j edges of G.

For any nonnegative integers α, β, put

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{if } \alpha = \beta\,, \\ 0, & \text{if } \alpha \neq \beta\,. \end{cases}$$

If $G = (H, E)$ is an arbitrary finite graph, $m = N_G$, then for any nonnegative integral value of α, the inequalities

$$N_G^{(0)}(1, 2\,\alpha + 2) - \delta_{m0} \geqq N_G^{(1)}(0, 2\,\alpha + 1)$$

and

$$N_G^{(1)}(1, 2\,\alpha + 1) \geqq N_G^{(0)}(0, 2\,\alpha) - \delta_{m0}$$

hold.

A sieving theorem. (See [1], pp. 91—92.) Let $\mathfrak{B}$ be a probability field, $B_1, B_2, \ldots, B_m$ arbitrary events. Let G be an arbitrary graph with m vertices. Let them be labelled and identified with the integers $1, 2, \ldots, m$. Let H be the set of the numbers $1, 2, \ldots, m$. Let $H^{(1)}$ denote the set of those subsets of H which contain no edges of G in case the number of their elements is even, and which contain at most one edge of G in case the number of their elements is odd. Let $H^{(0)}$ denote the set of those subsets of H which do not contain edges of G in case the number of their elements is odd, and which contain at most one edge of G in case the number of their elements is even.

Let be $S_0^{(1)} = 1$ and

$$S_\alpha^{(1)} = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_\alpha \leq m \\ (i_1, i_2, \ldots, i_\alpha) \in H^{(1)}}} \mathbf{P}(B_{i_1} B_{i_2} \ldots B_{i_\alpha}), \text{ if } \alpha = 1, 2, \ldots, m,$$

further $S_0^{(0)} = 1$ and

$$S_\alpha^{(0)} = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_\alpha \leq m \\ (i_1, i_2, \ldots, i_\alpha) \in H^{(0)}}} \mathbf{P}(B_{i_1} B_{i_2} \ldots B_{i_\alpha}), \text{ if } \alpha = 1, 2, \ldots, m.$$

Then the inequalities

$$\sum_{\alpha=0}^{2\beta+1} (-1)^\alpha S_\alpha^{(1)} \leq \mathbf{P}(\bar{B}_1 \bar{B}_2 \ldots \bar{B}_m) \leq \sum_{\alpha=0}^{2\beta} (-1)^\alpha S_\alpha^{(0)}, \quad (\beta = 0, 1, 2, \ldots) \tag{34}$$

hold.

Proof of theorem 2. Let $B(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ denote the event, that the relation R holds for the randomly chosen subsets $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r}$ (in this order). Then obviously

$$P_n(N, R) = \mathbf{P}\left(\sum_{\substack{1 \leq i_j \leq N \\ j=1,2,\ldots,r}} B(i_1, i_2, \ldots, i_r)\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\prod_{\substack{1 \leq i_j \leq N \\ j=1,2,\ldots,r}} \overline{B(i_1, i_2, \ldots, i_r)}\right). \tag{35}$$

Let us denote by Q the set of ordered different r-tuples[7] $(i_1, i_2, \ldots i_r)$, formed from the numbers $1, 2, \ldots, N$. Let the vertices of the graph G be the elements of Q and let the vertices $(i_1^{(\alpha_1)}, i_2^{(\alpha_1)}, \ldots, i_r^{(\alpha_1)})$ and $(i_1^{(\alpha_2)}, i_2^{(\alpha_2)}, \ldots, i_r^{(\alpha_2)})$ be connected if they are not disjoint, i.e. if $i_h^{(\alpha_1)} = i_k^{(\alpha_2)}$ for certain values of h resp. k. (Suppose

$$i_{h_1}^{(\alpha_1)} = i_{k_1}^{(\alpha_2)}, \ldots, i_{h_l}^{(\alpha_1)} = i_{k_l}^{(\alpha_2)} \qquad (l = 1, 2, \ldots, r).)$$

According to (34), the following inequalities hold:

$$\mathbf{P}\left(\prod_{\substack{1 \leq i_j \leq N \\ j=1,2,\ldots,r}} \overline{B(i_1, i_2, \ldots, i_r)}\right) \leq \sum_{\alpha=0}^{2\beta} (-1)^\alpha S_\alpha^{(0)} \quad (\beta = 0, 1, 2, \ldots) \tag{36}$$

and

$$\mathbf{P}\left(\prod_{\substack{1 \leq i_j \leq N \\ j=1,2,\ldots,r}} \overline{B(i_1, i_2, \ldots, i_r)}\right) \geq \sum_{\alpha=0}^{2\beta+1} (-1)^\alpha S_\alpha^{(1)} \quad (\beta = 0, 1, 2, \ldots). \tag{37}$$

The numbers $S_\alpha^{(0)}$ in (36) are defined as follows: $S_0^{(0)} = 1$; and

$$S_\alpha^{(0)} = \sum\nolimits^{(0)} \mathbf{P}\big(B(i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \ldots, i_r^{(1)})\, B(i_1^{(2)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_r^{(2)}) \ldots B(i_1^{(\alpha)}, i_2^{(\alpha)}, \ldots, i_r^{(\alpha)})\big),$$
$$\alpha = 1, 2, \ldots$$

[7] Two r-tuples, $(i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \ldots, i_r^{(1)}$ and $(i_1^{(2)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_r^{(2)})$ are not different, if for the corresponding sets $A_{i_1^{(1)}}, A_{i_2^{(1)}}, \ldots, A_{i_r^{(1)}}$ and $A_{i_1^{(2)}}, A_{i_2^{(2)}}, \ldots, A_{i_r^{(2)}}$ the normal form of $R(A_{i_1^{(1)}}, A_{i_2^{(1)}}, \ldots, A_{i_r^{(1)}})$ and $R(A_{i_1^{(2)}}, A_{i_2^{(2)}}, \ldots, A_{i_r^{(2)}})$ contain the same atoms.

where the summation in $\sum^{(0)}$ is taken over all combinations of order α chosen of different r-tuples $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ $(1 \leq i_j \leq N; j = 1, 2, \ldots, r)$ such that the r-tuples $(i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \ldots, i_r^{(1)}), (i_1^{(2)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_r^{(2)}), \ldots, (i_1^{(\alpha)}, i_2^{(\alpha)}, \ldots, i_r^{(\alpha)})$ are all disjoint in case α is odd, while at most two r-tuples have common elements (say l $(l = 1, 2, \ldots, r)$) in case α is even.

The numbers $S_\alpha^{(1)}$ in (37) are defined as follows: $S_0^{(1)}, = 1$; and

$$S_\alpha^{(1)} = \sum^{(1)} \mathbf{P}\left(B(i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \ldots, i_r^{(1)})\, B(i_1^{(2)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_r^{(2)}) \ldots B(i_1^{(\alpha)}, i_2^{(\alpha)}, \ldots, i_r^{(\alpha)})\right), \qquad \alpha = 1, 2, \ldots$$

where the summation in $\sum^{(1)}$ is taken over all combinations of order α chosen of different r-tuples $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ such that the r-tuples $(i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \ldots, i_r^{(1)})$, $(i_1^{(2)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_r^{(2)}), \ldots, (i_1^{(\alpha)}, i_2^{(\alpha)}, \ldots, i_r^{(\alpha)})$ are all disjoint in case α is even, while at most two r-tuples have common elements in case α is odd.

According to lemma 1,

$$\mathbf{P}(B(i_1, i_2, \ldots, i_r)) = \left(\frac{s}{2^r}\right)^n, \tag{38}$$

hence

$$S_{2\varrho+1}^{(0)} = \frac{\binom{N}{r} r! \binom{N-r}{r} r! \ldots \binom{N-2\varrho r}{r} r!}{(2\varrho+1)!} \left(\frac{s}{2^r}\right)^{n(2\varrho+1)}; \tag{39}$$

$$S_{2\varrho}^{(1)} = \frac{\binom{N}{r} r! \binom{N-r}{r} r! \ldots \binom{N-2\varrho r+r}{r} r!}{(2\varrho)!} \left(\frac{s}{2^r}\right)^{n2\varrho}. \tag{40}$$

Further

$$S_{2\varrho}^{(0)} = \frac{\binom{N}{r} r! \binom{N-r}{r} r! \ldots \binom{N-2\varrho r+r}{r} r!}{(2\varrho)!} \left(\frac{s}{2^r}\right)^{n2\varrho} + R_{2\varrho}^{(0)} \tag{41}$$

where

$$R_{2\varrho}^{(0)} = \sum{}^* \mathbf{P}\left(B(i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \ldots, i_r^{(1)})\, B(i_1^{(2)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_r^{(2)}) \ldots B(i_1^{(2\varrho)}, i_2^{(2\varrho)}, \ldots, i_r^{(2\varrho)})\right).$$

In $\sum^*$ the summation is taken over all combinations of order 2ϱ chosen of different r-tuples $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ such that among the r-tuples $(i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \ldots, i_r^{(1)})$, $(i_1^{(2)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_r^{(2)}), \ldots, (i_1^{(2\varrho)}, i_2^{(2\varrho)}, \ldots, i_r^{(2\varrho)})$ there are exactly two, which are not disjoint. Let these two r-tuples (containing l elements in common $(l = 1, 2, \ldots, r)$) be $(i_1^{(\varrho_1)}, i_2^{(\varrho_1)}, \ldots, i_r^{(\varrho_1)})$ and $(i_1^{(\varrho_2)}, i_2^{(\varrho_2)}, \ldots, i_r^{(\varrho_2)})$, and suppose, that

$$i_{h_j}^{(\varrho_1)} = i_{k_j}^{(\varrho_2)}, \qquad j = 1, 2, \ldots, l;\ 1 \leq h_j, k_j \leq r;\ 1 \leq \varrho_1 < \varrho_2 \leq 2\varrho. \tag{**}$$

According to a previous consideration (see (27))

$$\mathbf{P}\left(B(i_1^{(\varrho_1)}, i_2^{(\varrho_1)}, \ldots, i_r^{(\varrho_1)})\, B(i_1^{(\varrho_2)}, i_2^{(\varrho_2)}, \ldots, i_r^{(\varrho_2)}) \text{ on condition } (**)\right) = \left(\frac{\sigma_l}{2^{2r-l}}\right)^n \tag{42}$$

where for σ_l it follows from (26), (30) and from the condition that the relation is strictly regular:

$$\sigma_l = \sum_{m=1}^{2^l} s_m(h_1, h_2, \ldots, h_l)\, s_m(k_1, k_2, \ldots, k_l) \leqq \tag{43}$$
$$\leqq \operatorname*{Max}_{h_1, h_2, \ldots, h_l} S^2(h_1, h_2, \ldots, h_l) < s^{2-\frac{l}{r}} \quad (l = 1, 2, \ldots, r-1)$$

and it is easy to see, that

$$\sigma_r < s\,. \tag{44}$$

Hence by (38) and (42) we have:

$$R_{2\varrho}^{(0)} \leqq \sum_{l=1}^{r-1} \frac{\binom{N}{l}\binom{N-l}{r-l}\binom{N-r}{r-l} r!^2}{2} \times$$
$$\times \frac{\binom{N-2r+l}{r} r! \binom{N-3r+l}{r} r! \ldots \binom{N+l+r-2\varrho r}{r} r!}{(2\varrho-2)!} \left(\frac{s}{2^r}\right)^{n(2\varrho-2)} \cdot \left(\frac{\sigma_l}{2^{2r-l}}\right)^n +$$
$$+ \frac{\binom{N}{r} r!\,(r!-1)}{2} \frac{\binom{N-r}{r} r! \binom{N-2r}{r} r! \ldots \binom{N-(2\varrho-2)r}{r} r!}{(2\varrho-2)!} \cdot \left(\frac{s}{2^r}\right)^{n(2\varrho-2)} \left(\frac{\sigma_r}{2^r}\right)^n . \tag{45}$$

Let now be $N \sim c\left(\frac{2}{\sqrt[r]{s}}\right)^n$, then using again (17), the right hand side of (45) is asymptotically equal to

$$\sum_{l=1}^{r-1} \frac{r!^2 N^{2\varrho r-l}}{2\, l!\, (r-l)!^2 (2\varrho-2)!} \left(\frac{s}{2^r}\right)^{n(2\varrho-2)} \cdot \left(\frac{\sigma_l}{2^{2r-l}}\right)^n +$$
$$+ \frac{(r!-1) N^{(2\varrho-1)r}}{2(2\varrho-2)!} \left(\frac{s}{2^r}\right)^{n(2\varrho-2)} \cdot \left(\frac{\sigma^r}{2^r}\right)^n \sim \sum_{l=1}^{r-1} \frac{r!^2 c^{2\varrho r-l}}{2\, l!\, (r-l)!^2 (2\varrho-2)!} \cdot \left(\frac{\sigma_l}{s^{2-\frac{l}{r}}}\right)^n +$$
$$+ \frac{c^{(2\varrho-1)r}(r!-1)}{2(2\varrho-2)!} \cdot \left(\frac{\sigma_r}{s}\right)^n ,$$

from which it follows according to (43) and (44), that

$$R_{2\varrho}^{(0)} \to 0, \quad \text{if} \quad n \to \infty. \tag{46}$$

Furthermore we have

$$S_{2\varrho+1}^{(1)} = \frac{\binom{N}{r} r! \binom{N-r}{r} r! \ldots \binom{N-2\varrho r}{r} r!}{(2\varrho+1)!} \cdot \left(\frac{s}{2^r}\right)^{n(2\varrho+1)} + R_{2\varrho+1}^{(1)} \tag{47}$$

where

$$R^{(1)}_{2\varrho+1} = \sum{}^* \mathbf{P}\left(B(i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \ldots, i_r^{(1)})\, B(i_1^{(2)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_r^{(2)}) \ldots B(i_1^{(2\varrho+1)}, i_2^{(2\varrho+1)}, \ldots, i_r^{(2\varrho+1)})\right).$$

In $\sum^*$ the summation is taken over all combinations of order $2\varrho+1$, chosen from different r-tuples $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ in such a way that among the r-tuples $(i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \ldots, i_r^{(1)})$, $(i_1^{(2)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_r^{(2)})$, $\ldots$, $(i_1^{(2\varrho+1)}, i_2^{(2\varrho+1)}, \ldots, i_r^{(2\varrho+1)})$ there are exactly two, which are not disjoint. Similarly we have

$$R^{(1)}_{2\varrho+1} \to 0, \quad \text{if} \quad n \to \infty\,. \tag{48}$$

Hence from formulae (39), (40), (41), (47) it is easy to obtain by means of (46) and (48), that

$$S_j^{(0)} = \frac{c^{rj}}{j!} + o(1) \qquad (j = 0, 1, \ldots) \tag{49}$$

and

$$S_j^{(1)} = \frac{c^{rj}}{j!} + o(1) \qquad (j = 0, 1, \ldots) \tag{50}$$

where $o(1) \to 0$, if $n \to \infty$; and from (49) — (50) by (35) — (37), our statement (33) follows.

We have seen that if R is a relation among r sets, the normal form of which contains s atoms, the regularity of the relation is a sufficient condition for

$$\lim_{n\to\infty} P_n\left(c\left(\frac{2}{\sqrt[r]{s}}\right)^n, R\right) > 0 \tag{51}$$

for any $c > 0$. We shall show now, that the balancedness of R is necessary condition for the validity of (51).

Theorem 3. *Let R be a relation among r sets, the normal form of which contains s atoms. In order that* (51) *should hold, the relation R has to be balanced.*

Proof. Let R_1 be a subrelation of R among $r_1 < r$ sets such that the normal form of R_1 contains s_1 elements, and $\frac{1}{\sqrt[r_1]{s_1}} > \frac{1}{\sqrt[r]{s}}$. It follows from (51) that if we choose $N \sim c\left(\frac{2}{\sqrt[r]{s}}\right)^n$ subsets of a set having n elements at random, there exists with probability $\geq p > 0$ at least one ordered r-tuple of these sets for which the relation R holds. Then it is obvious that there must exist with probability $\geq p$ at least one r_1-tuple of the N sets $(r_1 < r)$ for which the relation R_1 holds.

On the other hand,

$$P_n(N, R_1) \leq \mathbf{M}(\eta_1)$$

where η_1 denotes the number of r_1-tuples among the N sets for which R_1 holds; as further by (18) we have

$$\mathbf{M}(\eta_1) \sim N^{r_1}\left(\frac{s_1}{2^{r_1}}\right)^n \sim c^{r_1}\left(\frac{\sqrt[r_1]{s_1}}{\sqrt[r]{s}}\right)^{nr_1}$$

and thus $\mathbf{M}(\eta_1) \to 0$ for $n \to \infty$. Thus we obtained a contradiction, which proves theorem 3.

Let us mention that theorem 3 contains a second proof of the fact, mentioned earlier, that every regular relation is balanced.

I wish to express my thanks to Professor A. RÉYYI for his helpful suggestions and valuable advices.

(Received July 13, 1962)

REFERENCES

[1] RÉNYI, A.: „Egy általános módszer valószínűségszámítási tételek bizonyítására és annak néhány alkalmazása." *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei* **11** (1961) 79–105.

[2] BIRKHOFF, G.: *Lattice theory.* New York, 1948.

[3] ERDŐS, P.—RÉNYI, A.: „On the evolution of random graphs." *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **5** (1960) 17–61.

О СЛУЧАЙНЫХ МНОЖЕСТВАХ

KATALIN BOGNÁR

Резюме

В статье автор занимается со следующей проблемой от А. RÉNYI (в частном случае от P. ERDŐS) (см. [1]):

Пусть $\mathscr{H}$ множество из n элементов. Пусть $R(X_1, X_2, \ldots, X_r)$ любая реляция от r величин, определенная на подмножествах $\mathscr{H}$, выражаемая с помощью булевых операций и выполняемая и через r различных подмножеств. Выребем случайно, независимо друг от друга и с равной вероятностью $N(n, R) \overset{\text{def.}}{=} N$ подмножеств множества $\mathscr{H}$. При каких N и которых типах реляций существует, с вероятностью близкой к 1 при достаточно больших n, хотя бы одна r-адка множеств из этих N подмножеств, удовлетворяющая данной реляции?

Указывается класс $\mathscr{R}$ реляций («регулярные реляции», см. опр. 1, (8)) такой, что для $R \in \mathscr{R}$ и подходящего N $\left(N \sim (C(R))^n \omega(n), \text{ где } C(R) > 1\right.$ — некоторая постоянная, зависящая только от реляции R; $\omega(n) \to \infty$, если $\left.n \to \infty\right)$ между N выбранными случайно подмножествами $\mathscr{H}$ найдётся с вероятностью, сходящейся к 1 при $n \to \infty$, хотя бы одна r-адка множеств, выполняющая реляцию R. (Теорема 1.)

Далее указывается класс $\mathscr{R}_1 (\subset \mathscr{R})$ реляций («строго регулярные» реляции, см. опр. 1, (9)) такой, что для $R \in \mathscr{R}_1$ и $N \sim c(C(R))^n$ ($c > 0$ — зафиксированное число) вероятность того, что между N случайно выбранными подмножеств $\mathscr{H}$ найдётся хотя бы одна r-адка множеств, удовлетворяющая реляции R, стремится к $1 - e^{-c^r}$ при $n \to \infty$. (Теорема 2.)

SOME EXTREMAL PROBLEMS ON INFINITE GRAPHS

by

J. CZIPSZER, P. ERDŐS and A. HAJNAL

1. A well known theorem of TURÁN ([1]) states that every graph $G^{(n)}_{f(k,n)+1}$ of n vertices and $f(k, n) + 1$ edges where

$$f(k, n) = \frac{k-2}{2(k-1)}(n^2 - r^2) + \binom{r}{2}, \quad n = (k-1)t + r, \ 0 \leq r < k-1$$

contains a complete k-gon and that this theorem is best possible since there are graphs $G^{(n)}_{f(k.n)}$ not containing complete k-gons, and in fact the structure of these graphs is uniquely determined.

Some problems in measure and set theory led us to consider the following problems. Let the vertices of the infinite graph $G^{(\infty)}$ be the integers $1, 2, \ldots, n, \ldots$. (In what follows $G^{(\infty)}$ will always denote such a graph.) Denote by $G^{(n)}$ the subgraph of $G^{(\infty)}$ spanned by the vertices $1, 2, \ldots, n$ and by $g(n)$ the number of edges of $G^{(n)}$. At first thought it seemed possible that if $g(n)$ is "large" for all $n > n_0$ then this will imply that $G^{(\infty)}$ contains a complete k-gon even though $g(n)$ does not have to be as large as $f(k, n)$. But it is easy to see that no such theorem can hold. To see this let the edges of $G^{(\infty)}$ be (i, j): i odd, j even. Clearly $g(n) = f(3, n)$ for every n and nevertheless $G^{(\infty)}$ does not contain a triangle. Nevertheless it will be possible to obtain using our function $g(n)$ some results which do not seem uninteresting to us. First some definitions: By an I_k-path (increasing path of length k) of $G^{(\infty)}$ (or of a finite graph with vertices $1, 2, \ldots, n$) we shall mean a path $i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}$ $(i_1 < i_2 < \ldots < i_k < i_{k+1})$. A path of length k will denote an ordinary path of k edges. Clearly if $G^{(\infty)}$ contains a complete graph of $k+1$ vertices it also contains an I_k-path, but the converse is not true.

By an I_∞-path of $G^{(\infty)}$ we shall mean an infinite path $i_1 i_2 \ldots i_n \ldots$ where $i_1 < i_2 < \ldots < i_n < \ldots$.

ERDŐS and GALLAI [1] found nearly best possible estimates for the smallest integer $h_k(n)$ for which every $G^{(n)}_{h_k(n)+1}$ will contain a path of length k, but these results will not concern us here. It is easy to see that there is a graph with vertices $1, 2, \ldots, n$ and with $f(k + 1, n)$ edges which does not contain an I_k-path. To see this it suffices to consider TURÁN's well known graph $G^{(n)}_{f(k+1,n)}$ and enumerate its vertices in an obvious way. Nevertheless the situation changes completely if we assume a suitable lower bound for $g(n)$ which holds for all sufficiently large n. In fact we shall prove

Theorem I. *Let $G^{(\infty)}$ be a graph and assume that for all $n > n_0$ and an $\varepsilon > 0$*

$$g(n) > \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4k} + \varepsilon\right) n^2 \tag{1.1}$$

where $k = 2$ or $k = 3$.
Then $G^{(\infty)}$ contains infinitely many I_k-paths.

The theorem holds perhaps for $k > 3$ also, but at present we can not decide this question.

Remarks. Since $f(k+1, n) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right) n^2 + O(1)$ for $n \to \infty$ our theorem implies that if $k = 2$ or $3, g(n) > \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) f(k+1, n)$ for all $n < n_0$ then $G^{(\infty)}$ must already contain infinitely many I_k-paths.

It is easy to see that our theorem is best possible.

To see this define $G^{(\infty)}$ as follows: Let m_1 and m_2 $(m_1 < m_2)$ be two vertices of $G^{(\infty)}$. m_1 and m_2 are connected if and only if $1 \leqq i_1 < i_2 \leqq k$ where $m_1 \equiv i_1 \pmod{k}$ and $m_2 \equiv i_2 \pmod{k}$. It is easy to see that for our $G^{(\infty)}$

$$g(n) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{k}\right) n^2 + O(n)$$

and it clearly does not contain an I_k-path. In fact we shall prove the following sharper

Theorem II. *Let $G^{(\infty)}$ be a graph for which*

$$g(n) > \frac{n^2}{8} + \left(\frac{1}{32} + \varepsilon\right)\frac{n^2}{\log^2 n} \quad \text{if} \quad n > n_0 .$$

Then $G^{(\infty)}$ contains infinitely many I_2-paths. The result is best possible since there exists a $G^{(\infty)}$ for which

$$g(n) > \frac{n^2}{8} + \frac{1}{32}\frac{n^2}{\log^2 n} + o\left(\frac{n^2}{\log^2 n}\right)$$

and which does not contain any I_2-path.

By the same method as used in the proof of Theorem II we can prove the following theorem: Assume that for $n > n_0$

$$g(n) > \frac{n^2}{8} + \left(\frac{1}{32} + \varepsilon\right)\frac{n^2}{\log^2 n}$$

Then $G^{(\infty)}$ contains infinitely many pairs of I_2-paths whose first and last endpoints coincide, i.e. it contains infinitely many quadruplets $i_1 < i_2 < i_4$, $i_1 < i_3 < i_4$ $(i_2 \neq i_3)$ and the edges $(i_1, i_2), (i_1, i_3), (i_2, i_4), (i_3, i_4)$. We do not discuss the proof. By induction we can easily prove the following Turánian theorem (see [1]): If G is a graph with vertices $1, 2, \ldots, n$ and $\left[\frac{n^2}{4}\right] + \left[\frac{n-1}{2}\right] + 1$ edges then G contains two I_2-paths whose first and last endpoints coincide. The estimation for the number of edges is best possible.

Theorem III. *Let $G^{(\infty)}$ be such that*

$$g(n) \geqq \frac{1}{4} n^2 - Cn . \tag{1.2}$$

Then $G^{(\infty)}$ contains an infinite path. This result is best possible in the sense that C can not be replaced by $A(n)$ where $A(n) \to \infty$.

It seemed to us likely that $g(n) > \left(\frac{1}{4} + \varepsilon\right) n^2$ will also imply the existence of an I_∞-path. But this is not the case. In fact we have

Theorem IV. *There exists a $G^{(\infty)}$ with*

$$\lim\inf \frac{g(n)}{n^2} > \frac{1}{4}$$

which does not contain an I_∞-path. But there exists a constant $\alpha > 0$ such that every $G^{(\infty)}$ with

$$\lim\inf \frac{g(n)}{n^2} > \frac{1}{2} - \alpha$$

contains an I_∞-path.

VERA T. SÓS asked the question: What condition on $g(n)$ will imply that $G^{(\infty)}$ should contain an infinite complete subgraph? We prove

Theorem V. *If $g(n) > \frac{n^2}{2} - Cn$ for infinitely many n then $G^{(\infty)}$ contains an infinite complete subgraph. But if we only assume that*

$$g(n) > \frac{n^2}{2} - f(n)\, n \tag{1.3}$$

for all n where $f(n)$ tends to infinity as slowly as we please then $G^{(\infty)}$ does not have to contain an infinite complete graph.

At present we can not answer the following question: Let G be any infinite graph every vertex of which is incident only to a finite number of edges what has to be assumed about $g(n)$ to make sure that $G^{(\infty)}$ should contain a subgraph isomorphic to G? In fact we get two problems here depending whether we require the vertices of G to be ordered or not. Our example used in the proof of the negative part of Theorem V (cf. § 5.) shows that we have to assume that every vertex of G has finite valency.

Without proof we state a few results connected with Theorem V. Assume that $g(n) > \binom{n}{2} - (1 - \alpha)n$ for every $n > n_0$ and some $\alpha > 0$, then $G^{(\infty)}$ contains an infinite complete graph whose vertices form a sequence of positive lower density. If we only assume $g(n) > \binom{n}{2} - n + o(n)$ it is easy to see that this does not have to remain true. If we only assume that $g(n) > \binom{n}{2} - Cn$ for infinitely many n and some C then $G^{(\infty)}$ contains an infinite complete graph whose vertices form a sequence of positive upper density. In fact the following stronger result holds: To every $\varepsilon > 0$ there exists a k so that $G^{(\infty)}$ contains k complete graphs the union of the set of their vertices forms a sequence of upper density $> 1 - \varepsilon$. Finally if we assume that $g(n) > \binom{n}{2} - Cn$ for every n and some C then to every $\varepsilon > 0$ there exists a k so that $G^{(\infty)}$ contains k complete graphs, the union of the set of their vertices forms a sequence of lower density $> 1 - \varepsilon$. We leave the proof of these statements to the reader.

2. Proof of Theorem I for $k = 2$. We shall show that if $G^{(\infty)}$ contains only finitely many I_2-paths then

$$\liminf \frac{g(n)}{n^2} \leqq \frac{1}{8} \tag{2.1}$$

which contradicts (1.1) for $k = 2$. Omitting a finite number of edges we can assume that $G^{(\infty)}$ does not contain any I_2-path. Then if a vertex u is the upper endpoint of an edge it can not be the lower endpoint of another edge. Denote by $u_1 < u_2 < \ldots$ the vertices which are not lower endpoints of any edge. Clearly the u_n sequence is infinite and two u_n are never connected. Hence

$$g(n) \leqq \sum_{u_k \leqq n} (u_k - k).$$

Now we establish a lemma which belongs to the theory of series and which clearly implies (2.1).

Lemma. *If* $u_1, u_2, \ldots$ *is a sequence with positive terms then*

$$\liminf \frac{u_1 + \ldots + u_n - \frac{n^2}{2}}{u_n^2} \leqq \frac{1}{8}. \tag{2.2}$$

Put $\limsup \frac{u_n}{n} = c$. If $c = 0$, (2.2) obviously holds. If $0 < c < \infty$ we choose a sequence u_{n_s} for which

$$\lim \frac{u_{n_s}}{n_s} = c.$$

Then

$$\sum_1^{n_s} u_k - \frac{n_s^2}{2} \leqq \sum_1^{n_s} ck - \frac{n_s^2}{2} + o(n_s^2) = (c-1)\frac{n_s^2}{2} + o(n_s^2),$$

and

$$\frac{\sum_1^{n_s} u_k - \frac{n_s^2}{2}}{u_{n_s}^2} \leqq \frac{c-1}{2c^2} + o(1) \leqq \frac{1}{8} + o(1), \tag{2.3}$$

which proves (2.2).

Finally if $c = \infty$, we choose a sequence u_{n_s} such that

$$\frac{u_k}{k} \leqq \frac{u_{n_s}}{n_s} \quad (1 \leqq k \leqq n_s) \quad \text{and} \quad \frac{u_{n_s}}{n_s} \to \infty.$$

Putting $\frac{u_{n_s}}{n_s} = c$ (2.3) holds with c_s instead of c and consequently (2.2) holds also.

Remark. It is clear that in (2.2) there is strict inequality unless $\limsup \frac{u_n}{n} = 2$. This statement can be inverted in the following sense:

If $u_1, u_2, \ldots$ is an increasing sequence of positive numbers and

$$\liminf \frac{u_1 + \ldots + u_n - \frac{n^2}{2}}{u_n^2} \geqq \frac{1}{8} \tag{2.4}$$

then $\frac{u_n}{n} \to 2$.

In the proof of (2.4) we can suppose $\limsup \frac{u_n}{n} = 2$ so that

$$u_n \leqq 2n + o(n).$$

Put $\liminf \frac{u_n}{n} = \alpha$ and suppose $\alpha < 2$. We choose two numbers β and ε such that

$$\alpha < \beta < 2 - \varepsilon < 2 \quad \text{and} \quad \frac{\varepsilon}{2} < \left(1 - \frac{\beta}{2}\right)^2$$

and two sequences of integers $m_1, m_2, \ldots$ and $n_1, n_2, \ldots$ such that

$$n_1 < n_2 < \ldots, \quad m_\nu < n_\nu, \quad \frac{u_{m_\nu}}{m_\nu} \leqq \beta,$$

$$\frac{u_n}{n} < 2 - \varepsilon \text{ for } m_\nu \leqq n < n_\nu \quad \text{and} \quad \frac{u_{n_\nu}}{n_\nu} \geqq 2 - \varepsilon.$$

Hence for any $1 \leqq l \leqq m_\nu$ we have

$$\sum_1^{n_\nu} u_k \leqq \sum_1^{l} (2k + o(k)) + \sum_{l+1}^{m_\nu} m_\nu \beta + \sum_{m_\nu+1}^{n_\nu} (2-\varepsilon) k + O(1) \leqq$$

$$\leqq l^2 + o(l^2) + (m_\nu - l) m_\nu \beta + (2-\varepsilon) \frac{n_\nu^2 - m_\nu^2}{2} + o(u_{n_\nu}^2).$$

Putting $l = \left[\frac{m_\nu \beta}{2}\right]$ we obtain from here

$$\sum_1^{n_\nu} u_k \leqq m_\nu^2 \left(\beta - \frac{\beta^2}{4}\right) + (2-\varepsilon) \frac{n_\nu^2 - m_\nu^2}{2} + o(u_{n_\nu}^2) =$$

$$= -\left(\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)^2 - \frac{\varepsilon}{2}\right) m_\nu^2 + \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) n_\nu^2 + o(u_{n_\nu}^2) \leqq$$

$$\leqq \frac{n_\nu^2}{2} + \frac{(2-\varepsilon)^2}{8} n_\nu^2 - \frac{\varepsilon^2}{8} n_\nu^2 + o(u_{n_\nu}^2) \leqq$$

$$\leqq \frac{n_\nu^2}{2} + \frac{u_{n\nu}^2}{8} - \frac{\varepsilon^2}{32} u_{n_\nu}^2 + o(u_{n_\nu}^2)$$

which contradicts (2.4).

3. Proof of Theorem I for $k = 3$. We suppose that $G^{(\infty)}$ does not contain infinitely many I_3-paths. We shall then show that

$$\liminf \frac{g(n)}{n^2} \leq \frac{1}{6} \tag{3.1}$$

which contradicts (1.1) for $k = 3$. Moreover we can suppose that $G^{(\infty)}$ does not contain any I_3-path since the omission of a finite number of edges of $G^{(\infty)}$ does not alter the validity of (3.1). We denote by N the set of natural numbers and by C the set of those numbers which are not lower endpoints of any edge. Analogously let B be the set of natural numbers which belong to $N - C$ and which are not connected with any greater number in $N - C$. Putting $A = N - (B \cup C)$, it is clear that if two numbers m, n $(m < n)$ are connected then $m \in A, n \in B \cup C$ or $m \in B, n \in C$. It is also clear that C is infinite since otherwise $G^{(\infty)}$ would contain an I_∞-path.

Let $u_1, u_2, \ldots$ be an enumeration of the elements of $B \cup C$ in increasing order. Let $v_1 < v_2 < \ldots < v_t < \ldots$ be those indices for which $u_{v_t} \in C$. Since C is infinite, the u and v series are also infinite. For every u_k the number of elements of A less than u_k is $u_k - k$ and for every u_{v_l} the number of elements of B less than u_{v_l} is $v_l - l$, consequently

$$g(n) \leq u_1 + \ldots + u_s - \binom{s+1}{2} + v_1 + \ldots + v_t - \binom{t+1}{2}$$

where

$$u_s \leq n < u_{s+1}, \quad v_t \leq s < v_{t+1}.$$

For every natural number k we denote by w_k the number of v_l less than k. By an elementary computation we get

$$v_1 + \ldots + v_t = st - (w_1 + \ldots + w_s).$$

Hence

$$g(n) \leq \sum_1^s (u_k - w_k) - \binom{s+1}{2} - \binom{t+1}{2} + st. \tag{3.2}$$

Since $u_k \geq k > w_k$, we have $u_k - w_k > 0$.

We can select a sequence $s_1, s_2, \ldots$ $(s_\nu \to \infty)$ so that

$$\sum_1^{s_\nu} (u_k - w_k) \leq \frac{s_\nu}{2} (u_{s_\nu} - w_{s_\nu}) + o(u_{s_\nu}^2). \tag{3.3}$$

If $\limsup \frac{u_s - w_s}{s} = \infty$ then we choose the s_ν-s in such a way that $\frac{u_k - w_k}{k} \leq \frac{u_{s_\nu} - w_{s_\nu}}{s_\nu}$ should hold for $1 \leq k \leq s_\nu$ and for this sequence (3.3) is clearly satisfied. If $\limsup \frac{u_s - w_s}{s} = \varrho < \infty$ (3.3) will hold for any sequence s_ν for which $\frac{u_{s_\nu} - w_{s_\nu}}{s_\nu} \to \varrho$.

From (3.2) and (3.3) we have for $s = s_\nu$ and $n = u_s$

$$\frac{g(u_s)}{u_s^2} \leqq \frac{s}{2u_s^2}(u_s - w_s) - \frac{s^2}{2u_s^2} - \frac{t^2}{2u_s^2} + \frac{st}{u_s^2} + o(1)\,.$$

Considering that $w_s \geqq i - 1$ we deduce from here

$$\frac{g(u_s)}{u_s^2} \leqq \frac{1}{2}\frac{s}{u_s}\left(1 - \frac{s}{u_s}\right) + \frac{1}{2}\frac{s^2}{u_s^2}\frac{t}{s}\left(1 - \frac{t}{s}\right) + o(1) \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2}\frac{s}{u_s}\left(1 - \frac{s}{u_s}\right) + \frac{1}{8}\frac{s^2}{u_s^2} + o(1) = \frac{1}{6} - \frac{3}{8}\left(\frac{s}{u_s} - \frac{2}{3}\right)^2 + o(1) \leqq \frac{1}{6} + o(1)$$

for $s = s_\nu$. This proves (3.1).

4. Proof of Theorem II. First we show that there exists a $G^{(\infty)}$ with

$$g(n) = \frac{n^2}{8} + \left(\frac{1}{32} + o(1)\right)\frac{n^2}{\log^2 n} \tag{4.1}$$

which does not contain any I_2-path. To see this put

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 2, \quad u_k = 2k + \left[\frac{k}{\log k}\right] \qquad (k = 3, 4, \ldots)$$

and consider the graph $G^{(\infty)}$ in which m and n ($m < n$) are connected if and only if n is an u_k and m is not an u_k. Clearly $G^{(\infty)}$ has no I_2-path. A simple computation shows that if $u_\nu \leqq n < u_{\nu+1}$ then

$$g(n) = \sum_1^\nu (u_k - k) = \frac{\nu^2}{2} + \sum_2^\nu \frac{k}{\log k} + O(\nu) =$$

$$= \frac{\nu^2}{2} + \frac{\nu^2}{2\log\nu} + \frac{\nu^2}{4\log^2\nu} + o\left(\frac{\nu^2}{\log^2\nu}\right) =$$

$$= \frac{u_\nu^2}{8} + \frac{1}{32}\frac{u_\nu^2}{\log^2 u_\nu} + o\left(\frac{\nu^2}{\log^2\nu}\right) = \frac{n^2}{8} + \frac{1}{32}\frac{n^2}{\log^2 n} + o\left(\frac{n^2}{\log^2 n}\right)$$

which proves (4.1).

Theorem II is clearly implied by the following lemma which is essentially a refinement of the Lemma in § 2 and which may deserve interest for its own.

Lemma. *If $u_1, u_2, \ldots$ is a sequence with terms > 1 for $n > n_0$ then for any $\varepsilon > 0$ the inequality*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n - \frac{n^2}{2} \leqq \frac{u_n^2}{8} + \left(\frac{1}{32} + \varepsilon\right)\frac{u_n^2}{\log^2 u_n}$$

holds for infinitely many n.

To prove this we shall distinguish several cases.

Case A. For infinitely many n $u_n > 2n$.

Case A. 1. $\limsup \frac{\log n}{n}(u_n - 2n) = 0$.

Put
$$u_n = 2n + A_n \frac{n}{\log^2 n} \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$
then
$$A_n \leqq o(\log n).$$

If $\limsup A_n = \infty$ for infinitely many n the relation
$$A_n \geqq A_m \qquad (m = 1, 2, \ldots, n)$$
holds and for these n
$$\sum_1^n u_k - \frac{n^2}{2} \leqq \frac{n^2}{2} + A_n \sum_2^n \frac{k}{\log^2 k} + O(n) =$$
$$= \frac{n^2}{2} + A_n \frac{n^2}{2\log^2 n} + o\left(\frac{n^2}{\log^2 n}\right) \leqq \frac{u_n^2}{8} + o\left(\frac{u_n^2}{\log^2 u_n}\right).$$

If $\limsup A_n = c < \infty$ then for a suitable subsequence of the u_n we have
$$u_n = 2n + (c + o(1)) \frac{n}{\log^2 n}$$
and for these u_n
$$\sum_1^n u_k - \frac{n^2}{2} \leqq \frac{n^2}{2} + (c + o(1)) \sum_1^n \frac{k}{\log^2 k} + O(n) =$$
$$= \frac{n^2}{2} + c\frac{n^2}{2\log^2 n} + o\left(\frac{n^2}{\log^2 n}\right) = \frac{u_n^2}{8} + o\left(\frac{n^2}{\log^2 n}\right) \leqq \frac{u_n^2}{8} + o\left(\frac{u_n^2}{\log^2 u_n}\right).$$

Case A. 2. $0 < \limsup \frac{\log n}{n}(u_n - 2n) = c < \infty$.

Put
$$u_n = 2n + B_n \frac{n}{\log n \log\log n} \qquad (n > e^e).$$

We can choose a subsequence B_{n_ν} so that $B_m \leqq B_{n_\nu}$ if $m \leqq n_\nu$ and
$$\frac{B_{n_\nu}}{\log\log n_\nu} = c + o(1).$$

We have by a simple computation for $n = n_\nu$
$$\sum_1^n u_k - \frac{n^2}{2} \leqq \frac{n^2}{2} + B_n \sum_{27}^n \frac{k}{\log k \log\log k} + O(n) =$$
$$= \frac{n^2}{2} + B_n \frac{n^2}{2\log n \log\log n} + B_n \frac{n^2}{4\log^2 n \log\log n} + o\left(\frac{n^2}{\log^2 n}\right)$$

and

$$\frac{u_n^2}{8}+\left(\frac{1}{32}+\varepsilon\right)\frac{u_n^2}{\log^2 u_n}=\frac{n^2}{2}+B_n\frac{n^2}{2\log n\log\log n}+$$

$$+\frac{B_n^2}{8}\,\frac{n^2}{\log^2 n(\log\log n)^2}+\left(\frac{1}{8}+4\,\varepsilon\right)\frac{n^2}{\log^2 n}+o\left(\frac{n^2}{\log^2 n}\right).$$

We have to show that

$$\frac{B_n n^2}{4\log^2 n\log\log n}\leqq\frac{n^2}{8\log^2 n(\log\log n)^2}+\left(\frac{1}{8}+o(1)\right)\frac{n^2}{\log^2 n},$$

i.e.

$$\frac{B_n}{4\log\log n}\leqq\frac{B_n^2}{8(\log\log n)^2}+\frac{1}{8}+o(1)$$

for sufficiently large $n=n_\nu$ but this amounts to

$$\frac{c}{4}\leqq\frac{c^2}{8}+\frac{1}{8}$$

which is true.

Case A. 3. $\limsup\dfrac{\log n}{n}(u_n-2\,n)=\infty$.

Put

$$u_n=2\,n+C_n\frac{n}{\log n}.$$

For a suitable subsequence C_{n_ν} we have $C_m\leqq C_{n_\nu}$ if $m\leqq n_\nu$ and $C_{n_\nu}\to\infty$ Hence

$$\sum_1^n u_k-\frac{n^2}{2}\leqq\frac{n^2}{2}+C_n\sum_2^n\frac{k}{\log k}+O(n)=$$

$$=\frac{n^2}{2}+C_n\frac{n^2}{2\log n}+C_n\frac{n^2}{4\log^2 n}+C_n o\left(\frac{n^2}{\log^2 n}\right)\leqq\frac{u_n^2}{8}$$

if $n=n_\nu$ and ν is sufficiently large.

Case B. $u_n\leqq 2n$ for $n\geqq n_1$. If $\limsup\dfrac{u_n}{n}=0$ then the statement of the lemma is evidently true. If $0\leqq\limsup\dfrac{u_n}{n}<2$ the lemma directly follows from (2.3). So we can suppose $\limsup\dfrac{u_n}{n}=2$. Putting $u_n=2n-D_n n$ we have $\liminf D_n=0$ and for a suitable n_2 and infinitely many n $D_n\leqq D_m$ if $n_2\leqq m\leqq n$. For these n

$$\sum_1^n u_k-\frac{n^2}{2}\leqq\frac{n^2}{2}(1-D_n)+O(n)\leqq\frac{u_n^2}{8}+o\left(\frac{u_n^2}{\log^2 u_n}\right).$$

This concludes the proof of the lemma.

5. Proof of Theorem V. First we prove the second statement of the theorem. Let $h(n)$ tend to infinity sufficiently fast and connect n with all the m for which either $n < m \leqq h(n)$ or $m < n \leqq h(n)$. Clearly our $G^{(\infty)}$ does not contain an infinite complete subgraph since in fact every vertex has finite valency and if $h(n)$ tends to infinity sufficiently fast (1.3) is clearly satisfied.

Now we prove the positive part of Theorem V.

If $G^{(\infty)}$ does not contain an infinite complete graph we can construct by induction a sequence $1 = i_0 < i_1 < i_2 < \ldots$ so that if $i_k \leqq y$ then y is not connected with at least one vertex lying in $[i_{k-1}, i_k)$. Now if k is fixed and $n \geqq i_k$ then for every $i_k \leqq y \leqq n$ there are at least k vertices to the left of y which are not connected with y. Hence $g(n) < \binom{n}{2} - (n - i_k)\, k \leqq \binom{n}{2} - \frac{k}{2} n$ if $n \geqq 2i_k$. If $k > 2C$, this is a contradiction which proves the theorem.

6. Proof of Theorem III. We can assume that $G^{(\infty)}$ does not contain any infinite complete subgraph. The proof will be based on the following lemma.

Lemma. *Let us say that an infinite graph G whose vertices are natural numbers, has property $\mathcal{P}$ if*

a) *G has no infinite complete subgraph,*

b) *Denoting by $v(n)$ the number of vertices $\leqq n$ and by $g(n)$ the number of edges connecting vertices $\leqq n$ the inequality*

$$g(n) \geqq \frac{1}{4} v^2(n) - Cv(n) \tag{6.1}$$

holds for some C and for every n. If G has property $\mathcal{P}$ G has an infinite component who has also property $\mathcal{P}$.

First we deduce the theorem from the lemma. Applying the lemma to $G^{(\infty)}$ we get an infinite component G_1' of $G^{(\infty)}$, with property $\mathcal{P}$. Omitting an arbitrary vertex i_1 of G_1 we get a graph G_1 which clearly also verifies $\mathcal{P}$. Hence G_1 has also an infinite component G_2' with property $\mathcal{P}$ and because of the connectedness of G_1', G_2' contains a vertex i_2 which is connected with i_1. Putting $G_2 = G_2' - \{i_2\}$ G_2 has also property $\mathcal{P}$. Repeating this construction ad infinitum we get a sequence $i_1, i_2, \ldots$ of distinct vertices which form an infinite path.

In the proof of the Lemma we can assume that G is a $G^{(\infty)}$-graph that is $v(n) = n$ and $g(n)$ has the usual meaning. Let us denote by $G_1, G_2, \ldots$ the components of G. $v_k(n)$ and $g_k(n)$ denote the number of vertices $\leqq n$ of G_k respectively the number of edges of G_k which connect vertices $\leqq n$.

First we prove that

(6.2) *There exists a subscript k_0 such that the function $v_{k_0}(n)$ majorizes the functions $v_k(n)$ for every $n > n_0$ and for every k.*

The negation of (6.2) would clearly imply the existence of an infinite sequence $n_1 < n_2 < \ldots$ satisfying the following condition.

For every ν there exist numbers k_ν', k_ν'' for which $k_\nu' < k_\nu''$ and for every k $v_k(n_\nu) \leqq v_{k_\nu'}(n_\nu) = v_{k_\nu''}(n_\nu)$.

Putting

$$\gamma_\nu = v_{k_\nu'}(n_\nu) = v_{k_\nu''}(n_\nu) \tag{6.3}$$

it follows

$$\gamma_\nu \leqq \frac{n_\nu}{2} \tag{6.4}$$

and

$$g(n_\nu) \leqq g_{k'_\nu}(n_\nu) + \frac{1}{2}\gamma_\nu^2 + \frac{1}{2}\sum_{k \neq k'_\nu} v_k^2(n_\nu) \leqq$$

$$\leqq g_{k'_\nu}(n_\nu) + \frac{1}{2}(n_\nu - \gamma_\nu)\gamma_\nu.^{1}$$

Combining this with (6.1) we obtain

$$g_{k'_\nu}(n_\nu) \geqq \frac{1}{2}\gamma_\nu^2 + \frac{n_\nu}{2}\left(\frac{n_\nu}{2} - \gamma_\nu - 2C\right). \tag{6.5}$$

Considering that $g_{k'_\nu}(n_\nu) \leqq \frac{1}{2}\gamma_\nu^2$, we have

$$\gamma_\nu \geqq \frac{n_\nu}{2} - 2C. \tag{6.6}$$

From (6.5), (6.4) and (6.6) it follows

$$g_{k'_\nu}(n_\nu) \geqq \frac{1}{2}\gamma_\nu^2 - 2C\gamma_\nu - 4C^2. \tag{6.7}$$

Considering (6.3) it follows from (6.6) that

$$v_k(n_\nu) \leqq 4C \quad \text{if} \quad k'_\nu \neq k \neq k''_\nu. \tag{6.8}$$

Let ν_0 be an integer for which

$$n_{\nu_0} > 12C.$$

In view of (6.6))

$$\gamma_{\nu_0} > 4C.$$

Thus for $\nu > \nu_0$

$$v_{k'_{\nu_0}}(n_\nu) > 4C \quad \text{and} \quad v_{k''_{\nu_0}}(n_\nu) > 4C$$

and so in view of (6.8) we have

$$k'_\nu = k'_{\nu_0}, \quad k''_\nu = k''_{\nu_0}.$$

Hence (6.7) means that $G_{k'_{\nu_0}}$ satisfies the hypothesis of Theorem V and so it must contain an infinite complete subgraph which contradicts our assumption on G. Thus (6.2) is proved.

We can suppose $k_0 = 1$ i.e.

$$v_k(n) \leqq v_1(n) \quad \text{for} \quad n > n_0.$$

[1] Deducing the second inequality we used the fact that if $\Sigma x_i = a$, $x_i \leqq b$ then $\Sigma x_i \leqq ab$, all numbers occuring being supposed nonnegative.

We have then

$$g(n) \leqq g_1(n) + \frac{1}{2} \sum_{k>1} v_k^2(n) \leqq g_1(n) + \frac{1}{2}(n - v_1(n))\, v_1(n)$$

(cf.p. 447, footnote[1]). In view of (6.1) we get from here

$$g_1(n) \geqq \frac{1}{4} n^2 - \frac{1}{2}(n - v_1(n))\, v_1(n) - Cn = \tag{6.9}$$

$$= \left(\frac{1}{2} n - \left(\frac{1}{2} v_1(n) + C\right)\right)^2 + \frac{1}{2} v_1^2(n) - \left(\frac{1}{2} v_1(n) + C\right)^2$$

and finally

$$g_1(n) \geqq \frac{1}{4} v_1^2(n) - Cv_1(n) - C^2. \tag{6.10}$$

It is evident from (6.9) that G_1 is infinite; this together with (6.10) means that G_1 has property $\mathscr{P}$ and the lemma is proved with $G' = G_1$.

To show that our theorem is best possible we have only to choose a sequence $n_1 < n_2 < \ldots$ of positive integers and consider the graph $G^{(\infty)}$ in which two vertices are connectid if and only if they belong to the same interval $[n_k, n_{k+1})$. Clearly $G^{(\infty)}$ does not contain any infinite path and if $A(n) \to \infty$ is given and the sequence is chosen to increase sufficiently fast then we clearly have $g(n) \geqq \frac{n^2}{4} - A(n)\, n$.

7. Proof of the first part of Theorem IV. We choose a sequence $l_0, l_1, l_2, \ldots$ of integers such that

$$l_0 = 0, \quad 5\, l_\nu < 2\, l_{\nu+1}, \quad \frac{l_\nu}{l_{\nu+1}} \to 0.$$

We put

$$\varphi_\nu(n) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad 1 \leqq n \leqq 2\, l_\nu, \\ 1 & \text{if} \quad 2\, l_\nu < n \leqq 3\, l_\nu, \\ 0 & \text{if} \quad 3\, l_\nu < n \leqq 5\, l_\nu, \\ 1 & \text{if} \quad 5\, l_\nu < n, \end{cases}$$

$$\varphi(n) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(n),$$

and consider the graph $G^{(\infty)}$ in which two edges n_1 and n_2 $(n_1 < n_2)$ are connected if and only if $\varphi(n_1) \geqq \varphi(n_2)$.

Since $\varphi(n) > \nu$ if $n > 5l_\nu$ we have $\lim \varphi(n) = \infty$. Consequently $G^{(\infty)}$ can not contain an I_∞-path. We shall show that on the other hand

$$\liminf \frac{g(n)}{n^2} \geqq \frac{1}{4} + \frac{1}{36}.$$

We estimate $g(n)$ from below if $2l_\nu < n \leqq 2l_{\nu+1}$. First we have $g(n) \geqq g_\nu(n)$ where $g_\nu(n)$ is the number of the edges of $G^{(\infty)}$ whose endpoints belong to the interval $(5l_{\nu-1}, 2l_{\nu+1}]$. Now in this interval all functions $\varphi_\mu(n)$ except for $\mu = \nu$ are constant (namely $\varphi_\mu(n) = 1$ if $\mu < \nu$ and $\varphi_\mu(n) = 0$ if $\nu < \mu$) so that for $5l_{\nu-1} < n_1 < n_2 \leqq 2l_{\nu+1}$ n_1 and n_2 are connected if and only if $\varphi_\nu(n_1) \geqq \varphi_\nu(n_2)$. Using this remark we easily obtain

$$g_\nu(n) = \begin{cases} 2\,l_\nu^2 + \dfrac{1}{2}(n - 2\,l_\nu)^2 + o(n^2) & (2\,l_\nu < n \leqq 3\,l_\nu)\,, \\[2ex] \dfrac{5}{2}l_\nu^2 + \dfrac{1}{2}(n - 3\,l_\nu)^2 + 3\,l_\nu(n - 3l_\nu) + o(n^2) & (3\,l_\nu < n \leqq 5\,l_\nu)\,, \\[2ex] \dfrac{21}{2}l_\nu^2 + \dfrac{1}{2}(n - 5\,l_\nu) + l_\nu(n - 5\,l_\nu) + o(n^2) & (5\,l_\nu < n \leqq 2\,l_{\nu+1})\,. \end{cases} \tag{7.1}$$

In these relations ν should be considered as function of n defined by the inequalities $2l_\nu < n \leqq 2l_{\nu+1}$. We obtain by a simple and elementary computation that

$$\frac{g(n)}{n^2} \geqq \frac{g_\nu(n)}{n^2} \geqq \min_{2l_\nu < m \leqq 2l_{\nu+1}} \frac{g_\nu(m)}{m^2} = \frac{5}{18} + o(1)$$

which completes our proof.

$\varphi(n)$ is an integer valued function which assumes each value on a finite number of places. We shall somewhat modify $\varphi(n)$ by introducing a function $\varphi'(n)$ in the following way: If k is any value of $\varphi(n)$ assumed for $n_1, n_2, \ldots, n_\varrho$ $(n_1 < n_2 < \ldots < n_\varrho)$ then we put

$$\varphi'(n_\nu) = k + \frac{1}{\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \varrho)\,.$$

It is clear that φ' is schlicht and for any two positive integers n' and n'' $\varphi(n') \geqq \varphi(n'')$ is equivalent to $\varphi'(n') > \varphi'(n'')$. The range of φ' is an infinite set of positive numbers without a limit point, hence it can be mapped by a strictly increasing function ψ onto the set of natural numbers. Thus $\varkappa = \psi \circ \varphi'$ is a permutation of the set of natural numbers for which n' and n'' are connected in $G^{(\infty)}$ if and only if $(n' - n'')\,(\varkappa(n') - \varkappa(n'')) < 0$. So we can state the somewhat paradoxical fact that the positive integers can be rearranged in a series $k_1, k_2, \ldots$ in such a drastic way that the number of inversions devided by the number of all unordered pairs formed by $k_1, k_2, \ldots, k_n$ is more than a half plus a fix positive number for all sufficiently large n.

8. Proof of the second part of Theorem IV. We suppose that $G^{(\infty)}$ does not contain any I_∞-path and we prove that then

$$\liminf \frac{g(n)}{n^2} \leqq \frac{1}{2} - \frac{1}{16}\,. \tag{8.1}$$

This means that the second part of Theorem IV is valid with $\alpha = \dfrac{1}{16}$ (although we do not know the greatest possible value of α).

Omitting from $G^{(\infty)}$ all edges (n, m) with $n^2 < m$ we get a subgraph $\bar{G}^{(\infty)}$ every vertex of which has finite valency[2] and for which $g(n) \geqq \bar{g}(n) \geqq \geqq g(n) - Cn^{3/2}$, consequently

$$\liminf \frac{\bar{g}(n)}{n^2} = \liminf \frac{g(n)}{n^2}.$$

This means that we can suppose without loss of generality that every vertex of $G^{(\infty)}$ has finite valency.

We define by induction the sets $A_0, A_1, A_2, \ldots$ requiring that $A_0 = 0$ and for $k > 0$ A_k is the set of those $n \in N - \bigcup_{l=0}^{k-1} A_k$ which are not connected with any m if $n < m$ and $m \in N - \bigcup_{l=0}^{k-1} A_l$. ($N$ is the set of natural numbers.) The sets A_k exhaust N:

$$\bigcup_{0}^{\infty} A_k = N. \tag{8.1}$$

To prove this suppose that for some n_1 $n_1 \in N - \bigcup_{0}^{\infty} A_k$. It is clear from the definition of the sets A_k that for every $k > 0$ n_1 is the starting point of an I_k-path. Since n_1 has finite valency an infinite number of these I_k-paths must have the same second vertex that is there is an edge (n_1, n_2) where $n_2 > n_1$ and n_2 is the starting point of I_k-paths for arbitrarily large k's. The repetition of this argument clearly yields an I_∞-path $n_1 n_2 n_3 \ldots$ against our assumption which proves (8.2).

Put

$$B_k = \bigcup_{l=0}^{k} A_l, \quad B_k(n) = B_k \cap [1, n]$$

and denote by β_k the upper density of B_k that is

$$\beta_k = \limsup \frac{b_k(n)}{n}$$

where $b_k(n)$ is the number of elements of $B_k(n)$. Suppose first that

$$\textit{for some } k \ \beta_k \geqq \frac{1}{2}. \tag{8.3}$$

Denoting by k_0 the least of these k we have

$$\beta_{k_0} \geqq \frac{1}{2}, \quad k_0 > 0$$

(since $\beta_0 = 0$) and

$$\beta_{k_0 - 1} < \frac{1}{2}. \tag{8.4}$$

Given a natural number n_0 and $\varepsilon > 0$ we can choose an $n > n_0$ such that

$$b_{k_0}(n) > \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) n, \quad b_{k_0 - 1}(2n) < n. \tag{8.5}$$

[2] The *valency* of a vertex is the number of edges emanating from this vertex.

In view of (8.4) we can not have for every integer $\nu \geqq 0$

$$b_{k_0-1}(2^{\nu+1} n) - b_{k_0-1}(2^{\nu} n) \geqq 2^{\nu-1} n ,$$

since this would imply by addition

$$b_{k_0-1}(2^{\nu+1} n) - b_{k_0-1}(n) \geqq \left(2^{\nu} - \frac{1}{2}\right) n \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

which would give $\beta_{k_0-1} \geqq \frac{1}{2}$. Hence there is an integer $\nu_0 \geqq 0$ such that

$$b_{k_0-1}(2^{\nu_0+1} n) - b_{k_0-1}(2^{\nu_0} n) < 2^{\nu_0-1} n \tag{8.6}$$

and

$$b_{k_0-1}(2^{\nu+1} n) - b_{k_0-1}(2^{\nu} n) \geqq 2^{\nu-1} n \text{ for } 0 \leqq \nu < \nu_0 . \tag{8.7}$$

Putting $2^{\nu_0} n = m$ we get from (8.5), (8.6) and (8.7)

$$\begin{aligned} b_{k_0}(m) = b_{k_0}(2^{\nu_0} n) &= b_{k_0}(n) + \sum_{\nu=0}^{\nu_0-1} \left(b_{k_0}(2^{\nu+1} n) - b_{k_0}(2^{\nu} n)\right) > \\ &> \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) n + n \sum_{\nu=0}^{\nu_0-1} 2^{\nu-1} = (2^{\nu_0-1} - \varepsilon) n \geqq \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) m \end{aligned} \tag{8.8}$$

and

$$b_{k_0-1}(2 m) - b_{k_0-1}(m) < \frac{1}{2} m . \tag{8.9}$$

(If $\nu_0 = 0$ then the sums figuring in (8.8) are void.)

It is clear from the definition of the sets A_k that if $u \in A_k$, $v \in A_l$ and $u < v$, $k \leqq l$ then u and v are not connected in $G^{(\infty)}$. Consequently there is no edge connecting a member of $B_{k_0}(m)$ with a member of $(m, 2m] - B_{k_0-1}$. Now the first of these sets has $b_{k_0}(m)$ members and the second one $m - (b_{k_0-1}(2m) - b_{k_0-1}(m))$ members hence using (8.8) and (8.9)

$$\begin{aligned} g(2 m) &\leqq \binom{m}{2} - b_{k_0}(m) \left(m - \left(b_{k_0-1}(2 m) - b_{k_0-1}(m)\right)\right) < \\ &< \frac{4 m^2}{2} - \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \frac{1}{2} m^2 = \frac{4 m^2}{2} - \frac{1}{16} 4 m^2 + \frac{\varepsilon}{4} m^2 . \end{aligned}$$

Since $2m > m \geqq n > n_0$ and n_0 and ε have been chosen arbitrary, (8.1) is proved under the assumption (8.3)

Next we consider the case that

$$\beta_k < \frac{1}{2} \quad \text{for} \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{8.10}$$

Given $n_0 > 0$ we can choose k_0 so that $B_{k_0}(n_0) = [1, n_0]$ (cf. (8.2)) i.e.

$$b_{k_0}(n_0) = n_0. \tag{8.11}$$

Let us denote by ν_0 the least non negative integer for which

$$b_{k_0}(2^{\nu_0} n_0) \leqq 2^{\nu_0 - 1} n_0 .$$

ν_0 exists since otherwise we would have $\beta_{k_0} \geqq \frac{1}{2}$ which would contradict (8.10), (8.11) implies that $v_0 > 0$, hence

$$b_k\,(2^{\nu_0-1} n_0) > 2^{\nu_0-2} n_0 .$$

Putting $2^{\nu_0-1} n_0 = m$, we have

$$b_{k_0}(2\,m) \leqq m \quad \text{and} \quad b_{k_0}(m) > \frac{1}{2} m . \tag{8.9}$$

The members of $B_{k_0}(m)$ are not connected with those of $(m, 2m] - B_{k_0}(m)$. Using (8.9) it follows

$$g(2\,m) \leqq \binom{2\,m}{2} - b_{k_0}(m)\left(m - \left(b_{k_0}(2\,m) - b_{k_0}(m)\right)\right) \leqq$$

$$\leqq \frac{4\,m^2}{2} - \frac{1}{2} m\left(m - \left(m - \frac{1}{2} m\right)\right) = \frac{4\,m^2}{2} - \frac{4\,m^2}{16} .$$

Since $m \geqq n_0$ (8.1) is proved under the assumption (8.10) also.

(Received October 12, 1962)

REFERENCES

[1] Erdős, P. and Gallai, T.: "On maximal paths and circuits of graphs." *Acta Math Academiae Sci. Hung.* **10** (1959) 337–356.
[2] Turán, P.: "On the theory of graphs." *Colloquium Math.* **3** (1954) 19–30.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ОТНОСИТЕЛЬНО БЕСКОНЕЧНЫХ ГРАФОВ

J. CZIPSZER, P. ERDŐS, A. HAJNAL

Резюме

Пусть $G^{(\infty)}$ есть граф, вершины которого суть натуральные числа $1, 2, \ldots, n, \ldots$. Для каждого n обозначим через $g(n)$ число тех ребер графа $G^{(\infty)}$, вершины которых находятся среди чисел $1, 2, \ldots, n$. Лежащий в $G^{(\infty)}$ путь $n_1 n_2 \ldots n_k n_{k+1}$ называется монотонным путем длины k или I_k-путем, если $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1}$. Лежащий в $G^{(\infty)}$ бесконечный путь $n_1 n_2 \ldots n_k \ldots$ называется бесконечным монотонным путем или I_∞-путем, если $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Нижеследующие теоремы показывают, как можно с помощью условый относительно порядка роста $g(n)$ гарантировать существование в $G^{(\infty)}$ бесконечного числа I_2-путей, бесконечного числа I_3-путей, бес конечного пути, I_∞-пути или бесконечного полного подграфа.

Теорема 1. *Если $k = 2$ или 3 и для некоторого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших n*

$$g(n) > \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4k} + \varepsilon\right) n^2,$$

то $G^{(\infty)}$ содержит бесконечно много I_k-путей. Это утверждение точно в том смысле, что εn^2 не может быть заменено на $O(n)$.

Пока не известно, имеет ли место теорема и при $k > 3$.

Теорема 2. *Если для некоторого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших n*

$$g(n) > \frac{n^2}{8} + \left(\frac{1}{32} + \varepsilon\right) \frac{n^2}{\log^2 n}$$

то $G^{(\infty)}$ содержит бесконечно много I_2-путей. Здесь $\frac{1}{32}$ не может быть уменьшено.

Теорема 3. *Если для всех n*

$$g(n) > \frac{1}{4} n^2 - Cn$$

то $G^{(\infty)}$ содержит бесконечный путь. Здесь C не может быть заменено на A_n, если $A_n \to \infty$.

Теорема 4. *Из того, что*

$$\liminf \frac{g(n)}{n^2} > \frac{1}{4},$$

еще не следует, что $G^{(\infty)}$ содержит I_∞-путь. Но существует такая постоянная $0 < \alpha < \frac{1}{4}$, что если

$$\liminf \frac{g(n)}{n^2} > \frac{1}{2} - \alpha,$$

то $G^{(\infty)}$ содержит I_∞-путь.

Теорема 5. *Если для бесконечно многих n*

$$g(n) > \frac{n^2}{2} - Cn,$$

то $G^{(\infty)}$ содержит бесконечный полный подграф. Это утверждение точное в том смысле, что вместо C нельзя писать A_n, если $A_n \to \infty$.

ON THE NUMBER OF COMPLETE SUBGRAPHS CONTAINED IN CERTAIN GRAPHS

by

P. ERDŐS

$G^{(n)}$ will denote a graph of n vertices, G_l a graph of l edges and $G_l^{(n)}$ a graph of n vertices and l edges. Loops will not be permitted and two vertices can be connected by at most one edge. In the complete graph $G^{(n)}_{\binom{n}{2}}$ of n vertices, every two vertices are connected by an edge. A complete graph $G_3^{(3)}$ of three vertices is called a triangle. The complementary graph $\bar{G}_l^{(n)}$ of $G_l^{(n)}$ is defined as follows: The two graphs have the same vertices and two vertices are connected by an edge in $\bar{G}_l^{(n)}$ if and only if they are not connected by an edge in $G_l^{(n)}$. In other words a graph $G_l^{(n)}$ and its complementary $\bar{G}_l^{(n)}$ gives a splitting of the edges of the complete graph $G^{(n)}_{\binom{n}{2}}$ into two disjoint classes. $\bar{G}_l^{(n)}$ can be written as $G^{(n)}_{\binom{n}{2}-l}$, but of course this in general does not determine its structure uniquely since the number of vertices and edges does not determine the structure of the graph.

The vertices of G will be denoted by $x, x_1, \ldots, y_1, \ldots$. The graph $(G - x_1 - \ldots - x_r)$ will denote the graph from which the vertices $x_1, \ldots, x_r$ and all the edges incident to them have been omitted. $G(x_1, \ldots, x_k)$ will denote the subgraph of G spanned by the vertices $x_1, \ldots, x_k$. The valency $v(x)$ of x is the number of edges incident to it. $\nu(G)$ will denote the number of edges of G, and $\pi(G)$ the number of its vertices.

$C_k(G)$ will denote the number of complete subgraphs $G^{(k)}_{\binom{k}{2}}$ of G. Recently A. GOODMAN [1] proved that

$$(1)\qquad \min\left(C_3(G^{(n)}) + C_3(\bar{G}^{(n)})\right) = \begin{cases} 2\binom{u}{3} & \text{if } n = 2u \\[2ex] \dfrac{2}{3}u(u-1)(4u+1) & \text{if } n = 4u+1 \\[2ex] \dfrac{2}{3}u(u+1)(4u-1) & \text{if } n = 4u+3 \end{cases}$$

where the minimum is to be taken over all graphs $G^{(n)}$ having n vertices.

A simpler proof of (1) was later given by A. SAUVÉ [2].

GOODMAN asked if the sign of equality in (1) can hold if $C_3(\bar{G}^{(n)}) = 0$, i.e. if $\bar{G}^{(n)}$ contains no triangle. His answer was affirmative for even n. For odd n I showed [2] that the answer is negative for $n > 7$ and it is easily seen to be affirmative for $n \leq 7$.

G. LORDEN [3] proved the following stronger result:

Assume that $C_3(\bar{G}^{(n)}) = 0$. *Then for all even* n *and odd* $n > 9$

$$\min C_3(G^{(n)}) = \binom{\left[\frac{n}{2}\right]}{3} + \binom{\left[\frac{n+1}{2}\right]}{3}, \tag{2}$$

(i.e. $G^{(n)}$ runs through all graphs whose complement contains no triangle).

LORDEN further determined all cases where there is equality in (2). GOODMAN also raised the problem of determining

$$\min (C_k(G^{(n)}) + C_k(\bar{G}^{(n)})),$$

but this seems difficult even for $k = 4$.

I will prove by probabilistic arguments the following

Theorem 1. *For every* $k \geqq 3$ *and every* n

$$\min (C_k(G^{(n)}) + C_k(\bar{G}^{(n)})) < \frac{2\binom{n}{k}}{2^{\binom{k}{2}}}.$$

It is surprising that a crude probabilistic argument gives a result which for $k = 3$ is so close the correct one. This phenomenon can often be observed in this subject [4]. Theorem 1 seems to show that Goodman's problem will be much more difficult for $k > 3$ then for $k = 3$, since it does not seem easy to find graphs which give values of $C_4(G^{(n)}) + C_4(\bar{G}^{(n)})$ which are as small as $\binom{n}{4}\Big/32$. The construction analogous to the one of GOODMAN gives only $3\binom{\left[\frac{n}{3}\right]}{4}$ which is much bigger. It seems likely that

$$\lim_{n=\infty} \min \frac{C_k(G^{(n)}) + C_k(\bar{G}^{(n)})}{\binom{n}{k}} = \frac{1}{2^{\binom{k}{2}-1}}. \tag{3}$$

(3) follows from (1) for $k = 3$. I can not prove it for $k > 3$. I will only outline the proof of the crude estimate $\left(\binom{2k-2}{k-1} = t\right)$

$$\lim_{n=\infty} \min \frac{C_k(G^{(n)}) + C_k(\bar{G}^{(n)})}{\binom{n}{k}} \geqq \frac{k!}{t(t-1)\ldots(t-k+1)}. \tag{4}$$

The following further problems might be of interest. Determine

$$\min C_k(G^{(n)}) = f(n, k, l)$$

where $G^{(n)}$ runs through all graphs of n vertices for which $\bar{G}^{(n)}$ does not contain a complete graph of l vertices.

The result of LORDEN gives that for all even n and for odd $n > 9$

$$f(n, 3, 3) = \binom{\left[\frac{n}{2}\right]}{3} + \binom{\left[\frac{n+1}{2}\right]}{3}.$$

I can not at present determine $f(n, k, l)$ for any other values of k and l. Perhaps for $n > n_0(k, l)$

$$f(n, k, l) = \sum_{i=0}^{l-2} \binom{\left[\frac{n+i}{l-1}\right]}{k}. \tag{5}$$

The simplest special case which I can not do is $f(3n, 3, 4) = 3\binom{n}{3}$. HANANI and I proved the following

Theorem 2. *Let* $l = \binom{t}{2} + r,\ 0 < r \leq t$. *Then* (the maximum is to be taken over all graphs having l edges)

$$\max C_k(G_l) = \binom{t}{k} + \binom{r}{k-1} = g(l). \tag{6}$$

Finally we prove

Theorem 3. *Let* $l > k$. *We have*

$$\max C_k(G^{(n)}) = \sum_{0 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq l-2} \prod_{r=1}^{k} \left[\frac{n+i_r}{l-1}\right] = h(n, l, k) \tag{7}$$

where the maximum is taken over all graphs having n vertices which do not contain a complete l-gon (i.e. a $G^{(l)}_{\binom{l}{2}}$).

Theorem 3 is probably connected with the conjecture (5). (See [8].)

Proof of Theorem 1. The number of graphs $G^{(n)}$ having the labelled vertices $x_1, \ldots, x_n$ clearly equals $2^{\binom{n}{2}}$. A simple argument shows that the number of graphs $G^{(n)}$ for which either $G^{(n)}$ or $\bar{G}^{(n)}$ contains the complete subgraph having the vertices $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ is $2 \cdot 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}}$. Thus summing over all the $\binom{n}{k}$ k-tuples

$$\sum \left(C_k(G^{(n)}) + C_k(\bar{G}^{(n)})\right) = \binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2} + 1} \tag{8}$$

where the summation is extended over all the $2^{\binom{n}{2}}$ graphs $G^{(n)}$. (8) immediately implies

$$\min \left(C_k(G^{(n)}) + C_k(\bar{G}^{(n)})\right) \leq \frac{2\binom{n}{k}}{2^{\binom{k}{2}}}. \tag{9}$$

The sign of inequality in (9) follows if we observe that if $G^{(n)}$ is the complete graph of n vertices, then

$$C_k(G^{(n)}_{\binom{n}{2}}) = \binom{n}{k} > \frac{2\binom{n}{k}}{2^{\binom{k}{2}}}$$

($\bar{G}^{(n)}_{\binom{n}{2}}$ is the graph without edges). Thus for at least one of the $2^{\binom{n}{2}}$ summands (8) we have the inequality sign in (9), which completes the proof of Theorem 1.

Now we prove (4). A well known theorem of RAMSEY [5] asserts that for $t = \binom{2k-2}{k-1}$

$$C_k(G^{(t)}) + C_k(\bar{G}^{(t)}) \geqq 1\,. \tag{10}$$

(10) implies that if $x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}$ are any t vertices of $G^{(n)}$ then

$$C_k(G(x_{i_1}, \ldots, x_{i_t})) + C_k(\bar{G}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_t})) \geqq 1\,. \tag{11}$$

From (11) we have by a simple argument (every t-tuple gives at least one complete k-gon of $G^{(n)}$ or $\bar{G}^{(n)}$ and the same k-tuple occurs in exactly $\binom{n-k}{t-k}$ t-tuples)

$$C_k(G^{(n)}) + C_k(\bar{G}^{(n)}) \geqq \frac{\binom{n}{t}}{\binom{n-k}{t-k}} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{t(t-1)\ldots(t-k+1)}$$

which easily implies (4).

It would not be difficult to show that

$$\lim_{n=\infty} \min \frac{C_k(G^{(n)}) + C_k(\bar{G}^{(n)})}{\binom{n}{k}}$$

exists, but I can not determine it (its value was conjectured in (3)).

Now we outline the proof of Theorem 2. $\max C_k(G_l) \geqq g(l)$ is trivial. It suffices to consider the complete graph $G^{(t)}_{\binom{t}{2}}$ and an extra vertex connected with r vertices of $G^{(t)}_{\binom{t}{2}}$. The Theorem is trivial for $l \leqq \binom{k}{2}$. For $l < \binom{k}{2}$ both sides of (6) are 0, and for $l = \binom{k}{2}$ both sides are 1. We shall now use induction and assume that Theorem 2 holds for all $l' < l$ and then prove it for $l = \binom{t}{2} + r$, $0 < r \leqq t$, $k \leqq t$. We clearly must have $\pi(G_l) \geqq t + 1$ $\left(\text{since } l > \binom{t}{2}\right)$. Assume first that G_l has a vertex x_1 of valency $< t$. Clearly G_l contains at most $\binom{v(x_1)}{k-1}$ complete k-graphs one vertex of which is x_1. Thus clearly

$$C_k(G_l) \leqq \binom{v(x_1)}{k-1} + C_k(G_l - x_1) \text{ and } \nu(G_l - x_1) = l - v(x_1)\,.$$

Hence by our induction hypothesis and a simple computation $(v(x_1) < t)$

$$C_k(G_l) \leqq \binom{v(x_1)}{k-1} + g(l - v(x_1)) \leqq g(l)\,.$$

If all vertices of G_l have valency $\geqq t$, then from $l \leqq \binom{t+1}{2}$, $\pi(G_l) \geqq$ $\geqq t+1$ we easily obtain

$$l = \binom{t+1}{2}, \quad \pi(G_l) = t+1 .$$

But then $C_k(G_l) = \binom{t+1}{k} = g(l)$, which completes the proof of Theorem 2.

We prove Theorem 3 by induction with respect to n. (7) holds for all k if $n \leqq k$ (for $n < k$ both sides of (7) are 0 and for $n = k$ they are both 1). Assume that (7) holds for every $m < n$ and every k. Since $G^{(n)}$ does not contain a $G^{(l)}_{\binom{l}{2}}$ by a theorem of ZARANKIEWICZ [6] it must contain a vertex x of valency not greater than

$$n - \left[\frac{n+l-2}{l-1}\right] = N .$$

By our induction hypothesis

$$C_k(G^{(n)} - x) \leqq h(n-1, l, k) . \tag{12}$$

Denote by $y_1, \ldots, y_t$; $t = v(x) \leqq N$ the vertices of $G^{(n)}$ connected to x by an edge. Clearly the graph $G(y_1, \ldots, y_t)$ contains no $G^{(l-1)}_{\binom{l-1}{2}}$, thus by our induction hypothesis it contains at most $h(t, l-1, k-1)$ subgraphs $G^{(k-1)}_{\binom{k-1}{2}}$. Hence the number of subgraphs $G^{(k)}_{\binom{k}{2}}$ of $G^{(n)}$ one vertex of which is x is at most

$$h(t, l-1, k-1) \leqq h(N, l-1, k-1) . \tag{13}$$

From (12 and (13) we easily obtain by a simple argument

$$\max C_k(G^{(n)}) \leqq h(n-1, l, k) + h(N, l-1, k-1) = h(n, l, k) . \tag{14}$$

To show that in (14) the sign of equality holds it suffices to consider the graph of TURÁN [7] where the vertices are split into $l-1$ classes, the i-th class has $\left[\frac{n+i-1}{l-1}\right]$ vertices and no two vertices of the same class are connected, but every two vertices of different class are connected by an edge. Thus the proof of (7) and Theorem 3 is completed.

Finally I would like to state the following conjecture which is a sharpening of (7): Put

$$F(n, l) = \sum_{0 \leqq i_1 < i_2 \leqq l-2} \left[\frac{n+i_1}{l-1}\right]\left[\frac{n+i_2}{l-1}\right].$$

$F(n, l)$ is the number of edges of Turán's graph, by his theorem [7] for every $G^{(n)}_{F(n,l)+1}$ contains a $G^{(l)}_{\binom{l}{2}}$. I believe that

$$\max C_k(G_{F(n,l)}) = h(n, l, k) \tag{15}$$

where the maximum is taken over all $G_{F(n,l)}$ which do not contain a $G^{(l)}_{\binom{l}{2}}$. (15) would imply (7) since by the theorem of TURÁN just stated a graph $G^{(n)}$ which contains no $G^{(l)}_{\binom{l}{2}}$ has $\leq F(n, l)$ edges.

(Received October 8, 1962)

REFERENCES

[1] GOODMAN A. W.: "On sets of acquaintances and strangers at any party." *Amer. Math. Monthly* **66** (1959) 778—783.
[2] SAUVÉ, L.: "On chromatic graphs." *Amer. Math. Monthly* **68** (1961) 107—111.
[3] LORDEN, G.: "Blue-empty chromatic graphs." *Amer. Math. Monthly* **6** (1962) 114—120.
[4] See ERDŐS, P.: "Some remarks on the theory of graphs." *Bull. Amer. Math. Soc.* **53** (1947) 292—294 and also "Graph theory and probability I and II." *Canadian Journal of Math.* **11** (1959) 34—38 and **13** (1961) 346—352.
[5] ERDŐS, P. and SZEKERES, G.: "A combinatorial problem in geometry." *Compositio Math.* **2** (1935) 463—470.
[6] ZARANKIEWICZ, K.: "Sur les relations symmétriques dans les ensembles fini." *Coll. Math.* **1** (1947) 10—14.
[7] TURÁN, P.: *Matematikai és Fizikai Lapok* **48** (1941) 436—452 (in Hungarian), see also "On the theory of graphs." *Coll. Math.* **3** (1954) 19—30.
[8] MOON, I. W. — MOSER, L.: "On a problem of Turán." *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **7** (1962) A, 311 — 314.

О ЧИСЛЕ ПОЛНЫХ ГРАФОВ НАХОДЯЩИХСЯ В НЕКОТОРЫХ ГРАФАХ

P. ERDŐS

Резюме

Для графов, не содержащих рёбер-петель и многократных рёбер, имеют силу следующие теоремы:

Теорема 1. *Для всякий n и $k \geqq 3$ существует такой граф G с n вершинами, что сумма чисел полных графов с k вершинами, находящихся в G и в дополнительном графе от G меньше* $2\binom{n}{k}\Big/2^{\binom{k}{2}}$.

Теорема 2. *Пусть* $l = \binom{t}{2} + r,\quad 0 < r \leqq t$. *Тогда граф, имеющий l рёбер может максимально содержать* $\binom{t}{k} + \binom{r}{k-1}$ *полных графов с k вершинами.*

Теорема 3. *Пусть $k < l$. Тогда граф с n вершинами, не содержащий полного графа с l вершинами, может содержать максимально*

$$\sum_{0 \leqq i_1 < \ldots < i_k \leqq l-2} \prod_{r=1}^{k} \left[\frac{n+i_r}{l-1}\right]$$

полных графов с k вершинами.

A kiadásért felel az Akadémiai kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Vidosa László
Kézirat érkezett: 1962. XI. 19. — Példányszám: 800 — Terjedelem 19,9 (A/5) ív

63.56324 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI: RÉNYI ALFRÉD

TECHNIKAI SZERKESZTŐK: BOGNÁR KATALIN, RÉVÉSZ PÁL

A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEI az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb matematikai, valamint a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden kötete két sorozatban jelenik meg (A. és B. sorozat). Az A. sorozat idegen nyelvű, a B. sorozat magyar nyelvű. Évente egy kötet jelenik meg kb. 30 nyomdaív terjedelemben, amely az A. sorozat 3 és a B. sorozat 1 füzetéből áll. A dolgozatokhoz azoktól különböző nyelvű kivonatok csatlakoznak. Közlésre szánt dolgozatokat kérjük két gépelt példányban kivonattal ellátva a szerkesztő címére küldeni (Budapest V., Reáltanoda u. 13—15.).

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEInek előfizetési ára kötetenként belföldi címre 50,— Ft, külföldi címre 70,— Ft. (Kötetenként 7 $.) *Belföldön* előfizethető a Posta Központi Hirlapirodánál (Budapest V., József nádor tér 1.) vagy bármely Postahivatalnál. Egyéni előfizetők a 61257. számú, közületek a 61066. számú csekkbefizetési lap felhasználásával, vagy az MNB 8. számú egyszámlára való átutalással rendelhetik meg a folyóiratot. *Külföldi* megrendelések a Kultúra (Budapest, 62, POB 149) útján eszközölhetők. A folyóirat egyes füzetei 15,— Ft-os árban az Akadémiai Könyvesboltban kaphatók (Budapest V., Váci u. 22.). Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük az Intézet Könyvtárához fordulni (Budapest V., Reáltanoda u. 13—15.).

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

РЕДАКТОР: ALFRÉD RÉNYI

ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕДАКТОРЫ: KATALIN BOGNÁR, PÁL RÉVÉSZ

АДРЕС: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15., ВЕНГРИЯ

В ТРУДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи, содержащие результаты научно-исследовательской работы Института, и другие математические р боты, а также статьи, связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала состоит из двух серий: серия А и В. Серия А выходит на иностранных языках, Серия В — на венгерском языке. В каждом году выходит один том, который содержит приблизительно 30 печатных листов, и состоит из 3 выпусков серии А и одного выпуска серии В. К кашдой работе примыкает резюме на языке, отличном от языка статьи. Работы, предназначенные для опудликования в журнале, вместе с их резюме следует направлять по адресу редакции (Budapest, V., Reáltanoda u. 13—15.) в двух напечатанных на машинке экземплярах.

Цена подписки на ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА в Венгрии 50 форинтов, на заграничный адрес 70 форинтов ($ 7 — за каждый том). Заграничные заказы принимает Культура, (Budapest, 62, POB 149). По поводу отношения обмена просим обращаться к Библиотеке Института (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15., Венгрия).

PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

EDITOR: ALFRÉD RÉNYI

TECHNICAL EDITORS: KATALIN BOGNÁR, PÁL RÉVÉSZ

ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15, HUNGARY

The PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of scientific work of the Institute and other mathematical papers on the practical applications of mathematics. Each volume of the journal is published in two series (series A and B). Series A is published in foreign languages series B in Hungarian. In every year one volume appears, consisting of about 30 printed lists and containing 3 fasciculi of series A and one fasciculus of series B. The papers are provided with abstracts in languages different from that of the corresponding paper. Papers intended for publication in the journal should be sent to the editor in 2 typewritten copies, with an abstract.

The price of a volume of the PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE is 50,— Ft to an adress in Hungary and 70,— Ft ($ 7.— the volume) to abroad. Subscriptions can be made at the Kultúra from abroad (Budapest, 62, POB 149). For establishing exchange relations please write to the Library of the Mathematical Institute (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15. Hungary).

Ára: 15,– Ft

INDEX: 25.5

INDEX — СОДЕРЖАНИЕ

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI

VII. ÉVFOLYAM B. SOROZAT, 4. FÜZET

1962

*

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ VII., СЕРИЯ B, ВЫПУСК 4.

1962

*

PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME VII. SERIES B. FASC. 4.

1962

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST

1963

TARTALOMJEGYZÉK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI

VII. ÉVFOLYAM B. SOROZAT, 4. FÜZET
1962

★

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ VII., СЕРИЯ B, ВЫПУСК 4.
1962

★

PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME VII. SERIES B, FASC. 4.
1962

1963

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK

KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI: RÉNYI ALFRÉD

TECHNIKAI SZERKESZTŐK: BOGNÁR KATALIN, RÉVÉSZ PÁL

A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEI az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb matematikai, valamint a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden kötete két sorozatban jelenik meg (A. és B. sorozat). Az A. sorozat idegen nyelvű, a B. sorozat magyar nyelvű. Évente egy kötet jelenik meg kb. 30 nyomdaív terjedelemben, amely az A. sorozat 3 és a B. sorozat 1 füzetéből áll. A dolgozatokhoz azoktól különböző nyelvű kivonatok csatlakoznak. Közlésre szánt dolgozatokat kérjük két gépelt példányban kivonattal ellátva a szerkesztő címére küldeni (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15.).

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEInek előfizetési ára kötetenként belföldi címre 50,— Ft, külföldi címre 70,— Ft. (Kötetenként 7 $.) *Belföldön* előfizethető a Posta Központi Hírlapirodánál (Budapest V., József nádor tér 1.) vagy bármely Postahivatalnál. Egyéni előfizetők a 61257. számú, közületek a 61066. számú csekkbefizetési lap felhasználásával, vagy az MNB 8. számú egyszámlára való átutalással rendelhetik meg a folyóiratot. *Külföldi* megrendelések a Kultúra (Budapest, 62, POB 149) útján eszközölhetők. A folyóirat egyes füzetei 15,— Ft-os árban az Akadémiai Könyvesboltban kaphatók (Budapest V., Váci u. 22.). Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük az Intézet Könyvtárához fordulni (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15.).

ТРУДЫ

МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

РЕДАКТОР: ALFRÉD RÉNYI

ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕДАКТОРЫ: KATALIN BOGNÁR, PÁL RÉVÉSZ

АДРЕС: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15. ВЕНГРИЯ

В ТРУДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи, содержащие результаты научно-исследовательской работы Института, и другие математические работы, а также статьи, связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала состоит из двух серий: серия А и В. Серия А выходит на иностранных языках, Серия В — на венгерском языке. В каждом году выходит один том, который содержит приблизительно 30 печатных листов, и состоит из 3 выпусках серии А и одного выпуска серии В. Статьи снабжены с резюмами на языках отличающих от языка статьи.

Цена подписки на ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА в Венгрии 50 форинтов, на заграничный адрес 70 форинтов ($ 7 — за каждый том). Заграничные заказы принимает Культура, Budapest, 62, POB 149). По поводу отношения обмена просим обращаться к Библиотеке Института Budapest, V., Reáltanoda u. 13/15., Венгрия).

PUBLICATIONS

OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

EDITOR: ALFRÉD RÉNYI

TECHNICAL EDITORS: KATALIN BOGNÁR, PÁL RÉVÉSZ

ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15, HUNGARY

The PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of scientific work of the Institute and other mathematical papers on the practical applications of mathematics. Each volume of the journal is published in two series (series A and B). Series A is published in foreign languages series B in Hungarian. In every year one volume appears, consisting of about 30 printed lists and containing 3 fasciculi of series A and one fasciculus of series B. The papers are provided with abstracts in languages different from that of the corresponding paper. Papers intended for publication in the journal should be sent to the editor in 2 typewritten copies, with an abstract.

The price of a volume of the PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE is 50,— Ft to an address in Hungary and 70,— Ft ($ 7.— the volume) to abroad. Subscriptions can be made at the Kultúra from abroad (Budapest, 62, POB 149). For establishing exchange relations please write to the Library of the Mathematical Institute (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15. Hungary).

EGY OLAJVEZETÉK TELEPÍTÉSI SZÉLSŐÉRTÉK FELADAT

HEINEMANN ZOLTÁN[1] és HOSSZÚ MIKLÓS[1]

1. Olajvezeték építésével kapcsolatban merül fel a következő probléma: adott n darab olajkút; hová telepítsük a tartályállomást, hogy a csővezeték építési költsége a legkisebb legyen. A feladatnak természetesen más megfogalmazás is adható. Az ilyen műszaki problémák csak egyszerűsítő feltevések mellett oldhatók meg matematikai eszközökkel, mivel számos tényezőtől függnek (pl. meglevő ipari létesítményektől, domborzati viszonyoktól stb.), így a megoldás végső soron a valóságos viszonyokat csupán megközelítő modellen alapszik. E bizonytalanság csökken, ha a telepítési szempontok egy része elhanyagolható. Pl. egy adott olajmező esetében a földgömb görbültségétől eltekinthetünk; azonkívül, minthogy az olajmező általában nem hegyvidéken helyezkedik el, közelítőleg sík terepet vehetünk alapul.

Ennek alapján egyszerűsítsük le a fent említett problémát a következőre: adott a síkban n darab pont; határozzuk meg azon pontot a síkban, melyre nézve az adott pontoktól mért távolságok súlyozott összege minimum. A probléma megoldására gyakran használt súlypont nem elégíti ki ezt a feltételt; ott a távolságok négyzetének súlyozott összege minimális. Súlynak a vezeték méterenkénti építési költségét kell választanunk. Ha az üzemeltetési költségeket is figyelembe kívánjuk venni, akkor már más jellegű problémára jutunk.

Egy síkbeli derékszögű koordináta rendszert választva, az adott pontok legyenek az $\boldsymbol{a}_k = x_k \boldsymbol{i} + y_k \boldsymbol{j}$, egy tetszőleges pont pedig az $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ helyzetvektor végpontjában. Egy tetszőleges pontra a költség az elmondottak értelmében az

$$(1) \qquad S = p_1 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_1| + \ldots + p_n |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_n| = \sum_{k=1}^{n} p_k \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}$$

értékkel arányos, ahol $p_1, \ldots, p_n$ az adott pontokhoz tartozó súlyok.

Ebben a dolgozatban az $S(x, y)$ függvény szélsőértékét vizsgáljuk. A dolgozat nem használ fel az analízis elemein túlmenő matematikai ismereteket.

2. A $Z = S(x, y)$ kétváltozós függvény minimumának meghatározása céljából vizsgáljuk a függvény által az x, y, z koordináta rendszerben meghatározott felület geometriai tulajdonságait. A következő észrevételeket tehetjük:

---

[1] Miskolc, Nehézipari Műszaki Egyetem Matematikai Tanszék.

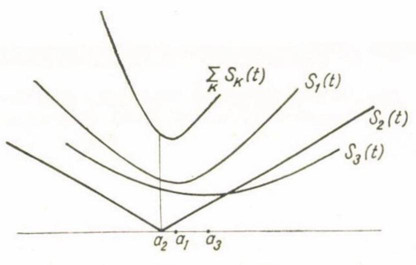
I. $z = S_k(x, y) = p_k \mid \boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_k \mid$ egy olyan kúpfelület egyenlete, melynek csúcsa az $\boldsymbol{a}_k$ vektor végpontjában van, tengelye párhuzamos a z tengellyel, fél nyílásszöge arc tg p_k (1. ábra), és a $z = 0$ sík fölött helyezkedik el.

II. A

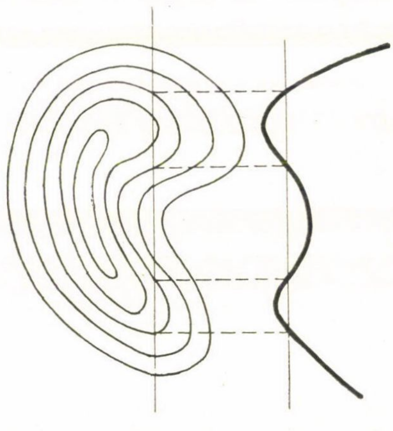
$$Z = S(x, y) = \sum_{k=1}^{n} S_k(x, y)$$

felület z-vel párhuzamos valamely (függőleges) síkmetszete, mint a kúpok tengelyeivel párhuzamos szelet: hiperbola ágak és egyenes szakaszok szuperpozíciója, alulról konvex, és feltéve, hogy az $\boldsymbol{a}_k$ vektorok végpontjai nem esnek egy egyenesbe, szigorúan konvex[2] (1. ábra).

III. A $z = S(x, y)$ felület $z = c$ síkmetszetei (szintvonalai) zárt, szigorúan konvex görbék, vagy elfajult esetben egyenes szakasz.



1. ábra



2. ábra

A magasságvonalak zártsága nyilvánvaló annak alapján, hogy $\boldsymbol{r}$ abszolút értéke növekedésével $\sum_{k=1}^{n} p_k \mid \boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_k \mid$ bizonyos határon túl biztosan nagyobb, mint akármilyen megadott c érték. Ha a pontok nem esnek mindannyian egy egyenesre, akkor a szigorú konvexitás úgy látható be, hogy ellenkező esetben lehetne találni olyan húrt, amely a magasságvonalat kettőnél több pontban metszené (2. ábra), tehát az erre a húrra illesztett függőleges metszősík sem lehetne alulról szigorúan konvex, ellentétben a II. megállapítással.

[2] Egy görbe alulról konvex, ha bármely két pontja közti íve nem megy a két pontot összekötő húr fölé; alulról szigorúan konvex, ha bármely két pontja közti ív mindig a húr alatt van. Egy síkbeli zárt görbe konvex, ha bármely két pontján át fektetett húr a görbe által bezárt tartománynak csak belső vagy határpontjait tartalmazza; szigorúan konvex, ha bármely egyenes legfeljebb két pontban metszi a görbét. Nyilván, két alulról konvex függvény összege is ugyanilyen; egy alulról konvex és egy alulról szigorúan konvex függvény összege szigorúan konvex.

Elfajult esetben is csak úgy lehet a szintvonal egyenes szakasz, ha II. alapján a pontok mindannyian egy egyenesre esnek, és az illető szintvonal éppen szélsőérték (3. ábra).

IV. A $z = S(x, y)$ felületnek a következő típusú minimum pontjai lehetnek:

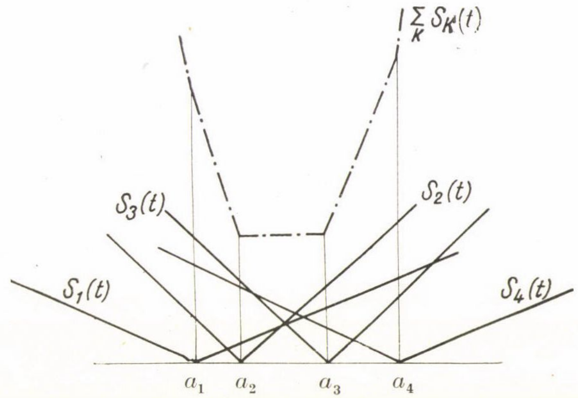
a) egyetlen, az $\boldsymbol{a}_k$ végpontoktól különböző pont felett;

b) az $\boldsymbol{a}_k$ vektorok valamelyikének végpontjánál;

c) két pontot összekötő egyenes szakaszon.

3. Vegyük sorra az *a)—c)* eseteket, és vizsgáljuk meg külön-külön, hogyan lehet a szélsőértéket meghatározni.

Legritkábban *c)* fordulhat elő: csak akkor, ha a pontok valamennyien egy egyenesre esnek, és pl. a páronként egyező súlyú pontok összekötő szaka-



3. ábra

szainak van közös része. E megjegyzés rögtön irányt is szab a minimum pontok meghatározására: az $S = \sum_{k=1}^{n} p_k \,|\, x - x_k \,|$ törtvonal függvény alsó pontját, illetve pontjait kell kijelölni (3. ábra).

Az *a)* esetben az $S(x, y)$ függvény minimum helyét a

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial x} &= \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{x - x_k}{\sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_n)^2}} = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial y} &= \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{y - y_k}{\sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}} = 0 \end{aligned}\right.$$

egyenletek biztosan létező (és egyetlen) megoldása határozza meg.

A megoldás általános esetben egyszerű eszközökkel nem határozható meg, ezért közelítő módszerekre vagyunk utalva.

A nem lineáris egyenletrendszerek közelítő megoldása általában sok számítási munkát követel meg, ezért nehézkes és számunkra gyakorlatilag nem használható. Ebben a dolgozatban a későbbiek során a numerikus számítást lerövidítő eljárást tárgyalunk. A módszer hatékonysága lényegében a szintvonalak és függőleges síkmetszetek szigorú konvexitásán alapszik.

Az $S(\boldsymbol{r})$ skalár függvény a sík minden pontjához egy skalár értéket rendel, pontosabban $S(\boldsymbol{r})$ a síkban értelmezett potenciál függvény. Szintvonalai az S = konstans görbék és a legnagyobb változás irányát a grad S vektor adja.

Ennek értéke (1)-ből:

$$\text{grad}\, S = p_1(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_1)^\circ + \ldots + p_n(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_n)^\circ , \tag{3}$$

ahol $-(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_k)^\circ$ a tetszőleges $\boldsymbol{r}$ pontból az $\boldsymbol{a}_k$-ba mutató egységvektort jelenti. A minimumot adó pontot (2)-nek megfelelően a

$$\text{grad}\, S = \frac{\partial S}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial S}{\partial y}\boldsymbol{j} = 0 \tag{2a}$$

feltétel jelöli ki.

grad S a sík minden $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{a}_k$ vektorának végpontjában értelmezve van.

Az eddig elmondottakból megoldási lehetőségként egy mechanikai modell kínálkozik. Fúrjunk lyukakat egy vízszintesen elhelyezett lapon adott (arányosan zsugorított) vektorok végpontjain, és vezessük rajta keresztül egy csomópontból kiinduló zsinórokat. Terheljük az egyes szálakat az egyes pontoknak megfelelő p_k súllyal. A csomópontban ébredő erők ekkor éppen —grad S erőt adnak. Az ellenállásoktól mentesített rendszer csomópontja ez irányban elmozdulni igyekezvén (2a)-nak megfelelő helyzeten kerül egyensúlyba.[3]

grad S az $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_k$ pontokban határozatlanná válik, az $\boldsymbol{a}_k$ pontok a sík szinguláris pontjai.

E matematikai modell alapján tárgyalható a *b)* eset is:

Tegyük fel, hogy a csomópont az $\boldsymbol{a}_k$ pontok közül az m-edikben van, onnan indul, vagy valami módon oda kerül.

Ha $\boldsymbol{a}_m$-et az $\boldsymbol{a}_k$ pontok közül kizárjuk, akkor a

$$\boldsymbol{q} = -\sum_{k \neq m} p_k(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_k)^\circ$$

erő hatására, annak irányában elmozdul a zsinegek csomópontja. Tetszőlegesen kicsiny elmozdulás hatására azonban $p_m\,(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_m)^0$ már meghatározott irányt nyer. Ha az $\boldsymbol{a}_m$ végpontjának van olyan környezete, melyben

$$p_m = |p_m(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_m)^\circ| > \Big|\sum_{k \neq m} p_k(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_k)^\circ\Big| = |\boldsymbol{q}| \tag{5}$$

érvényes, akkor a $\boldsymbol{q}$ és $-p_m\,(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_m)^\circ$ erők együttes hatására az $\boldsymbol{r}$ végpontja $\boldsymbol{a}_m$ végpontja irányába közeledve mozdul el; ebben az esetben $S(\boldsymbol{a}_m)$ az $S(\boldsymbol{r})$-nek minimuma, míg az ellenkező esetben biztosan nem az.

Minthogy $\boldsymbol{q}$ az $\boldsymbol{r}$-nek folytonos függvénye az $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_m$ hely környezetében is, $\boldsymbol{r}$ kicsiny változásával keveset változik, tehát a *b)* esetben végső megállapításként leszűrhetjük a következőt: A

$$p_m > \Big|\sum_{k \neq m} p_k(\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}_m)^\circ\Big| \tag{5'}$$

egyenlőtlenség teljesülése szükséges és elegendő ahhoz, hogy éppen az $\boldsymbol{a}_m$ vektor végpontján legyen S minimális.

---

[3] A modell alapján a súrlódás ellenállások, valamint a csomópont merevsége miatt a gyakorlatban szükséges pontosságú eredményt adó analóg gép nem készíthető.

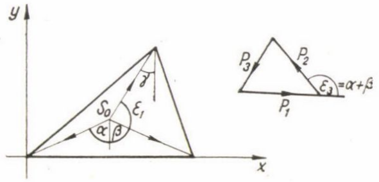
4. Nézzük most (2) megoldását egy jól ismert példán pl. három pont esetében. A koordináta rendszert válasszuk úgy, hogy a háromszög egyik csúcsa a kezdőpontba essék és egyik oldalával az x tengelyen feküdjön (4. ábra). Ekkor az

$$S(x,y)=p_1\sqrt{x^2+y^2}+p_2\sqrt{(x-x_2)^2+y^2}+p_3\sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2}$$

súlyfüggvény minimumát a

$$\frac{\partial S}{\partial x}=p_1\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+p_2\frac{x-x_2}{\sqrt{(x-x_2)^2+y^2}}+p_3\frac{x-x_3}{\sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^3}},$$

$$\frac{\partial S}{\partial y}=p_2\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+p_2\frac{y}{\sqrt{(x-x_2)^2+y}}+p_3\frac{y-y_3}{\sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_2)^2}}$$



4. ábra

egyenletnek elegettevő pontban kell keresni. Az ábrán látható jelölések szerint

$$p_1\sin\alpha-p_2\sin\beta+p_3\cos\gamma=0\,,$$

$$p_2\cos\alpha-p_2\cos\beta+p_3\sin\gamma=0\,;$$

négyzetre emelés, majd összeadás után

$$p_3^2(\sin^2\gamma+\cos^2\gamma)=p_1^2+p_2^2+2\,p_1p_2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\,,$$

vagyis

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{p_3^2-p_1^2-p_2^2}{2\,p_1p_2}=\cos\varepsilon_3\,,\quad \varepsilon_3=\alpha+\beta$$

érvényes. Itt ε_3 a p_1, p_2, p_3 oldalakkal szerkesztett háromszög p_3-mal szemben fekvő szögének kiegészítő szöge (4. ábra); ugyanilyen módon számítható, ill. szerkeszthető ε_1 és ε_2[4]. Az adott háromszög oldalai fölé ezen szögekkel

[4] RAISZ Iván felhívta a figyelmünket, hogy az ε_k szögek minden levezetés nélkül egyszerűbben nyerhetők a $p_k(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}_k)$ erővektorok (2a) záródási feltételéből, melynek alapján a rögtön a 4. ábrán szereplő háromszöget kapjuk. Különleges esetek részletes vizsgálatával itt nem foglalkozunk, azt elvégezte FORRAI Sándor [3]. Ő hozta tudomásunkra e kérdés megoldásának fontosságát a bányászatban és a bányászati szakirodalomban ezirányban fellelhető [1], [2] eredményeket. Az említett dolgozatok közül [2] bizonyítás nélkül egy közelítő eljárást ad (2) megoldására; [1] egy tartományra tudja leszűkíteni a síknak azt a részét, melyen belül az $S^m=\sum_{k=1}^{n}p_k\,|\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}_k|^m$ függvény szélsőértékét adó vektorok egyáltalán lehetnek. Itt megjegyezzük, hogy módszerünkkel is nemcsak $m=1$ esetén lehetséges a szélsőérték tetszőleges pontossággal való megközelítése.

szerkesztett látókörök metszéspontja adja a keresett, (2)-t kielégítő pontot, melyben, ha a háromszög belsejébe esik, S értéke nyilván minimális. Ha a látókörök egymást nem belső pontban metszik, akkor a háromszög egyik csúcspontjában a legkisebb S értéke, éspedig amelyiken (5') teljesül.

Négy pont esetében, ha $p_1 = p_3$, $p_2 = p_4$, a négyszög P_1P_3, P_2P_4 átlóinak metszéspontja adja a (2)-t kielégítő pontot, feltéve, hogy ez a négyszög belsejébe esik. Ez nyilvánvaló amiatt, hogy $p_1 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_1| + p_3 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_3|$ minimuma a P_1P_3 vonalszakasz felett van, míg $p_2 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_2| + p_4 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_4|$-é P_2P_4 felett, és itt külön-külön mindegyik függvény állandó.

5. Ezek után rátérünk a már jelzett numerikus módszer tárgyalására. Ennek alapját az ismertetett mechanikai modell szolgáltatja. Választunk tetszőleges $\boldsymbol{r}_1$ kezdeti pontot. Mivel ezen pontban a minimum feltétel általában nem elégül ki, a potenciáltér hatására $-\operatorname{grad} S(\boldsymbol{r}_1)$ irányában elmozdulás következik be: $-\lambda_1 \operatorname{grad} S(\boldsymbol{r}_1)$ elmozdulás után $\boldsymbol{r}_2$ pontba kerülünk, innen $-\lambda_2 \operatorname{grad} S(\boldsymbol{r}_2)$ után az $\boldsymbol{r}_3$ pontot nyerjük.

Vizsgáljuk, milyen feltétel mellett konvergál az

$$(6)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{r}_{k+1} = \boldsymbol{r}_k - \lambda_k \operatorname{grad} S_k, \; S_k = S(\boldsymbol{r}_k) \\ k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

sorozat a $\operatorname{grad} S = 0$ feltételt kielégítő pontba.

A $-\operatorname{grad} S_k$ alacsonyabb szintvonalak felé mutat, és a $k+1$-edik pontra biztosan fennáll $S_{k+1} < S_k$, ha a $-\lambda_k \operatorname{grad} S_k$ elmozdulás nem metszette mégegyszer az $S = S_k$ szintvonalat. Határozzuk meg tehát az

$$(7)\qquad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_k - \lambda \operatorname{grad} S_k\,, \qquad 0 \leqq \lambda \leqq \infty$$

egyenesnek az $S = S_k$ szintvonallal baló másik metszéspontját! Az $\boldsymbol{r}$ ezen kifejezését $S(\boldsymbol{r})$-be helyettesítve, egy

$$(8)\qquad S(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} p_i \sqrt{\alpha\lambda^2 + \beta_i\lambda + \gamma_i}, \qquad \alpha = (\operatorname{grad} S_k)^2, \; \beta_i = -2(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i) \operatorname{grad} S_k, \; \gamma_i = (\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i)^2$$

alakú kifejezést nyerünk. A (7) paraméteres egyenlet mutatja, hogy

$$S_k = S(\boldsymbol{r}_k) = S(\lambda)|_{\lambda=0} = \sum_{i=1}^{n} p_i \sqrt{\gamma_i}\,.$$

A metszéspont számítása céljából becsüljük meg felülről $S(\lambda)$-t. Minthogy mindegyik

$$S_i(\lambda) = p_i \sqrt{\alpha\lambda^2 + \beta_i\lambda + \gamma_i} = p_i \sqrt{\gamma_i} \left[1 + \left(\frac{\alpha}{\gamma_i}\lambda^2 + \frac{\beta_i}{\gamma_i}\lambda\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

hiperbola metszethez a $\lambda = 0$ pontban a binomiális sorfejtés alapján nyert

$$P_i(\lambda) = p_i \sqrt{\gamma_i} \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\gamma_i}\lambda^2 + \frac{\beta_i}{\gamma_i}\lambda\right)\right]$$

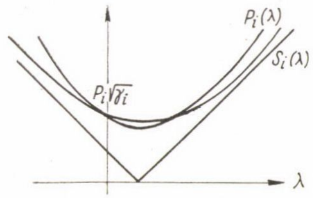
simuló parabola jó felső korlát (5. ábra), ezért nyilván[5]

$$S(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} S_i(\lambda) \leqq \sum_{i=1}^{n} P_i(\lambda) = P(\lambda),$$

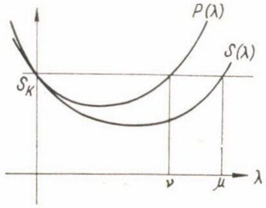
ahol az értelmezés folytán $P(0) = S(0) = S_k$.

Az $S = S_k$ szintvonallal való másik metszés tehát olyan μ paraméternél következik be, mely alulról megbecsülhető a $P(\lambda)$ függvénynek az S_k magasságú egyenessel való metszéspontjához tartozó ν paraméterrel (6. ábra), melyre tehát fennáll

$$P(\nu) = S(\mu) = S_k, \qquad \nu \leqq \mu .$$



5. ábra



6. ábra

Itt azonban ν könnyen számítható a $P(\nu) = S_k$ ill. részletesen: a

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \sqrt{\gamma_i}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\gamma_i}\nu^2 + \frac{\beta_i}{\gamma_i}\nu\right)\right] + \sum_{i=1}^{n} p_i \sqrt{\gamma_i}$$

egyenlet

$$\nu = -\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \beta_i / \sqrt{\gamma_i}}{\alpha \sum p_i / \sqrt{\gamma_i}} = \frac{2 \operatorname{grad} S_k \sum_{i=1}^{n} p_i \dfrac{\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i|}}{(\operatorname{grad} S_k)^2 \sum_{i=1}^{n} p_i / \sqrt{\gamma_i}} = \frac{2}{\sum_{i=1}^{n} p_i / \sqrt{\gamma_i}}$$

gyökeként. Megjegyzendő, hogy

$$\boldsymbol{r}_k \neq \boldsymbol{a}_i$$

esetén (8) alapján $\gamma_i \neq 0$, következőleg $\nu(>0)$ számítható a kapott képlettel.

Minthogy végül az $S = S_k$ szintvonal belsejében biztosan kisebb S értéke S_k-nál, a

$$\lambda_k = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} p_i / \sqrt{\gamma_i}} \tag{9}$$

[5] Itt felhasználtuk azt a szemléletes, könnyen igazolható tényt, hogy az $S_i(\lambda)$ hiperbolát a $P_i(\lambda)$ parabola a $\lambda = 0$ és $\lambda = -\beta_i/\alpha$ pontokban érinti, de egyébként felette helyezkedik el (5. ábra).

paraméter választással (a húr felezőpontján) biztosan olyan vektorhoz jutunk a (6) sorozatban, melyre

$$S_{k+1} = S(\lambda) = S(\boldsymbol{r}_{k+1}) < S_k$$

fennáll.

Így a (6)—(9) alapján nyert sorozat monoton csökkenő. Alulról korlátos, monoton csökkenő sorozatnak azonban van határértéke. Ehhez az S_0 határértékhez tartozó szintvonalon a gradiens nem lehet 0-tól különböző, mert különben a megfelelő α, γ_i-vel képezett $P(\lambda)$ húrjának $\nu/2 \neq 0$ abszcisszájú felezőpontján lehetne találni S_0-nál kisebb S-et. Szóval az $S = S_0$ szintvonal csak egyetlen pontot tartalmaz, a keresett minimum pontot.

Ezen eljárás csupán az *a)* esetben alkalmazható.

A módszer előnye, hogy a (6) sorozat konvergenciája nem túlságosan érzékeny a grad S_k számítási pontosságára; így aztán pl. grafikus eljárással is könnyen lehet az $\boldsymbol{r}_k$ vektorhoz alkalmas, a grad S_k-tól nem sokban különböző vektort szerkeszteni, éspedig úgy, hogy $\boldsymbol{r}_k$ végpontjából az $\boldsymbol{a}_i$ vektorok végpontja felé p_i hosszúságú vektorokat rajzolunk, és szerkesztjük a kapott vektorok összegét.[6]

6. Minthogy (6), (8), (9) alapján

$$\boldsymbol{r}_{k+1} = \boldsymbol{r}_k - \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i/\sqrt{\gamma_i}} \operatorname{grad} S_k = \boldsymbol{r}_k - \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{p_i}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i|}} \sum_{i=1}^{n} \frac{(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i)}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i|},$$

$$\boldsymbol{r}_{k+1} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{p_i}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i|}} \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i|} \boldsymbol{a}_i, \tag{10}$$

ezért az eljárás úgy is értelmezhető, hogy az $\boldsymbol{r}_{k+1}$ közelítés az $\boldsymbol{a}_i$ vektorok végpontjában elhelyezett $\frac{p_i}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i|}$ súlyú pontok tömegközéppontja. Lásd [1, 5, 6]. VINCZE István hívta fel figyelmünket, hogy ennek alapján az $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots$ sorozat konvergenciája az

$$S(\boldsymbol{r}_{k+1}) < S(\boldsymbol{r}_k)$$

reláció következménye, mely igen egyszerűen bizonyítható a következő módon:[7] $\boldsymbol{r}_{k+1}$ éppen a

$$\varphi_k(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i|} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_i)^2$$

---

[6] 50 kútból álló gázmező esetében, a szokásos telepítési viszonyok mellett 5—9 lépésben már megfelelő jó százalékos pontosság érhető el. A számítás menete digitális számológépre könnyen programozható.

[7] lásd: WEISZFELD [6].

összeg minimum helye (a súlypont ismert tulajdonsága alapján), tehát

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i|} (\boldsymbol{r}_{k+1} - \boldsymbol{a}_i)^2 \leqq \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i|} (\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i)^2 = S(\boldsymbol{r}_k),$$

másrészt

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i|} (\boldsymbol{r}_{k+1} - \boldsymbol{a}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i|} [|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i| + (|\boldsymbol{r}_{k+1} - \boldsymbol{a}_i| - |\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i|)]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i |\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i| + 2 \sum_{i=1}^{n} p_i |\boldsymbol{r}_{k+1} - \boldsymbol{a}_i| - 2 \sum p_i |\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{(|\boldsymbol{r}_{k+1} - \boldsymbol{a}_i| - |\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i|)^2}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i|} = 2\, S(\boldsymbol{r}_{k+1}) - S(\boldsymbol{r}_k) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{(|\boldsymbol{r}_{k+1} - \boldsymbol{a}_i| - |\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i|)^2}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i|},$$

s e kettőt összehasonlítva valóban teljesül $S(\boldsymbol{r}_{k+1}) \leqq S(\boldsymbol{r}_k)$, ahol $\boldsymbol{r}_{k+1} \neq \boldsymbol{r}_k$ esetén nem állhat fenn egyenlőség.

VINCZE István [5] ezzel az eljárással határozta meg általánosabb ponthalmazok (görbék, tartományok) esetén a távolság hatványának bizonyos súlyfüggvénnyel képezett integráljának minimum helyét.

Megjegyzések. 1. Az S potenciáltér nívóvonalainak ortogonális trajektoriái azon vonalak, melyek mentén a grad S erő hatására az elmozdulás történik (esésvonalak). Ezek differenciálegyenlete:

$$y' = \frac{\partial S}{\partial y} \Big/ \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}.$$

A grad $S = 0$-nak megfelelő pontban

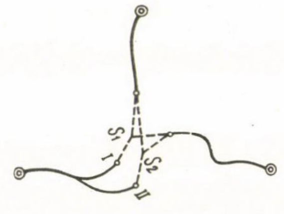
$$P(x, y) = Q(x, y) = 0$$

áll fenn. Az egyenletnek tehát itt szinguláris pontja van.

Gradiens módszernek nevezik a függvény szélsőértékének az esésvonalak csomópontjaként történő meghatározását. A fent vázolt módszer tehát lényegében a gradiens módszernek egy közelítő eljárással való összekapcsolása.

2. A cikkben nem fektettünk súlyt arra, hogy eredményeink alkalmazási területét konkrétan megvilágítsuk. Ezt a hiányt kívánjuk pótolni néhány sorban. Természetesen vázlatosan, teljességre nem törekszünk, és jelenleg nem is törekedhetünk.

a) Hosszabb csővezetékek általában nem vezethetők egyenes vonalban. Ezzel azonban nem szűnt meg a módszer alkalmazási lehetősége. Ha az egyenestől csak kicsit kell eltérnünk, az optimális egyenes a kitűzésnél éppen úgy irányt szab, mint ideális esetben. Megtörténhet azonban, hogy az eltérés igen nagy. Pl. meg kell kerülni a Balatont, mint a zalai olajvezeték építésekor 20 évvel ezelőtt elő is fordult. A vezetéket ezután három irányba kellett elágaztatni. Ilyen esetekben kijelölhető minden vezeték utolsó kötött pontja. Ezt a pontot és az idáig vezető utat a földrajzi adottságok szabják meg. Az elágaztatás helye ezen pontok alapján már számítható.



7. ábra

Lehetséges, hogy egyik vezetékszál lefektetése két úton oldható meg. Mindkét lehetőségre elvégzendő az elágaztatás helyének megállapítása, és a kevesebb összköltségűt kell megvalósítani (7. ábra).

b) Gázkutakhoz tankállomást kívánunk telepíteni. Számítjuk az S_0 pontot, majd egymáshoz közel eső kutak csöveit egyesítjük. Az így nyert csomópontok alapján S_0 korrigálható.

A súlyok mindig a vezetékek Ft/m költségét jelentik.

Főleg gázvezetékek tervezésénél látjuk az alkalmazás lehetőségét. Olajvezetékeknél az üzemeltetési költségek nagyobb súlya szab korlátot.

Összefoglalás

A dolgozat olajvezeték gazdaságos építésével kapcsolatban egy síkban n db. adott ponthoz olyan pont megkeresésével foglalkozik, melynek az adott pontoktól $p_1, \ldots, p_n$ súllyal vett távolság összege minimális. Ha a pontok valamennyien egy egyenesbe esnek, akkor föléjük p_i iránytangesű $S_i = p_i\,|t - t_i|$ egyenletű törtvonalakat szerkesztve, ezek $S = \sum_{i=1}^{n} S_i$ szuperpozícióján a legalsó pont jelöli ki a minimumot.

Ha a pontok nem esnek egy egyenesbe, de valamelyik indexű pontban az (5') egyenlőtlenség teljesül, akkor ott a legkisebb a súlyzott távolságösszeg.

Ha az előző esetek egyike sem áll fenn, akkor egy tetszőleges $\boldsymbol{r}_1$ vektor végpontjából, mely az adott pontok mindegyikétől különbözik, a (6), (8), (9) illetve (10) előírás alapján olyan $\boldsymbol{r}_k$, $k = 1, 2, \ldots$ sorozatot nyerhetünk, melynek határértéke a kívánt szélsőértéket adja, feltéve, hogy az $\boldsymbol{r}_k$ vektorok közül egyikük végpontja sem esik a megadott pontok valamelyikére. Ez utóbbi feltétel mindig teljesíthető úgy, hogy ellenkező esetben a megfelelő λ_k értékét a (9) alattinál valamivel kisebbnek választjuk, s ezáltal elkerüljük azt, hogy az $\boldsymbol{r}_{k+1}$ végpontja éppen valamely megadott pontra essen, ahol grad S_{k+1} értelmét veszítené.

(Beérkezett: 1960. szeptember 22.)

IRODALOM

[1] Крупинский, Б.: *Основы проектирования шахт*, Москва, 1956.
[2] Воронков, И. М.: „К задаче об отыскании положения точки, соответствующей наименьшему значению суммы n-ных степеней расстояний." Научные труды, Моск. горн. инст. имени И. В. Сталина. Вып. № 8. Москва, 1950.
[3] Forrai Sándor: „Bányászati telepítések különleges problémáinak analitikai megoldásához". *MTA VI. Oszt. Közleményei*, sajtó alatt.

[4] ZAMBÓ János: *Bányászati telepítések analitikája.* Budapest, 1960.
[5] VINCZE, I.: „Über die Schwerpunkte der konvexen Kurven bei speziellen Gelegungen". *Acta Math. Szeged* **9** (1938) 52—59.
[6] WEISZFELD, E.: „Sur le point pour lequel la somme des distances de n points donnés est minimum." *The Tohoku Mathematical Journal* **43** (1937) 356—386.
[7] BRINK, E. L. — de CANI, J. S.: „An analogue Solution of the Generalized Transportation Problem with Specific Application to Markating Location." International Conference on Operational Research, Oxford, 1957.

EIN MINIMUM PROBLEM DER ÖLBEFÖRDERUNG

Z. HEINEMANN und M. HOSSZÚ

Zusammenfassung

Der Aufsatz befasst sich, im Zusammenhang mit dem rentablen Bau von Ölleitungen, mit dem Aufsuchen eines punktes in einer Ebene, dessen mit den Gewichten $p_1, \ldots, p_n$ genommene Entfernung von n gegebenen, in derselben Ebene liegenden Punkten, summiert ein Minimum ergeben.

Liegen alle Punkte auf einer Geraden, so konstruierten wir über ihr gebrachene Linien mit der Richtungstangente p_i, die die Gleichung $S_i = p_i \mid t - t_i \mid$ haben. Auf ihrer Superposition $S = \sum_{i=1}^{n} S_i$ gibt der unterste Punkt das Minimum an.

Wenn die Punkte nicht auf einer Geraden liegen aber in einem Punkt, der den Index m hat, die Ungleichheit (5′) erfüllt wird, so ist die gewogene Entfernungssumme dort die kleinste.

Ist auch das nicht der Fall, so kann aus dem Endpunkt eines beliebigen Vektors $\boldsymbol{r}_i$, der von allen gegebenen Punkten verschieden ist, auf Grund der Vorschriften (6), (8), (9) (Bzw. (10)) eine Reihe von Vektoren $\boldsymbol{r}_k$, $k = 1, 2, \ldots$ gewonnen werden, deren Grenzwert den gewünschten Extremwert liefert, vorausgesetzt, dass keiner der Vektoren $\boldsymbol{r}_k$ mit einem der gegebenen Punkte zusemmenfällt. Letztere Bedingung kann man immer erfüllen, wenn man den Wert des entsprechenden λ_k etwas kleiner wählt, als das in (9) angegeben ist. Dadurch vermeiden wir, dass der Endpunkt von $\boldsymbol{r}_{k+1}$ gerade mit einem gegebenen Punkt zusammenfällt, wo grad S_{k+1} seinen Sinn verlieren würde.

ОДНА ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА О ТРАНСПОРТИРОВКЕ НЕФТА

Z. HEINEMANN и M. HOSSZÚ

Резюме

Авторы занимаются в задачей экономичной постройки нефтепроводов, а именно отысканием такой точки, связанной с данными в одной плоскости точками n, которая имеет минимальную сумму расстояний, принятых весами $p_1, \ldots, p_n$ от данных точек. Если все точки располагаются на одной и той же прямой, то построив над ним ломанные линии, имеющие угловые коэффи-

циенты касательных p_i уравнения $S_i = p_i \, |t - t_i|$, низшая точка на суперпозиции $S = \sum_{i=1}^{n} S_i$ этих линий определяет место минимума.

Если точки не располагаются на одной прямой, но в некоторой точке индексом m выполняется неравенство (5'), то там находится наименьшая сумма свешенных расстояний.

Если не имеет место ни одного предыдущих случаев, то из конечного пункта произвольного вектора, $\boldsymbol{r}_1$ отличающегося от всех данных точек, можем получить последовательность $\boldsymbol{r}_k$, $k = 1, 2, \ldots$ по правилам (6), (8), (9), предел которой даёт требуемый экстремум, полагая, что ни одной из конечных точек векторов $\boldsymbol{r}_k$ не совпадает с одной из заданных точек. Последное условие может быть выполнено всегда, если мы выберем значение соответственного λ_k немного меньше чем значения (9), и поэтому мы избегаем, что конечный пункт, $\boldsymbol{r}_{k+1}$ располагался бы на некоторой заданной точке, где выражение grad S_{k+1} не имело бы смысла.

A LOGARITMIKUS RATEMETERREL KAPCSOLATOS SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATRÓL

VARGA LÁSZLÓ[1]

Bevezetés

Tekintsünk egy ξ_t sztochasztikus folyamatot a $0 \leq t < \infty$ időpontokban. ξ_t lehetséges értékei legyenek 0 és 1, és tegyük fel, hogy az egyes állapotokban való tartózkodások időtartamai jobbról nyitottak (1. ábra). Feltesszük, hogy az egymást követő különböző állapotok időtartamai független pozitív valószínűségi változók közös

$$(1) \qquad \begin{aligned} F(x) &= 1 - e^{-\lambda x}, \quad && 0 \leq x; \\ &= 0 \quad , && x < 0; \end{aligned}$$

eloszlásfüggvénnyel. Ekkor, mint ismeretes, a $(0, t]$ időközben előforduló átmenetek ν_t száma homogén Poisson folyamatot követ λ eseménysűrűséggel. Definiáljuk a ξ_t által származtatott η_t folyamatot a következőképpen:

$$(2) \qquad \eta_t = (2\xi_t - 1) \int_0^t A(t - x)\, d\xi_x,$$

ahol $A(t)$ a $0 \leq t < \infty$ intervallumban korlátos variációjú folytonos függvény.

Az η_t folyamat például részecskeszámlálásnál fordul elő. Tegyük fel élhetünk azzal a megközelítéssel, hogy a számlálócső által szolgáltatott impulzusok időpontjai λ eseménysűrűségű homogén Poisson folyamatot követnek. Ezeket az impulzusokat egy kétállapotú feszültségforráshoz visszük, amely a hozzá érkező impulzusok időpontjában a ξ_t folyamat szerint változtatja feszültségét. Ha a ξ_t folyamat szerint változó feszültséget egy lineáris áramkör bemenő kapcsaira kötjük, akkor a rövidre zárt kimenő kapcsok között folyó áram $(2\,\xi_t - 1)$-szerese egy tetszőleges $t \geq 0$ időpontban η_t, ahol $A(t)$ azt az áramot jelenti, amelyet az egységgel egyenlő állandó feszültség kelt a bekapcsolástól számított t idő múlva.

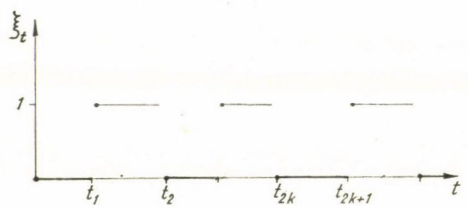
Az η_t folyamattal írható le a logaritmikus ratemeter kimenő árama. A logaritmikus ratemetert gyakran használják részecskeszámlálásra. Lényegében véve ez egy speciális lineáris áramkör (2. ábra), amelyhez egy árammérő csatlakozik $\eta_t = 0$ esetén (a) és $\xi_t = 1$ esetén (b) módon. A feszültséget az előbb említett módon szolgáltatja egy kétállapotú feszültségforrás. Az árammérő az η_t kimenő áram átlagát méri, amely az eseménysűrűségnek logaritmikus függvénye.

[1] Optikai és Finommechanikai Központi Kutatólaboratórium.

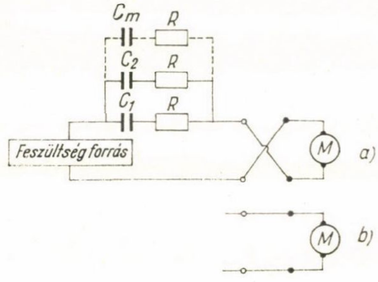
Dolgozatunkban az η_t folyamat vizsgálatával kívánunk foglalkozni. Meghatározzuk az η_t folyamat első és második momentumát, az η_t és η_s folyamatok korrelációs tényezőjét, valamint az

$$\bar{\eta}_T = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \eta_x \, dx \tag{3}$$

folyamat első és második momentumát. Végül alkalmazásképpen a logaritmikus ratemeter beszabályozásával foglalkozunk.



1. ábra. A ξ_t folyamat ábrája



2. ábra. A logaritmikus ratemeter áramköre

Momentumok meghatározása

Jelölje η_t első momentumát egy tetszőleges $t \geq 0$ időpontban $M_1(t)$ és $(2\,\xi_t - 1)\,\xi_x$ első momentumát $m_1(x, t)$, ahol $0 \leq x < t$. Így (2)-ből

$$M_1(t) = \int_0^t A(t-x)\, dm(x, t)\,. \tag{4}$$

Jelölje $P(t)$ annak a valószínűségét, hogy $\xi_t = 1$. Könnyen belátható hogy

$$P(t) = \frac{1}{2}\,[1 - e^{-2\lambda t}]\,. \tag{5}$$

Ugyanis $\xi_t = 1$ akkor áll fenn, ha a $(0, t]$ időközben páratlan számú esemény következett be. Ez több egymást kizáró módon jöhet létre: $\nu_t = 1, 3, 5, \ldots,$ ámde Poisson folyamat esetén

$$\mathbf{P}\,\{\nu_t = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!}\, e^{-\lambda t}\,,$$

és így

$$P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\,\{\nu_t = 2k+1\} = \frac{1}{2}\,[1 - e^{-2\lambda t}]\,.$$

A várható érték definíciója alapján

$$(6) \qquad m_1(x,t) = 2\,P(x)\,[1-P(t-x)] - P(x) = \frac{1}{2}\,[e^{-2\lambda(t-x)} - e^{-2\lambda t}]\,.$$

Így

$$(7) \qquad M_1(t) = \lambda \int_0^t A(x)\, e^{-2\lambda x}\, dx\,.$$

Az $A(t)$ függvény korlátos voltából következik, hogy létezik az első momentum $t = \infty$ helyen vett határértéke: $M_1 = \lambda \alpha(2\lambda)$, ahol $\alpha(s)$ az $A(x)$ függvény Laplace transzformáltját jelöli.

Az η_t integrálközepének várható értékére igaz, hogy

$$(8) \qquad \mathbf{M}\,\{\bar{\eta}_T\} = \frac{1}{T}\int_0^T M_1(t+x)\,dx\,.$$

Igy a $t \to \infty$ határátmenet esetén $\lim \mathbf{M}\,\{\bar{\eta}_T\} = M_1$ egyenlőségre jutunk. Az M műszer (2. ábra) mutatója tehát hosszú idő múlva $(t \to \infty)$ M_1-el arányos kitérés körül fog ingadozni.

A második momentum meghatározása céljából írjuk fel η_t^2-et kettős integrál formában:

$$(9) \qquad \eta_t^2 = \int_0^t \int_0^t A(t-x)\, A(t-y)\, d(\xi_x\, \xi_y)\,.$$

Jelölje az η_t folyamat második momentumát egy tetszőleges $t > 0$ időpontban $M_2(t)$. Mivel

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\,\{\xi_x\, \xi_y\} &= P(x)\,[1-P(y-x)]\,, && x \leqq y\,;\\ &= P(y)\,[1-P(x-y)]\,, && x \geqq y\,; \end{aligned}$$

(5)-ből és (9)-ből kapjuk, hogy

$$(10) \qquad M_2(t) = \frac{1}{4}\int_0^t\int_0^t A(x)\, A(y)\, d(e^{-2\lambda|y-x|}) = -\lambda \int_0^t A(x)\, dB(x)\,,$$

ahol

$$B(x) = \int_x^t A(y)\, e^{-2\lambda(y-x)}\, dy\,.$$

Parciális integrálással (10) a következő formára hozható

$$M_2(t) = A(0)\, M_1(t) + \lambda \int_0^t B(x)\, dA(x)\,.$$

Feltevésünk értelmében az $A(t)$ függvény korlátos variációjú, ezért létezik a második momentum $t = \infty$ helyen vett határértéke:

$$(11) \qquad M_2 = A(0)\, M_1 + \lambda \int_0^\infty \bar{B}(x)\, dA(x)\,,$$

ahol

$$\bar{B}(x) = \int_0^\infty A(x+y)\, e^{-2\lambda y}\, dy\,.$$

Megemlítjük itt, hogy

$$\mathsf{M}\left\{\frac{1}{T}\int_{t}^{t+T}\eta_x^2 dx\right\}=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}M_2(t+x)\,dx$$

egyenlőség alapján az η_t áram átlagteljesítménye hosszú idő múlva ($t\to\infty$) M_2-vel lesz egyenlő, ha egységnyi ellenálláson vezetjük keresztül.

A következőkben a korrelációs tényező meghatározásával foglalkozunk. Legyen $\mathsf{M}\{\eta_t\,\eta_s\}=M(\tau,t)$, ahol $s=t+\tau$, $\tau>0$. Írjuk fel az $\eta_t\,\eta_s$ szorzatot a következő felbontásban:

$$\eta_t\eta_s=(-1)^{\nu_s-\nu_t}\int_0^t\int_0^t A(t-x)\,A(s-y)\,d(\xi_x\xi_y)+ \tag{12}$$
$$+\int_0^t\int_t^s A(t-x)\,A(s-y)\,d\left[(2\,\xi_t-1)\,\xi_x(2\,\xi_s-1)\,\xi_y\right].$$

A Poisson folyamat homogén és additív voltából következik, hogy $\nu_s-\nu_t$ különbség független a ν_u értékétől, valahányszor $u<t$ és így független ξ_u-tól is. Ebből következik, hogy (12) egyenlőség jobboldalán álló első tag két független valószínűségi változó (az integrál és annak előjele) szorzata. A második tagnál felhasználva az

$$\mathsf{M}\{(2\,\xi_t-1)\,\xi_x(2\,\xi_s-1)\,\xi_y\}=$$
$$=P(x)\left[1-2\,P(s-y)\right]\left[1-P(t-x)-P(y-t)\right],\qquad(0<x<t<y<s),$$

egyenlőséget (12) várható értékére a következőt kapjuk:

$$M(\tau,t)=-\frac{\lambda}{2}\,e^{-2\lambda\tau}\int_0^t A(x+\tau)\,dC(x)+M_1(t)\,M_1(\tau)\,, \tag{13}$$

ahol

$$C(x)=\int_x^t A(y)\,e^{-2\lambda(y-x)}\,dy-\int_0^x A(y)\,e^{-2\lambda(x-y)}\,dy\,.$$

A (11)-nél alkalmazott megfontolás szerint létezik $M(\tau,t)$-nek a $t=\infty$ helyen vett határértéke:

$$M(\tau)=-\frac{\lambda}{2}\,e^{-2\lambda\tau}\int_0^\infty A(x+\tau)\,d\bar{C}(x)+M_1M_1(\tau)\,, \tag{14}$$

ahol

$$\bar{C}(x)=\int_0^\infty A(x+y)\,e^{-2\lambda y}\,dy-\int_0^x A(y)\,e^{-2\lambda(x-y)}\,dy\,.$$

A korrelációs tényező:

$$R(\tau,t)=\frac{M(\tau,t)-M_1(t)\,M_1(t+\tau)}{D(t)\,D(t+\tau)}\,, \tag{15}$$

ahol

$$D^2(t)=M_2(t)-M_1^2(t)\,.$$

Az η_t folyamat integrálközepének második momentumára írhatjuk, hogy

$$(16)\quad \begin{aligned} \mathbf{M}\left\{\left[\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\eta_x dx\right]^2\right\} &= \frac{2}{T^2}\int_0^T\int_0^y \mathbf{M}\{\eta_{t+y}\eta_{t+x}\}\,dx\,dy = \\ &= \frac{2}{T^2}\int_0^T\int_0^y M(y-x, t+x)\,dx\,dy\,. \end{aligned}$$

Az integrálközép második momentuma tehát $t \to \infty$ esetén a következő lesz:

$$(17)\quad \overline{M}(T) = \lim_{t\to\infty}\mathbf{M}\left\{\left[\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\eta_x dx\right]^2\right\} = \frac{2}{T^2}\int_0^T\int_0^y M(y-x)\,dx\,dy\,.$$

Alkalmazás: a logaritmikus ratemeter átskálázása

Legyen a ratemeter áramköre a 2. ábra szerinti, ahol a kapacitások megválasztása a következő: $C_i = C_1\, 10^{i-1}$. Ekkor

$$(18)\quad A(t) = \frac{1}{R}\sum_{k=1}^{m} e^{-\frac{t}{RC_k}}\,,$$

ahol m a párhuzamosan kötött soros RC tagok száma.

Ha élhetünk azzal a feltevéssel, hogy a logaritmikus ratemeterhez érkező impulzusok száma homogén Poisson folyamatot követ λ eseménysűrűséggel, akkor (7) szerint

$$(19)\quad M_1(t) = \frac{1}{R}\sum_{k=1}^{m}\lambda\frac{1-e^{-(2\lambda+\alpha_k)t}}{2\lambda+\alpha_k}\,,$$

ahol $\alpha_k = (RC_k)^{-1}$. Így

$$(20)\quad M_1 = \frac{1}{R}\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda RC_k}{1+2\lambda RC_k}\,.$$

A második momentum $t = \infty$ helyen vett határértéke (11) szerint

$$(21)\quad M_2 = \frac{1}{R^2}\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda RC_k}{1+2\lambda RC_k}\beta_k\,;$$

ahol

$$\beta_k = \sum_{i=1}^{m}\frac{C_i}{C_i+C_k}\,.$$

Mivel (14) szerint

$$M(\tau) = M_1^2 + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k e^{-(2\lambda+\alpha_k)\tau}, \tag{22}$$

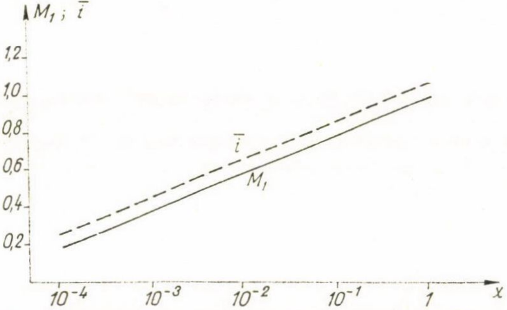
ahol

$$\gamma_k = \frac{1}{R^2} \cdot \frac{1}{1+2\lambda RC_k} \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{C_k}{C_k+C_i} \cdot \frac{\lambda RC_i}{1+2\lambda RC_i},$$

az $\overline{\eta}_T$ integrálközép szórásnégyzete aszimptotikusan a következő lesz:

$$\mathbf{D}^2\{\overline{\eta}_T\} = \frac{2}{T^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{\gamma_k}{2\lambda+\alpha_k} \left[T + \frac{e^{-(2\lambda+\alpha_k)T} - 1}{2\lambda+\alpha_k} \right]. \tag{23}$$

A logaritmikus ratemeter mutatója tehát a bekapcsolástól számított elég hosszú idő múlva (20)-al arányos kitérés körül fog ingadozni.



3. ábra. A logaritmikus ratemeter kimenő árama: $\bar{i}$ egyenlő időközönként érkező jelek esetén. M_1 Poisson folyamat szerint érkező jelek esetén. $x = \lambda\, RC_1$

A műszerskála elkészítése azonban impulzusgenerátor által szolgáltatott, azaz egyenlő időközönként érkező impulzusok segítségével történik. Ha a műszert Poisson folyamat szerint érkező impulzusok számlálására kívánjuk felhasználni, úgy az előbbi módon készített skálát módosítani kell.

Könnyen meghatározhatjuk egyenlő időközönként érkező f másodpercenkénti impulzusszámhoz tartozó átlagáramot. A (2)-es formula alapján (18) figyelembevételével stacionárius esetben az átlagáram:

$$\bar{i} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t}^{t+T} \eta(x)\, dx = \frac{1}{R} \sum_{k=1}^{m} fRC_k \operatorname{th} \left(\frac{1}{2fRC_k} \right). \tag{24}$$

A 3. ábra a kétféle átlagáram értékét mutatja az $fRC_1 = x$ ill. $\lambda\, RC_1 = x$ függvényében $m = 4$ esetén. A szabályos időközönként érkező f eseménysűrűségű jelekre a logaritmikus ratemeter nagyobb áramot szolgáltat, mint ugyanilyen eseménysűrűséggel Poisson eloszlást követő jelekre. A $\lambda = 2{,}3f$ megfeleltetés esetén a kétféle átlagáram a $10^{-4} \leq x \leq 1$ intervallumban dolgozó műszerre megegyezik. Az impulzusgenerátor által szolgáltatott jelekre beszabályozott műszer tehát a $\lambda = 2,3f$ skálamódosítás után mutatja helyesen a Poisson folyamat szerint érkező impulzusok számát.

Végül köszönetemet fejezem ki MOGYORÓDI JÓZSEFnek a dolgozat olvasása közben tett értékes megjegyzéseiért.

(Beérkezett: 1962. február 2.)

ON A STOCHASTIC PROCESS CONCERNING THE LOGARITHMIC COUNTING RATE METER

L. VARGA

Abstract

This paper deals with the following stochastic process:

$$\eta_t = (2\,\xi_t - 1)\int_0^t A(t-x)\,d\xi_x\,,$$

where $A(t)$ is a continous and of bounded variation in $(0, \infty)$; ξ_t is a secondary process generated by means of a homogeneous Poisson process: $\xi_t = 0$ if the numbers of events are, occurring in the time interval $(0, t]$, even and $\xi_t = 1$ otherwise. In the present paper the mean value, the dispersion and the correlation function of the η_t is given. Finally an adjustment problem of the logarithmic counting rate meter is treated.

О СТОХАСТИЧЕСКОМ ПРОЦЕССЕ, СВЯЗАННЫМ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ИЗМЕРИТЕЛЕМ СКОРОСТИ СЧЁТА

L. VARGA

Резюме

Предмет статьи — стохастический процесс

$$\eta_t = (2\,\xi_t - 1)\int_0^t A(t-x)\,d\xi_x\,,$$

где $A(t)$ непрерывная функция с ограниченным изменением, определенная в интервале $(0, \infty)$, а ξ_t вторичный процесс, порождаемый однородным Пуассоновым процессом: $\xi_t = 0$ если в промежутке времени $(0, t]$ число событий четное; $\xi_t = 1$ в остальных случаях. Автор определяет ожидаемое значение, дисперсию и корреляционную функцию процесса η_t. В качестве приложения он показывает, как надо переюстировать логарифмического измерителя скорости счёта урегулированного для импульсов, прибывающих в одинаковых промежутках времени, если мы хотим его использовать для подсчета частиц.

TÜZELÉSTECHNIKAI ALAPEGYENLETEK VIZSGÁLATA ÉS NOMOGRÁFIAI FELDOLGOZÁSA

BÉKÉSSY ANDRÁS és FÁY GYULA[1]

Mint ismeretes [1],a tüzeléstechnikában használatos ún. stacionárius hőállapotok módszerében az égésfolyamatot öt állapothatározóval jellemezzük:

φ, — a tüzelőszer relatív koncentráció változása,

$\theta = \dfrac{RT}{E}$, — ahol T a stacionárius égési állapot hőmérséklete, R az ideális gázállandó, E a tüzelőszerkeverék aktiválási energiája,

$\theta_0 = \dfrac{RT_0}{E}$ — ahol T_0 a tüzelőszerkeverék kezdeti hőmérséklete,

ϑ — dimenziónélküli fűtőérték,

τ — dimenziónélküli gyulladási idő.

Ezeket az égéselméleti fogalmakat itt nem részletezzük, mivel csupán a nomográfiai vonatkozásokkal foglalkozunk. A tárgy fizikai részei a [2] [3] dolgozatokban vannak kifejtve. A fenti öt mennyiség (amelyek mindegyike nem-negatív) között összefüggések állnak fenn: éspedig ún. *kritikus állapot* esetén

$$\varphi = \frac{1}{1 + \tau e^{1/\theta}},$$

$$\varphi\vartheta = \theta - \theta_0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{1 + \tau e^{1/\theta}}\right) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\vartheta}(\theta - \theta_0)\right),$$

nem kritikus állapot, másszóval krízismentes állapot esetén pedig ezek közül csak az első kettő.

A fenti öt változóval és három egyenlettel kapcsolatban a következő problémák léptek fel:

---

[1] Hőtechnikai Kutató Intézet.

I. A φ, θ, θ_0, ϑ, τ ötdimenziós térben az előbbi egyenleteknek elegettevő pontok általában egy-egy hiperfelületen helyezkednek el. Meghatározandók ezen hiperfelületek vetületei a fenti ötdimenziós tér mind a tíz alapsíkján, valamint kijelölendők ezen alapsíkokon a

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\frac{1}{1+\tau e^{1/\theta}}\right) \lesseqgtr \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\frac{1}{\vartheta}(\theta-\theta_0)\right)$$

egyenlőtlenségekkel jellemzett tartományok.

II. A fenti három „alapreláció" általában háromváltozós függvényeket határoz meg: bármely két adat ismeretében a többi három kiszámítható. Nomogram készítendő a függvényekre.

III. Ha csak az első két egyenletet használjuk (krízismentes állapotokat vizsgálva), akkor két változó megadásával a maradék három általában valahogyan összefügg egymással. Ábrázolandók ezen összefüggések.

E feladatokat — melyek a Hőtechnikai Kutató Intézetben folyó tüzeléstechnikai vizsgálatokkal kapcsolatosak — az alábbiak szerint oldottuk meg.

I. Kritikus és krízismentes állapotok áttekintése a tüzeléstechnikai reprezentációelmélet alapján

1. A feladat kitűzése. Legyenek a φ, θ, θ_0, ϑ, τ változók pozitívak és legyen közöttük érvényes a

$$\varphi(1+\tau e^{1/\theta}) = 1, \tag{1}$$

$$\varphi\vartheta = \theta - \theta_0 \tag{2}$$

összefüggéspár, valamint a

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{1+\tau e^{1/\theta}}\right) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{v}(\theta-\theta_0)\right)$$

összefüggés, amely explicit alakban a

$$\tau\vartheta\, e^{1/\theta} = \theta^2(1+\tau e^{1/\theta})^2, \tag{3a}$$

vagy (1) felhasználásával

$$\varphi(1-\varphi)\,\vartheta = \theta^2 \tag{3b}$$

összefüggést jelenti. (3*b*) és (2)-ből ϑ kiküszöbölésével még egy összefüggést vezetünk be:

$$(1-\varphi)(\theta-\theta_0) = \theta^2. \tag{4}$$

Az (1), (2), (3*a*) ill. (1), (2), (3*b*) összefüggések alapján, ha bármelyik két változónak pozitív értékeket adunk, akkor a maradék három változó értéke (vagy értékei) általában meghatározhatók, lehetséges azonban, hogy a kiválasztott változópár adott értékei mellett a maradék változók értékei közül egyesek negatívak, nem-valósak vagy esetleg nem is léteznek. Ebben a tartományban az (1) és (2) egyenletek mellett (3*a*) a valóságban nem állhat fenn.

Logikailag az első feladat minden változópárra olyan szükséges és elégséges feltételek megadása, amelyeknek kielégülése biztosítja, hogy a maradék változók is nem-negatív értékeket vesznek fel. Nevezzük „szabad" változópárnak azt a két változót, amelyekre vonatkozólag a mondott szükséges és elégséges feltételt meg akarjuk fogalmazni. E két változó koordinátasíkján lesz egy tartomány, amelyben (1), (2), (3*a*) vagy (1), (2), (3*b*) kielégíthető olyan módon, hogy mind az öt változó nem-negatív értéket vesz fel. Nevezzük ezt a tartományt „kritikus" tartománynak, komplementáris tartományát pedig „nem kritikus" tartománynak. A két tartományt elválasztó ponthalmazt nevezzük *külső határgörbének.*

Miután az adott szabad változópárra vonatkozólag a kritikus tartományt meghatároztuk, annak belsejében el kell választanunk a

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\frac{1}{1+\tau e^{1/\theta}}\right) > 0 \tag{5}$$

egyenlőtlenséggel jellemzett ponthalmazt (neve: „gyulladási tartomány") az ellenkező értelmű egyenlőtlenséggel jellemzett ponthalmaztól („kialvási tartomány"). Az elválasztó ponthalmazt nevezzük *belső határgörbének.* A belső határgörbe az (5) feltétel szerint a

$$\tau e^{1/\theta}(1-2\theta)-(1+2\theta) \gtreqless 0 \tag{6}$$

tartományokat elválasztó pontok halmaza.

Egyszersmindenkorra leszögezhető, mint az (1) egyenlőség triviális következménye, hogy a kritikus tartományban

$$0 \leqq \varphi \leqq 1\,.$$

2. S z a b a d v á l t o z ó p á r: φ, θ. (4) szerint

$$\theta_0 = \theta\left(1-\frac{\theta}{1-\varphi}\right) \tag{7}$$

akkor és csak akkor nem negatív, ha

$$\varphi + \theta \leqq 1\,. \tag{8}$$

A (8) feltétel biztosítja a többi változók nem negatív voltát is, mert (7) szerint $\theta_0 \leqq \theta$, tehát (2)-ből $\vartheta \geqq 0$ és (1)-ből $\tau > 0$ adódik.

A külső határgörbe tehát a $\varphi = 1 - \theta$ egyenesnek az első negyedbe eső része (1. ábra).

A belső határgörbe egyenletéül (1) és (6)-ból τ kiküszöbölésével a

$$\varphi = \frac{1}{2} - \theta \tag{9}$$

egyenes adódik (1. ábra).

3. S z a b a d v á l t o z ó p á r : φ, θ_0. (4) szerint

$$\theta = \frac{1-\varphi}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1-\varphi)(1-\varphi-4\theta_0)}\,; \tag{10}$$

θ akkor és csak akkor valós, ha

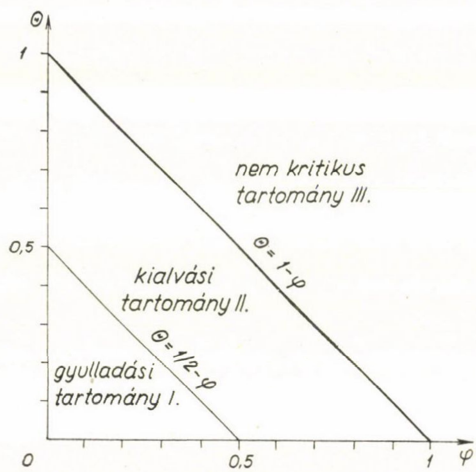
$$(11) \qquad \theta_0 \leqq \frac{1-\varphi}{4} .$$

Ez a feltétel a kritikus tartomány kiválasztására elegendő is. Ha ugyanis (11) teljesül, akkor a (10)-ből adódó mindkét θ valós és nem-negatív, ezenfelül $\theta - \theta_0 \geqq 0$. (2)-ből tehát $\vartheta \geqq 0$ és (1)-ből $\tau > 0$ származik (2. ábra).

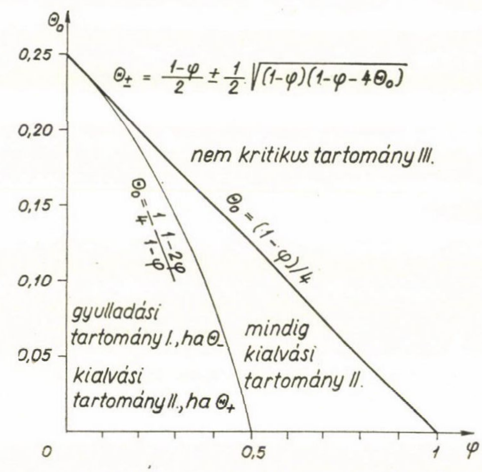
τ-t (1)-ből, θ-t (10)-ből kifejezve és (6)-ba helyettesítve

$$(12) \qquad \theta \gtreqless \varphi \pm \sqrt{(1-\varphi)(1-\varphi-4\theta_0)} .$$

Ha θ számításakor (10)-ben a „+" előjelet használjuk, akkor (12)-ben az



1. ábra



2. ábra

alsó jel érvényes: az egész kritikus tartományban az (5) második derivált negatív. Ha (10)ben az alsó, „—" előjelet használjuk, akkor viszont

$$(13) \qquad \theta_0 = \frac{1}{4}\frac{1-2\varphi}{1-\varphi}$$

a belső határgörbe egyenlete: *ha* $\theta_0 < \frac{1}{4}\frac{1-2\varphi}{1-\varphi}$, *akkor (5) pozitív, ellenkező esetben negatív* (2. ábra).

4. Szabad változópár: φ, ϑ. (3*b*)-ből nem-negatív θ adódik, (abban az értelemben, hogy a négyzetgyökvonásnál csak a pozitív előjelű θ értéket tartjuk meg) pozitív θ és pozitív φ-ből pedig (1) szerint pozitív τ. Kell még, hogy (2) alapján

$$\theta_0 = \theta - \varphi\vartheta \geqq 0$$

legyen, vagyis mivel (3b)-ből $\theta = \sqrt{\varphi(1-\varphi)\,\vartheta}$, kell, hogy

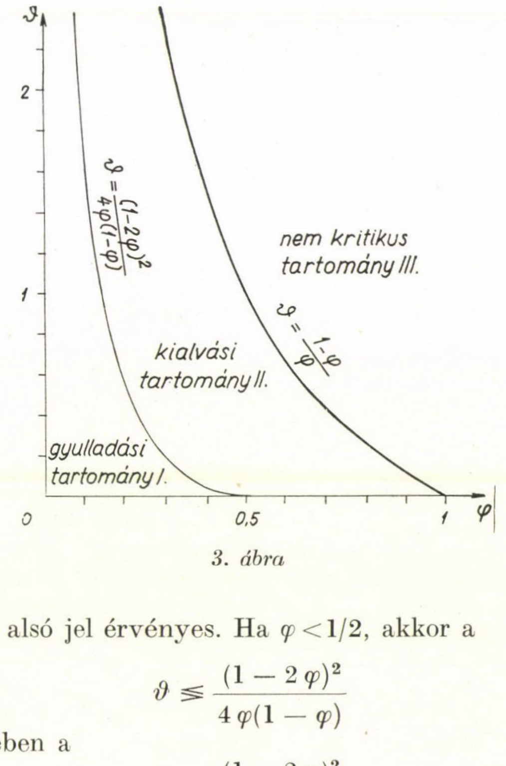
(14) $$\vartheta \leqq \frac{1-\varphi}{\varphi}$$

legyen. (14) a mondottak szerint szükséges és elégséges (3. ábra).

A belső határgörbére vonatkozó feltétel

$$\varphi + \sqrt{\varphi(1-\varphi)\,\vartheta} \lesseqgtr 1/2,$$

ha a (6) egyenlőtlenségben a τ és θ változópárt φ, ϑ-val helyettesítjük. Ha



3. ábra

$\varphi \geqq 1/2$, akkor az alsó jel érvényes. Ha $\varphi < 1/2$, akkor a

$$\vartheta \lesseqgtr \frac{(1-2\,\varphi)^2}{4\,\varphi(1-\varphi)}$$

feltétel következtében a

(15) $$\vartheta = \frac{(1-2\,\varphi)^2}{4\,\varphi(1-\varphi)}$$

egyenlet szolgáltatja a belső határgörbét (3. ábra).

5. Szabad változópár: φ, τ. (1) szerint

$$\theta = \left(\ln\frac{1-\varphi}{\varphi\tau}\right)^{-1}.$$

A θ akkor és csak akkor pozitív (nem negatív), ha

(16) $$\tau \leqq \frac{1-\varphi}{\varphi}.$$

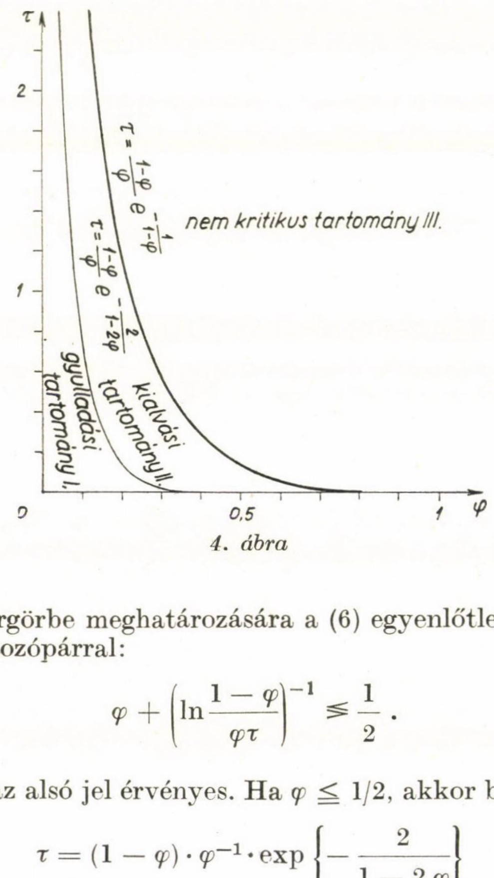
Ha θ és φ pozitív, akkor (3b) szerint ϑ is pozitív. Kell még, hogy (2)-ből nem negatív θ_0 adódjék, kell tehát hogy

$$\theta - \varphi\vartheta \geqq 0$$

legyen; ez a feltétel a φ, τ változópárral kifejezve a

$$\tau \leqq (1-\varphi)\,\varphi^{-1}\exp\left\{-\frac{1}{1-\varphi}\right\} \tag{17}$$

feltételre vezet, amely önmagában elégséges is, mert involválja (16)-ot (4. ábra).



4. ábra

A belső határgörbe meghatározására a (6) egyenlőtlenségben θ-t fejezzük ki a φ, τ változópárral:

$$\varphi + \left(\ln\frac{1-\varphi}{\varphi\tau}\right)^{-1} \gtrless \frac{1}{2}\,.$$

Ha $\varphi > 1/2$, akkor az alsó jel érvényes. Ha $\varphi \leqq 1/2$, akkor belső határgörbéül a

$$\tau = (1-\varphi)\cdot\varphi^{-1}\cdot\exp\left\{-\frac{2}{1-2\varphi}\right\} \tag{18}$$

egyenletű görbe adódik (4. ábra).

6. Szabad változópár: θ, θ_0 (4) szerint φ, akkor és csakis akkor nem-negatív, ha

$$\theta_0 \leqq \theta(1-\theta)\,. \tag{19}$$

Ez a feltétel elégséges is, mert ha teljesül, akkor (2) szerint $\vartheta \geqq 0$ és $\varphi \leqq 1$ következtében (1)-ből $\tau \geqq 0$.

A belső határgörbe meghatározására a (6) egyenlőtlenséget fejezzük ki a θ, θ_0 párral. Az eredmény (5. ábra):

$$\theta_0 \gtrless \frac{\theta}{1+2\theta}\,. \tag{20}$$

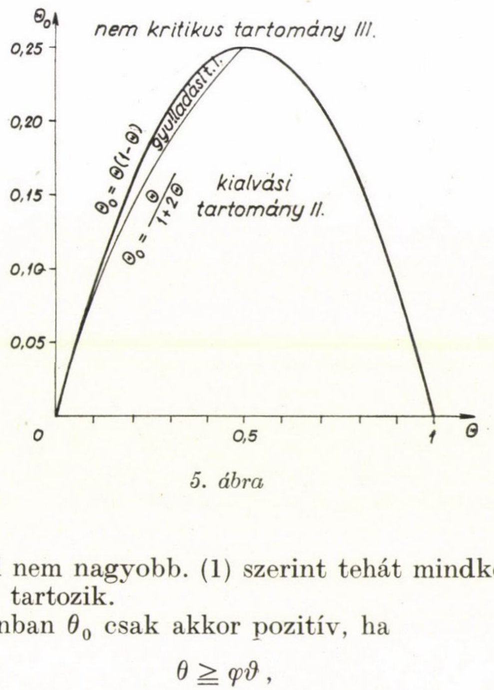
7. Szabad változópár: θ, ϑ. A (3*b*) összefüggés szerint

$$\varphi = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4\frac{\theta^2}{\vartheta}}\,,$$

tehát φ akkor és csak akkor valós, ha

$$\vartheta \geqq 4\theta^2. \tag{21}$$

Ha (21) teljesül, akkor általában két valós φ adódik, φ_+ és φ_-, mind a kettő



5. ábra

nem-negatív és 1-nél nem nagyobb. (1) szerint tehát mindkettőhöz megengedett, nem-negatív τ tartozik.

(2) szerint azonban θ_0 csak akkor pozitív, ha

$$\theta \geqq \varphi\vartheta\,,$$

vagyis ha

$$\theta \geqq \frac{\vartheta}{2} \pm \sqrt{\frac{\vartheta^2}{4} - \vartheta\theta^2}. \tag{22}$$

Ha a φ_+ megoldást választottuk, akkor (22)-ből a

$$\vartheta \leqq 2\theta \quad \text{és} \quad \vartheta \leqq \frac{\theta}{1-\theta} \tag{23}$$

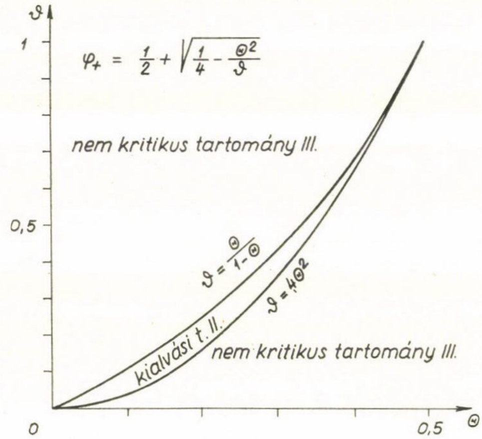
feltételpár származik. A $\vartheta \leqq 2\theta$ feltétel és a (21) feltétel kizárják egymást a $\theta > 1/2$ esetben. Ha viszont $\theta \leq 1/2$, akkor a $\vartheta \leq \theta/1 - \theta$ feltétel teljesüléséből $\vartheta \leq 2\theta$ következik. A kritikus tartomány tehát a $\vartheta = 4\theta^2$ és a $\vartheta = \theta/1 - \theta$ görbék közé eső rész a $\theta \leq 1/2$ intervallumban (6. ábra).

Ha a φ_- megoldást választottuk, akkor (22) szerint a $\vartheta \leq 2\theta$ tartomány bizonyosan kritikus, — hacsak $\vartheta \geq 4\theta^2$.

Ha viszont $\vartheta \geq 2\theta$, akkor a

$$\vartheta \geq \frac{\theta}{1-\theta} \tag{24}$$

feltétel teljesülése szükséges és elégséges ahhoz, hogy $\theta_0 \geq 0$ legyen. Most



6. ábra

tehát a kritikus tartományt a $\theta \leq 1/2$ intervallumban a $\vartheta = 4\theta^2$, a $\theta > 1/2$ intervallumban pedig a $\vartheta = \theta/1 - \theta$ görbe határolja alulról. (7. ábra).

A (6) egyenlőtlenségből a θ, ϑ változópárban

$$0 \gtreqless \theta \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\theta^2}{\vartheta}}$$

lesz. Ha a felső előjelet használjuk (tehát a φ_+ értéket), akkor az egyenlőtlenségben feltétlenül az alsó jel érvényes. Ha a gyököt negatív előjellel vesszük, akkor a belső határgörbe (6. és 7. ábra):

$$\vartheta = \frac{4\theta^2}{1-4\theta^2}. \tag{25}$$

8. Szabad változópár: θ, τ. (1)-ből pozitív és egynél kisebb φ adódik, tehát (3a)-ból pozitív ϑ. Kell, hogy (2)-ből $\theta_0 \geq 0$ legyen, ami — a τ, θ változópárral kifejezve — a

$$\tau \geq \frac{\theta e^{-1/\theta}}{1-\theta} \qquad (\theta \leq 1) \tag{26}$$

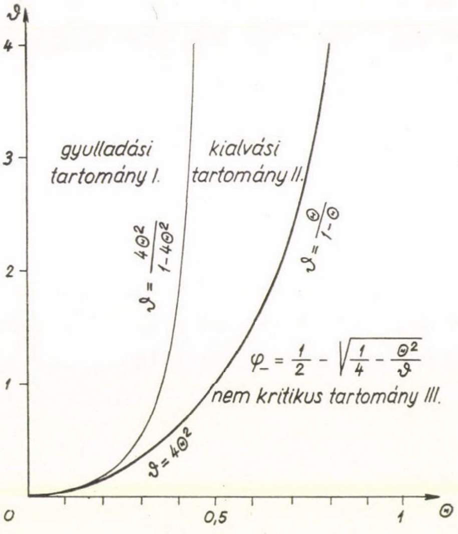
feltételnek felel meg. A mondottak szerint (26) szükséges és elégséges (8. ábra).

A (6) feltételben éppen τ és θ szerepel, tehát a belső határgörbe egyenlete (8. ábra)

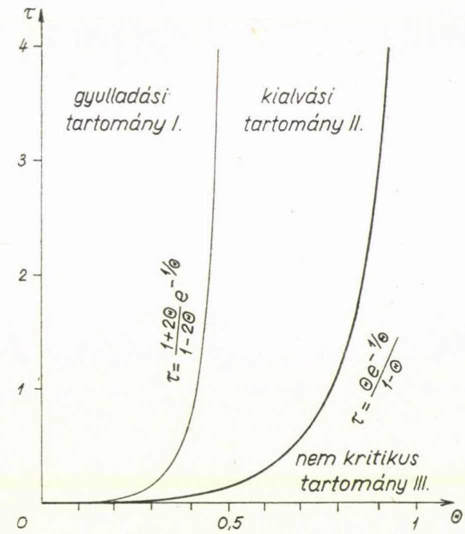
$$\tau = \frac{1 + 2\theta}{1 - 2\theta} e^{-1/\theta} . \tag{27}$$

9. Szabad változópár: θ_0, ϑ. (4) szerint

$$(1 - \varphi)(\theta - \theta_0) = \theta^2,$$



7. *ábra*



8. *ábra*

(2) szerint

$$\varphi = \frac{\theta - \theta_0}{\vartheta},$$

és így θ-ra a

$$\theta^2(1 + \vartheta) - \theta(2\theta_0 + \vartheta) + \theta_0(\vartheta + \theta_0) = 0$$

egyenletet kapjuk. Ennek a másodfokú egyenletnek vagy egyáltalán nincsen valós gyöke, vagy ha van, akkor pozitív. A θ pozitív voltának szükséges és elégséges feltétele tehát azonos azzal a feltétellel, hogy egyáltalán legyen valós gyök:

$$\vartheta \geqq \frac{4\theta_0^2}{1 - 4\theta_0} \quad \text{és természetesen } \theta_0 \leqq 1/4. \tag{28}$$

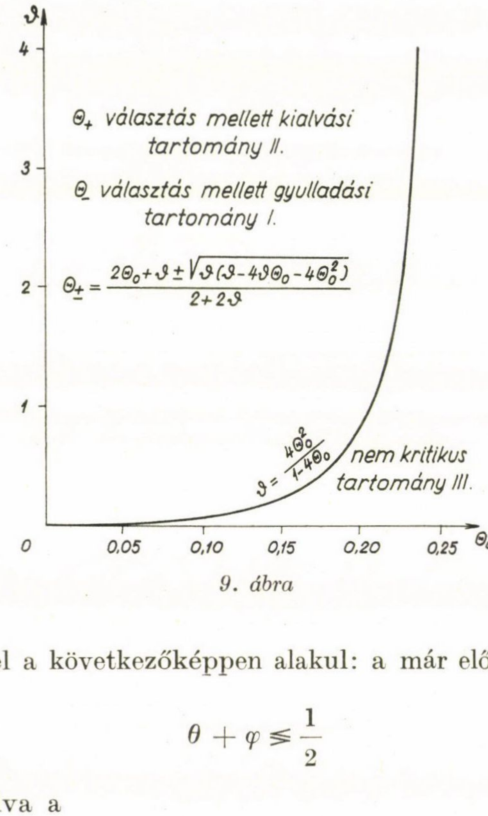
Kérdés, hogy $\theta - \theta_0$ pozitív lesz-e.

$$\theta - \theta_0 = \frac{\vartheta(1 - 2\theta_0) \pm \sqrt{\vartheta^2 - 4\theta_0\vartheta^2 - 4\vartheta\theta_0^2}}{2(1 + \vartheta)},$$

és ez valóban nem kisebb nullánál, akármelyik előjellel is vesszük a gyököt. Mindkét érték, θ_+ és θ_- is megengedett. (2)-ből

$$\varphi = \frac{\theta - \theta_0}{\vartheta}$$

nem-negatív és egynél nem nagyobb, ennélfogva (1)-ből τ is nem-negatív. A (28) feltétel tehát szükséges és elégséges (9. ábra).



9. ábra

A (6) feltétel a következőképpen alakul: a már előbb is használt ekvivalens

$$\theta + \varphi \lesseqgtr \frac{1}{2}$$

feltételből kiindulva a

$$\frac{\vartheta + 2\theta_0}{2(\vartheta + 1)} \gtreqless \theta$$

feltételre jutunk. θ behelyettesítésével

$$0 \gtreqless \sqrt{\vartheta(\vartheta - 4\vartheta\theta_0 - 4\theta_0^2)} \tag{29}$$

adódik. *Ha tehát a θ_+ értéket választjuk, akkor az egész kritikus tartományban a második derivált negatív, ha pedig a θ_- értéket, akkor pozitív* (9. ábra).

10. Szabad változópár: θ_0, τ. A (4) és (1) összefüggésből φ kiküszöbölésével

$$\tau e^{1/\theta}(\theta - \theta_0) = \theta^2(1 + \tau e^{1/\theta}). \tag{30}$$

Ha ebből az összefüggésből pozitív θ adódik, akkor (1) szerint pozitív és 1-nél nem nagyobb φ-t kapunk és (4) ill. (2) szerint akkor ϑ is pozitív lesz. Feltétel tehát csakis a (30) egyenletből származhat. Ezt az összefüggést kell megvizsgálni abból a szempontból, hogy milyen θ_0, τ értékek mellett van valós és nem-negatív megoldása θ-ra.

Jobb áttekinthetőség kedvéért legyen

$$\frac{1}{\theta_0} = s, \quad \frac{1}{\theta} = x,$$

akkor az egyenlet

$$f(x) \equiv x(x - s) + s\left(1 + \frac{1}{\tau} e^{-x}\right) = 0$$

alakú lesz.

Mivel

$$f''(x) = 2 + \frac{s}{\tau} e^{-x} > 0,$$

az $f(x)$ függvény (pozitív x-re) alulról konvex, és $f(0) > 0$ tehát vagy két valós és pozitív gyöke van, vagy egyáltalán nincs gyök. (A határhelyzetben egy kettős gyök van.) Valós gyök létezésének szükséges és elégséges feltétele az, hogy a derivált gyökhelyén (az $f(x)$ minimumpontján), $f(x)$ negatív vagy nulla legyen. Jelöljük a derivált gyökének helyét z-vel. Szükséges és elégséges feltétel tehát, hogy

$$z(z - s) + s\left(1 + \frac{1}{\tau} e^{-z}\right) \leq 0 \tag{31}$$

legyen, ahol z-t a

$$2z - s - \frac{s}{\tau} e^{-z} = 0 \tag{32}$$

egyenlet egyetlen valós pozitív z gyöke definiálja.

A z-t definiáló (32) egyenletet (31) egyszerűsítésére felhasználhatjuk, mivel $s/\tau\, e^{-z} = 2z - s$, behelyettesítve

$$z \leq s - 2 \tag{33}$$

adódik feltételként.

(32) szerint rögzített τ mellett s a z monoton növekedő pozitív $s = g(z)$ függvénye, létezik tehát egy $z(s)$ inverz függvény, amely ugyancsak monoton növekedő és pozitív. Ezért a (33) feltétel,

$$z(s) \leq s - 2,$$

ekvivalens az

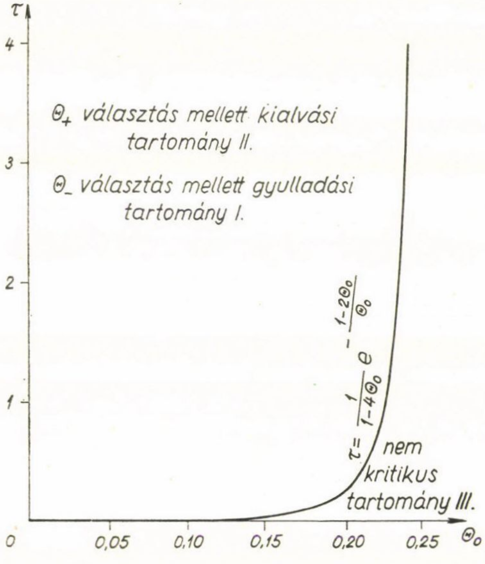
$$s \leq g(s - 2) \equiv \frac{2(s - 2)}{1 + \dfrac{1}{\tau} e^{-(s-2)}}$$

feltétellel, amelyből végső eredményünk,

$$\tau \geqq \frac{s}{s-4}\, e^{-(s-2)} \quad \text{ill.} \quad \tau \geqq \frac{1}{1-4\theta_0}\, e^{-\frac{1-2\theta_0}{\theta_0}} \qquad (\theta_0 < 1/4) \tag{34}$$

átrendezéssel adódik (10. ábra).

A belső határgörbe egyenletét a (30) egyenlet és az egyenlőséggé átírt (6) egyenlőtlenség szimultán megoldása szolgáltatja, ez a görbe azonos a (34) külső határgörbével. A kritikus tartományban tehát a második derivált nem vált előjelet. Az előjel attól függ, hogy a (30) egyenletnek melyik megol-



10. ábra

dását választjuk: ha a *kisebbiket*, akkor a második derivált *pozitív*, ha a *nagyobbikat*, akkor *negatív*.

11. Szabad változópár: τ, ϑ. A θ értéke a

$$\tau\vartheta\, e^{1/\theta} = \theta^2(1 + \tau\, e^{1/\theta})^2 \tag{3a}$$

egyenletből határozandó meg. Ha innen $\theta > 0$ adódik, akkor (1) szerint φ egynél kisebb, (és természetesen pozitív). Kell azonban még, hogy $\theta_0 \geqq 0$ legyen, vagyis, hogy (2)-ből φ-t kiküszöbölve

$$\theta \geqq \frac{\vartheta}{1 + \tau\, e^{1/\theta}} \tag{36}$$

legyen. Vizsgáljuk *először*, mi a feltétele valós és pozitív θ létezésének. Legyen $\theta = 1/2x$, akkor (35) átmegy a következőbe:

$$f(x) \equiv \tau\, e^{2x} + 1 - 2\sqrt{\tau\vartheta}\, x\, e^{x} = 0.$$

Mivel

$$f'(x) = 2\sqrt{\tau}\, e^{x}\left[\sqrt{\tau}\, e^{x} - \sqrt{\vartheta}(1+x)\right],$$

$f'(x)$-nek egyetlen nem negatív gyöke van, ha $\vartheta \geqq \tau$, nincs gyöke, ha $\vartheta < \tau$. Az utóbbi esetben $f'(x) > 0$ és ezért $f(x)$-nek $f(0) > 0$ miatt egyáltalán nem lehet gyöke. Ha $f'(x)$-nek van gyöke, akkor $f(x)$-nek lehet két pozitív valós gyöke, éspedig akkor és csak akkor van, ha $f'(x)$ gyöke helyén, a z pontban $f(z) < 0$. A feltétel tehát

$$(37)\qquad \begin{cases} f(z) \equiv \tau e^{2z} + 1 - 2\sqrt{\tau\vartheta}\, z e^{z} \leqq 0\,, \\ \sqrt{\tau} e^{z} - \sqrt{\vartheta}\,(1+z) = 0\,. \end{cases}$$

A tobábbi teljesen az előző, 10. pontban követett gondolatmenet szerint megy. A feltételként szereplő egyenlőtlenség a

$$\sqrt{\tau} e^{z} = \sqrt{\vartheta}\,(1+z)$$

összefüggés felhasználásával egyszerűsíthető:

$$z \geqq \sqrt{1 + \frac{1}{\vartheta}}\,,$$

és

$$\vartheta = \frac{\tau e^{2z}}{(1+z)^2} \equiv g(z)$$

monoton növekvő pozitív függvénye z-nek. Létezik tehát $z = z(\vartheta)$ monoton növekvő inverz függvény, és

$$z(\vartheta) \geqq \sqrt{1 + \frac{1}{\vartheta}}$$

ekvivalens a

$$\vartheta \geqq g\left(\sqrt{1+\frac{1}{\vartheta}}\right) = \frac{\tau e^{2\sqrt{1+\frac{1}{\vartheta}}}}{\left(1 + \sqrt{1+\frac{1}{\vartheta}}\right)^2}$$

egyenlőtlenséggel, amely átrendezve a

$$(38)\qquad \tau \leqq (\sqrt{\vartheta} + \sqrt{\vartheta + 1})^2 \exp\left\{-2\sqrt{1+\frac{1}{\vartheta}}\right\}$$

feltételt szolgáltatja. (11. ábra) Ez a valós és pozitív θ létezésének feltétele, amely azonban csak szükséges, de még nem elégséges a kritikus tartomány kijelöléséhez, mert nem elégséges θ_0 pozitív voltának biztosítására, hiszen annak feltétele (36). Általában két θ adódik, jelöljük őket θ_+ ill. θ_--szal.

Az elégséges feltétel megállapításához először a ($3a$) felhasználásával a (36) feltételt egyszerűsítjük. A következő feltételre jutunk:

Legyen

$$(39)\qquad e^{1/\theta} \geqq \frac{\vartheta}{\tau}\,.$$

A $\theta = \theta(\tau, \vartheta)$ felület a mondottak szerint kétlevelű, a két levél egy térgörbe mentén függ össze, amelynek vetülete a síkra éppen a (38) egyenletű görbe. A (3*a*) egyenlőség és a (39)-ből származó

$$e^{1/\theta} = \frac{\vartheta}{\tau}$$

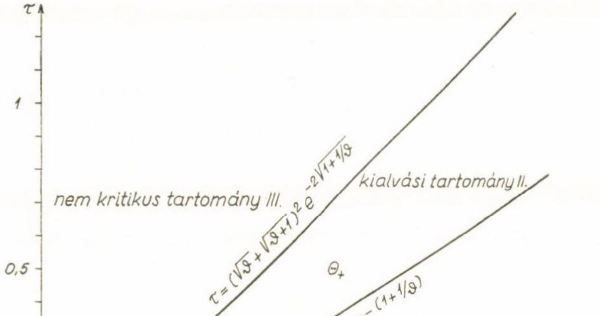
egyenlőség ugyancsak egy térgörbét határoznak meg, amelynek vetülete a τ, ϑ síkra

$$\tau = \vartheta\, e^{-\left(1 + \frac{1}{\vartheta}\right)}. \tag{40}$$

Mivel

$$(\sqrt{\vartheta} + \sqrt{\vartheta + 1})^2\, e^{-2\sqrt{1 + \frac{1}{\vartheta}}} > \vartheta\, e^{-\left(1 - \frac{1}{\vartheta}\right)}, \quad \text{ha} \quad \vartheta > 0,$$

a két térgörbe az origón kívül nem metszi egymást. Ennélfogva az utóbbi



11. ábra

térgörbe, amely a $\theta = \theta(\tau, \vartheta)$ felületen elválasztja a $\theta_0 > 0$ és $\theta_0 < 0$ tartományokat, teljes egészében a $\theta = \theta(\tau, \vartheta)$ felület *egyik* levelén van. Annak megállapítására, hogy melyik levélen van, nézzük meg, hogy a két levelet elválasztó határgörbe a kritikus tartományban van-e. Valóban a kritikus tartományban van, mert (37) szerint ezen a görbén (39) teljesül, és ennélfogva a $\theta_0 = 0$ feltételt kifejező görbe a felső levélen fekszik. Kritikus tehát az egész alsó levél és a felső levélnek a (38) és (40) vetületű görbék közé eső része. A vetületekben kifejezve: θ_- mellett kritikus a (38) görbe alatti rész. θ_+ mellett kritikus a (40) és (38) görbék közé eső rész (11—12. ábra).

A belső határgörbe egyenlete a

$$\tau\, e^{1/\theta} = \frac{1 + 2\theta}{1 - 2\theta}$$

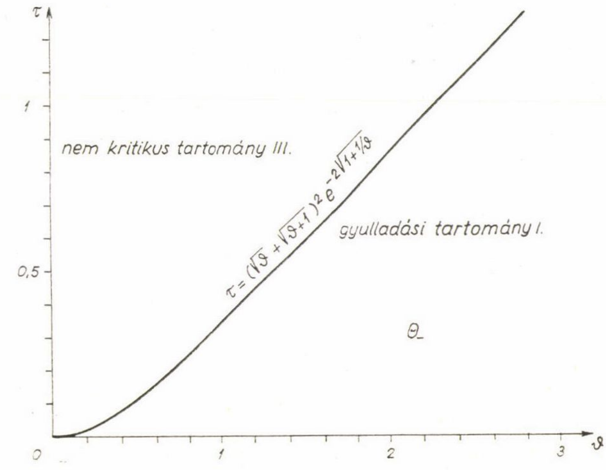
ill.

$$\tau\vartheta\, e^{1/\theta} = \theta^2 (1 + \tau\, e^{1/\theta})^2 \tag{3a}$$

egyenletpárból

$$\tau = (\sqrt{\vartheta} + \sqrt{\vartheta + 1})^2 e^{-2\sqrt{1+\frac{1}{\vartheta}}},$$

ami azonos a (38) görbével. Az alsó levélen vannak a kisebb θ értékek, a felsőn a nagyobbak (azonos τ mellett), tehát az alsó levélen (6) a $>$ jellel, a felsőn a $<$ jellel érvényes (11—12. ábra).



12. ábra

II. A kritikus állapotok nomografikus ábrázolása

A jelen nomogramok alapján (13., 14., 15. ábrák (l. melléklet)) a

(1) $$\varphi(1 + \tau e^{1/\theta}) = 1\,,$$

(3b) $$\vartheta\varphi(1 - \varphi) = \theta^2,$$

(4) $$(1 - \varphi)(\theta - \theta_0) = \theta^2,$$

összefüggéseknek eleget tevő „kritikus" paraméterértékek határozhatók meg. Mivel az öt paraméter között három összefüggés van, bármely kettőt rögzítve a maradék három meghatározható. A nomogramok úgy vannak megszerkesztve, hogy bármely két paraméter ismerete alapján a maradék három leolvasható legyen.

Az alaprács a θ és φ változókban logaritmikus, az értékhatárok $0{,}01 \leqq \theta \leqq 0{,}5$ ill. $0{,}01 \leqq \varphi \leqq 1$. Az alaprács paramétereinek azért választottuk θ-t és φ-t, mert bemenő adatként ezek szerepelnek legtöbbször. Az alaprácsra felvettünk a maradék három változó közül egy-egyet, ha tehát θ és φ ismeretes, akkor mindegyik nomogramról leolvasható a maradékváltozók egyike. Ha θ és φ közül csak az egyik rögzített és a másik rögzített paraméter τ, θ_0 vagy ϑ, akkor a megfelelő nomogramról leolvasható φ, ill. θ közül a hiányzó, és azután a többi nomogramokról a maradék két paraméter. Ha azonban sem θ sem φ nem ismert, akkor két nomogramot egymásra kell helyeznünk, úgy, hogy alaprácsuk pontosan illeszkedjék egymáshoz és a két megadott paraméter görbeseregéből kiválasztva a megfelelőket, a metszéspontjuk vagy metszéspontjaik meghatározzák θ-t és φ-t, a hiányzó ötödik paraméter pedig az előbbi módon olvasható le.

Önmagában bármelyik nomogram görbeserege kiegyenesíthető (anamorfizálható) lett volna, ami redukálta volna a rajzmunkát, nem sikerül azonban mindhárom nomogramot ugyanazzal a transzformációval kiegyenesíteni, márpedig ez volna szükséges ahhoz, hogy a keresett paraméterek leolvashatók legyenek akkor is, ha két nomogram egymásra helyezésével kell dolgoznunk.

III. A krízismentes állapotok ábrázolása

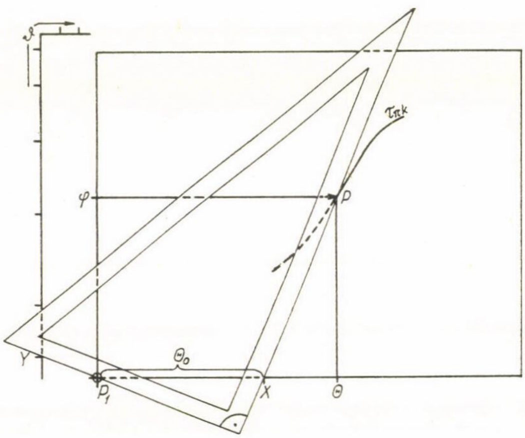
A feladat az volt, hogy a φ, θ, θ_0, ϑ, τ változó-ötös között fennálló

$$\varphi(1 + \tau e^{1/\theta}) = 1\,, \tag{1}$$

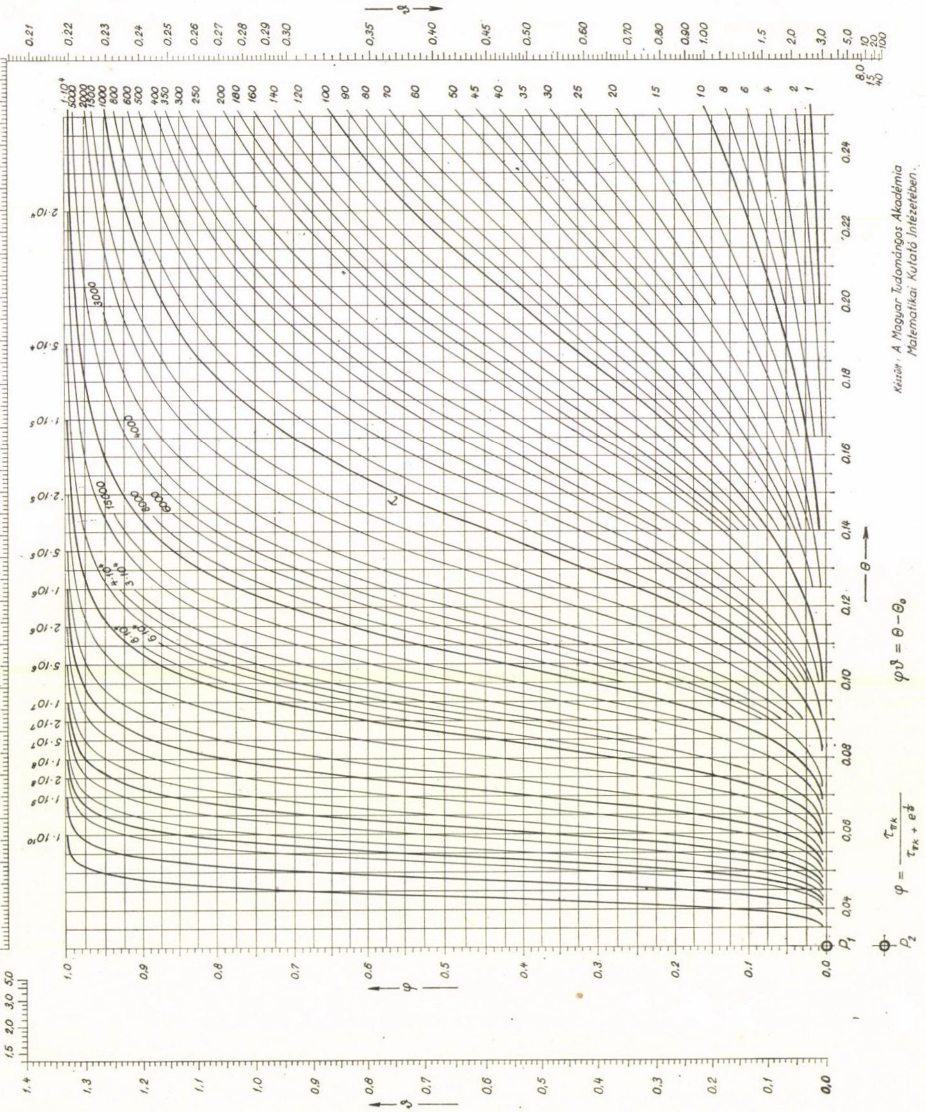
$$\varphi\vartheta = \theta - \theta_0 \tag{2}$$

összefüggésekkel adott törvényszerűséget grafikusan ábrázoljuk, abban az értelemben, hogy ha a változók közül tetszőlegesen kiválasztunk kettőt, és ezeknek rögzített értéket adunk, akkor a maradék változók közötti összefüggések könnyen leolvashatók legyenek. Ezt a — nomogramtechnikában eléggé szokatlan — feladatot egy görbesereges nomogramhoz kapcsolt derékszögleolvasású nomogrammal oldottuk meg (17. ábra).

A görbesereges nomogram az (1) kapcsolatot ábrázolja. Ehhez kapcsoltunk egy (felül megtört) ϑ skálát. A leolvasás kulcsát a 16. ábra mutatja. Tegyük fel, hogy adva van φ és θ. Ekkor τ egyértelműen meg van határozva és a görbesereges diagramon leolvasható. A φ és θ-val kimetszett P ponton és a P_1 póluson át fektessünk egy *derékszögű* vonalzót az ábrán látható módon.



16. ábra

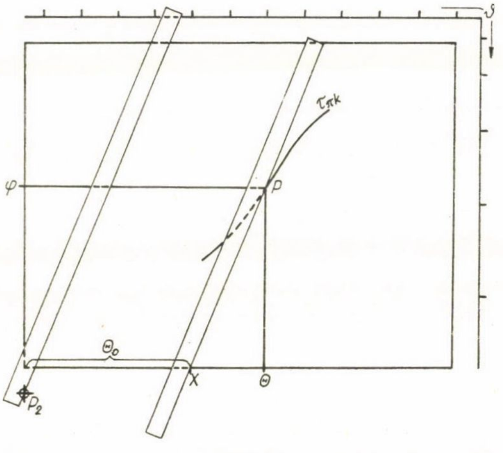

$\varphi = \frac{\tau_{\pi k}}{\tau_{\pi k} + e^{\vartheta}}$
$\varphi\vartheta = \Theta - \Theta_0$
Készült: A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetében.

17. ábra

A vonalzó beállítása természetesen nem egyértelmű, de akárhogy is állítjuk be, az egyik szára az alsó θ tengelyen kimetsz egy X pontot, amely ponthoz tartozó érték a θ skálán megadja θ_0 értékét, a másik szárának a ϑ skálával való Y metszéspontja pedig ϑ értékét. Ha tehát a derékszögű vonalzót elkezdjük forgatni azzal a megszorítással, hogy egyik szára mindig a P ponton, másik szára a P_1 pólusponton menjen át, akkor az X, Y pontpár, mozgása közben, leírja a (2) összefüggést, másszóval megadja mindazokat az összetartozó θ_0, ϑ értékpárokat, amelyek kielégítik a (2) összefüggést.

Ugyanez a szerkesztés alkalmazható, ha a θ, φ, τ hármasból bármelyik kettő meg van adva, mert a hiányzó harmadik egyértelműen meg van határozva és a görbesereges nomogramról leolvasható, a P pont tehát rögzített.

Ha φ és θ_0 van adva, akkor a vonalzó beállításhoz a P_1 pólus és az X pont van meg. Forgatva a vonalzót, egymásután adódnak az összetartozó



18. ábra

ϑ, θ, τ hármasok, éspedig ϑ értékét mutatja az Y pont, a P pont pedig a megadott φ magasságában vándorol és mutatja θ, ill. τ értékét.

Ha φ és ϑ van adva, akkor a vonalzó állását a most rögzített Y pont és a pólus meghatározzák. A vonalzót még önmagával párhuzamosan csúsztatni lehet és eközben a vándorló X és az adott φ magasságában vándorló P pont megadják az összetartozó θ ill. τ értékeket. Hasonlóan olvashatók le az összetartozó értékek, ha φ helyett θ szerepel, ebben az utóbbi esetben a P pont nem φ mentén vízszintesen, hanem az adott θ egyenes mentén vándorol. Ha pedig θ vagy φ helyett τ van adva, akkor a megfelelő görbe mentén csúszik el a P pont a forgó vagy csúszva forgó vonalzó mentén.

Végül, ha a θ, φ, τ hármasból egyik sincs adva, hanem ahelyett ϑ és θ_0 akkor a megadott X, Y, P_1 ponthármas rögzíti a derékszögű vonalzót, a vonalzó másik éle, mint egyenes, pedig mutatja az összetartozó értékhármasokat.

A görbesereges nomogram tetején és jobbszélén egy másik skála látható. Ehhez a skálához tartozik a P_2 pólus; a ϑ skála, a P_2 pólus és a görbesereges rész együtt egy *párhuzamos* leolvasású összetett nomogramot alkotnak, amelynek leolvasása kényelmetlenebb, nem mutatja világosan az összefüggéseket a maradékváltozók között, azonban ha nem két, hanem *három változó van adva*, akkor az ilyen módon teljesen egyértelműen meghatározott maradék két változó értékének az előbbinél valamivel pontosabb leolvasását teszi lehetővé, azokban az esetekben, amikor ϑ értéke kicsiny.

A leolvasás kulcsát mutatja a 18. ábra. Eszerint, ha adva van a változóhármasból bármelyik kettő és pl. θ_0, akkor az így meghatározott X és P ponton át fektessünk vonalzót, majd önmagával párhuzamosan toljuk el a P_2 pólushoz, és ebben a helyzetben a vonalzó éle a felső vagy jobboldali skálán kimetsz egy pontot, amely ϑ-val van skálázva. Ha θ_0 helyett ϑ van adva, akkor ez az érték és a P_2 pólus meghatározzák a vonalzó irányát. Toljuk el önmagával párhuzamosan a P ponthoz, és ebben a helyzetben éle kimetszi a θ_0 értékét.

Ha a φ, θ, τ változóhármasból csak az egyik van adva, akkor — mivel összesen három ismert adatunknak kell lenni — feltétlenül adva van θ_0 és ϑ is. Az utóbbi kettő meghatározza a vonalzó irányát (a P_2 pólus és ϑ), de a helyzetét is a jelen esetben adott X pont segítségével, rögzíthetjük tehát a vonalzót és a vonalzó éle harmadik változó értékével együtt meghatározzák a P pontot. Ha speciálisan a φ, θ, τ változóhármasból éppen τ adott, akkor egyes esetekben három metszéspont, három P pont és ennek megfelelően három φ, θ értékpár adódik, a megoldás nem egyértelmű. Ez a jelenség azonban az (1)—(2) összefüggéspár szerkezetéből következik, ezeknek mint φ, θ-ra szóló egyenleteknek lehet három valós gyöke.

(Beérkezett: 1962. október 5)

IRODALOM

[1] Вулис, Л. А.: *Тепловой Режим Горения.* (М.—Л. 1954.)
[2] Fáy Gy. — Zselev B.: „Égésfolyamatok vizsgálata a stacionárius hőállapotok módszerével." *Magyar Kémiai Folyóirat*, sajtó alatt.
[3] Békéssy A. — Fáy Gy.: „A tüzeléstechnikai reprezentáció elméletéről". *Magyar Kémiai Folyóirat*, sajtó alatt.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ГОРЕНИЯ И ИХ НОМОГРАФИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА

A. BÉKÉSSY и GY. FÁY

Резюме

Предметом настоящей статьи являются соотношения (1), (2), соотв. (3) и (6), которые можно вывести из теории Л. А. Вулиса. Физическое значение пяти переменных φ, θ, θ_0, ϑ, τ, а также уравнений (1) — (3) разъяснены в работах [2], соотв. [3] и авторы этим вопросом здесь не занимаются. Они исследуют уравнения с чисто математической точки зрения.

В качестве «основного предположения» предполагается, что переменные φ, θ, θ_0, ϑ, τ, удовлетворяющие уравнениям (1), соотв. (2) положительны. Та область в пространстве переменных, в которой можно удовлетворить уравнению (3), называется «критической» областью. Её дополнительная область характеризуется тем, что в ней уравнение (3) противоречит основному предположению. Первой задачей является графическое пред-

ставление критической области через её проекции на плоскостях (φ, θ), (φ, θ_0) и т. д. Кроме того необходимо наметить также подобласти критической области, определяемые неравенством (6). Результаты показаны на рисунках 1—12. Рассуждения, необходимые для определения соответственных ограничивающих кривых, являются элементарными, часть их очевидна, однако в случае 10—11 (1) требуются более глубокие рассуждения. Серия номограмм, изображенных на рисунках 13, 14 и 15, представляет связь между переменными в том случае, когда удовлетворены не только соотношения (1) и (2), а также и (3). Если заданы значения любых двух из переменных внутри критической области, тогда можно из этих номограмм сразу найти соответствующую тройку остальных трех переменных.

Третяя задача — номографическое представление системы уравнений (1) — (2). Поскольку значения трёх переменных зафиксированы, значения остальных двух определены системой уравнений (1) — (2) и тогда можно было бы их найти при помощи подходяще конструированных номограмм. Однако, если только две переменные зафиксированы, тогда значения остальных трех не определены полностью, а существует только связь между ними. Авторы построили такую номограмму, (рис. 17), которая представляет эту связь в таком смысле, что если заданы значения любих двух из переменных, тогда систему троек остальных переменных можно удобно считать. Пользование номограммой объясняются на рисунках 16, соотв. 18.

QUALITATIVE INVESTIGATIONS AND NOMOGRAPHIC REPRESENTATION OF BASIC EQUATIONS IN A THEORY OF COMBUSTION

by

A. BÉKÉSSY and GY. FÁY

Abstract

The equations (1) and (2) in connection with (3) and with the inequality (6), deducible from the theory of L. A. Vulis [1], are the objects of the present paper. The physical meaning of the five variables φ, θ, θ_0, ϑ, τ and that of the equations (1)—(3) is explained in [2], [3] and not treated here. The equations are regarded only from a purely mathematical point of view.

Let us suppose — as ,,basic assumption'' — that the variables φ, θ, θ_0, ϑ, τ are connected by (1), (2) and that they must have positive values. In the space of the variables there will be then a domain — called the "critical" domain — in which the equation (3) may also be satisfied, — whereas the complementary domain is characterized by the fact that equ. (3) contradicts the basic assumptions. The first problem was to represent the critical domain by its projections on the planes (φ, θ), (φ, θ_0), etc. graphically. Moreover, inside the critical domain, the marking of the subdomains determined by (6) was wanted. Our results are the figs. 1—12. The considerations, necessary for computing the suitable delimiting curves, are elementary.

The system of the three nomograms (figs. 13, 14, 15) represent the connection between the variables, if not only (1) and (2) but also (3) are

stisfied. Given a pair of values of any two variables (inside the critical domain), the corresponding values of the other three variables may be read off.

The third problem concerns the nomographic representation of the system of equs. (1) and (2). Now, if we have the values of *three* variables, then the remaining two ones are fixed by the system (1)—(2) and suitable nomograms can be constructed for reading off their values, but, supposing only *two* variables as fixed, the remaining three ones are not completely determined, they are *connected* only. We constructed a nomogram, — reproduced now as fig. 17 — representing this connection in the sense that, being given a pair of values of any two variables, the system of triplets of values of the remaining three ones may be conveniently read off. The method of its using is explained by figs. 16 and 18 resp.

5/9-ES FRAKCIONÁLIS FAKTORIÁLIS KÍSÉRLET TERVE

BÁNKÖVI GYÖRGY és SARKADI KÁROLY

Bevezetés

A dolgozatunkban leírt kísérleti tervet a Nagynyomású Kísérleti Intézet megbízásából dolgoztuk ki 1961-ben.

A Nagynyomású Kísérleti Intézet munkatársai új eljárást próbáltak ki dieselolajak kéntelenítésére. Az egyik felmerülő feladat az volt, hogy a kéntelenítési hatásfoknak a beállítható műveleti tényezőktől (nyomás, hőmérséklet stb.) való függését megállapítsák (részletesen lásd [1]). Ezen feladat megoldása — tekintettel az elvégzendő kísérletek nagy számára — igen költséges és hosszú ideig elhúzódó munka lett volna.

A kísérletezés költségeinek és időtartamának jelentős csökkentése érhető el a matematikai statisztika alkalmazása által. A kísérletezés tervének matematikai alapon való kidolgozása — bizonyos egyszerű feltételek teljesülése esetén — lehetővé teszi, hogy a szükségesnek látszó kísérleteknek csak egy részét végezzék el, mert a kapott kísérleti eredményekből a többi (el nem végzett) kísérlet várható eredménye számítással igen pontosan becsülhető.

Dolgozatunk 1. és 2. §-ában röviden ismertetjük a faktoriális kísérletek, illetve a frakcionális faktoriális kísérletek alapelveit. A 3—6. §-okban az általunk kidolgozott, bizonyos tekintetben új kísérleti tervet írjuk le. A 7. § gyakorlati útmutatás a számítások elvégzéséhez.

Megjegyezzük, hogy a dolgozatunkban leírt és ehhez hasonló kísérleti tervek nemcsak a vegyiparban alkalmazhatók sikerrel, hanem számos egyéb iparágban, valamint a mezőgazdaságban is.

Magyarországon a faktoriális kísérleteket a mezőgazdaságban több mint egy évtizede alkalmazzák, s reméljük, dolgozatunk hozzájárul ahhoz, hogy ez a módszer az iparban is elterjedhessen. Tudomásunk szerint a magyar nyelvű irodalomban még nem jelent meg olyan mű, amely a frakcionális faktoriális kísérletek tervezésével foglalkoznék. Dolgozatunk megfogalmazásánál erre a körülményre tekintettel voltunk, és bár a közölt matematikai modell teljes megértése feltételezi az idézett szakirodalom ismeretét, a modell gyakorlati alkalmazása a 7. § útmutatása alapján alaposabb szakismeret nélkül is megvalósítható.

1. §. Faktoriális kísérletek

A mezőgazdasági és az ipari kísérleteknél igen gyakran előfordul, hogy a kísérletek eredményeit befolyásoló tényezők egy részét a kísérletező előre be tudja állítani bizonyos értékekre. A kísérletezés célja ilyenkor legtöbbször az, hogy a jelenség lefolyásának a beállítható tényezőktől való függését megtalálják, ami különösen az optimális feltételek megválasztása szempontjából érdekes.

A matematikai tárgyalásban a kísérleti körülmények tudatos megválasztásánál szerepet játszó tényezőket *faktoroknak*[1] nevezik. A kísérletek során mindegyik faktor csak néhány kijelölt értéket vehet fel; ezeket az értékeket a faktor szintjeinek nevezik és általában 0-tól kezdődően számozzák.[2]

A faktoriális kísérletek eredményeinek kiértékelése speciális többváltozós regresszió-számítási feladat. A legegyszerűbb modellnél a következő feltételezésből indulnak ki:

$$y_{ij} = \mu + A_i + B_j + \varepsilon_{ij} \qquad (i, j = 0, 1) \tag{1}$$

ahol

i és j az első ill. a második faktor szintjei,

y_{ij} a kísérlet mért eredménye,

μ konstans,

A_i és B_j az első faktor i-edik, ill. a második faktor j-edik szinten való fellépésének tulajdonított hatás,

ε_{ij} normális eloszlású valószínűségi változó (véletlen hatás), $\mathbf{M}(\varepsilon_{ij}) = 0$, $\mathbf{D}^2(\varepsilon_{ij}) = \sigma^2$; továbbá az ε_{ij}-k összességükben független valószínűségi változók $(i, j = 0, 1)$.

Az A_i és B_j mennyiségekre vonatkozóan nyilván feltételezhető a

$$\sum_{i=0}^{1} A_i = 0, \quad \sum_{j=0}^{1} B_j = 0 \tag{2}$$

összefüggések fennállása (ha például $\sum_{i=0}^{1} A_i = c \neq 0$ lenne, akkor az (1) összefüggést így írhatnánk:

$$y_{ij} = \mu' + A_i' + B_j + \varepsilon_{ij},$$

ahol

$$\mu' = \mu + \frac{c}{2}, \quad A_i' = A_i - \frac{c}{2} \qquad (i = 0, 1),$$

és így $\sum_{i=0}^{1} A_i' = 0$).

A (2) feltevés mellett

$$\mu = \frac{1}{4}\mathbf{M}\left(\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} y_{ij}\right)$$

a kísérletsorozat egyszeri végrehajtásánál.

---

[1] *Példa faktorokra.* Növénytermesztési kísérleteknél: öntözés, műtrágyázás; biológiai kísérleteknél: kísérleti állatok neme vagy életkora; ipari kísérleteknél: hőmérséklet, nyomás.

[2] Például, ha egy ipari eljárást 200° C, 300° C és 400° C hőmérsékleten próbálnak ki, akkor ezeket a hőfokokat a „hőmérséklet" faktor nulladik, első, illetve második szintjeinek tekintik. A faktor szintjei csak különböző beállítást, de nem feltétlenül mennyiségi változást jelentenek; így például a hím-, illetve nőstényállatok kísérleti alanyként való felhasználása a „kísérleti állatok neme" faktor nulladik, ill. első szintjének tekinthető.

Említettük, hogy modellünk konstansainak meghatározása speciális többváltozós regressziószámítási feladat. Ha összehasonlítjuk feladatunkat a regressziószámítás szokásos modelljével (l. pl. [9], 376—380 o.), akkor feltűnik, hogy míg az idézett helyen a meghatározandó állandók szorzói, az x_{ik} számok általában tetszőleges számok lehetnek, a mi esetünkben ezek csak 0 és az 1 értéket veszik fel (aszerint, hogy a kérdéses állandó az (1) megfelelő egyenletében szerepel vagy sem). Látszólagos különbséget jelent az, hogy a mi esetünkben az együtthatók között a (2) alatt feltüntetett összefüggések állnak fenn, ez a különbség azonban a felesleges állandók eliminálásával könnyen kiküszöbölhető és így feladatunk a regressziószámítási feladatok megoldásának smert módszerével, a legkisebb négyzetek módszerével is megoldható (a dolgozatunkban tárgyalt modell ezen az úton 33 ismeretlenes egyenletrendszerre vezet). Azonban, mint látni fogjuk, a faktoriális kísérleteknél fellépő szimmetriatulajdonságok megengedik, hogy ugyanehhez az eredményhez sokkal egyszerűbb számítással eljussunk.

Főhatások és interakciók. Az (1) képlet olyan modellt ír le, amelynél az egyik faktor különböző szinteken kifejtett hatásai nem függnek a másik faktor szintjétől.[3] A modell továbbfejlesztése a következő formában írható fel:

$$y_{ij} = \mu + A_i + B_j + AB_{i+j} + \varepsilon_{ij} \qquad (i, j = 0, 1)\,. \tag{3}$$

Az (1) képlettől való eltérést az AB_{i+j} tag bevezetése jelenti. (Az $i + j$ index mod 2 értendő.) Ezek a mennyiségek annak mérésére szolgálnak, hogy az első faktor hatásának megváltozását (a faktor szintje megváltoztatásának következményeként) a második faktor rögzített szintje mellett, mennyire befolyásolja a második faktor más szinten való rögzítése. (Ha a második faktor beállítása közömbös az első faktor hatása szempontjából, az AB_{i+j} mennyiségek nyilván 0-val egyenlők; ekkor jutunk az (1) képlethez.) Az AB jelölés nem szorzat, hanem egységes szimbólum, az AB_{i+j} mennyiségek, amelyeket a két faktor *elsőrendű interakcióinak* neveznek, célszerűen úgy értelmezhetők, hogy a faktorok sorrendjének semmi jelentősége se legyen.

(2)-höz hasonlóan feltehető, hogy

$$\sum_{r=0}^{1} AB_r = 0\,. \tag{4}$$

Kettőnél több faktor esetén magasabbrendű interakciókról is beszélhetünk; így például, ha négy faktor mindegyike két szinten szerepel, az ABC_{i+j+k}, ABD_{i+j+l}, ACD_{i+k+l}, BCD_{j+k+l} *másodrendű interakciók* és az $ABCD_{i+j+k+l}$ *harmadrendű interakciók* is figyelembe vehetők (i, j, k és l az első, második, harmadik, illetve negyedik faktor szintjei, az indexek mod 2 értendők). Az interakciók összeszámlálásakor a csak alsó indexben különböző konstansokat általában nem szokták külön interakcióknak tekinteni, hanem azokat ugyanazon interakció különböző komponenseinek nevezik. Így például az AB_0 és AB_1 konstansokat az AB interakció komponenseinek nevezik. Ezt a terminológiát értelemszerűen főhatásoknál is alkalmazzák. Az eddig

[3] Az A_i és B_j mennyiségeket az első, illetve a második faktor *főhatásainak* nevezik, amelyek a faktorok rögzített szinten kifejtett átlagos hatásának mérésére szolgálnak.

tárgyalt esetben, tehát amikor a faktorok szintjeinek száma 2, az interakciók is két-két komponenssel rendelkeznek.

Visszatérve arra az esetre, mikor a faktorok száma is csak 2, megfigyelhetjük, hogy az AB interakció az y_{ij} függvényeket két egyenlő osztályba osztja: az egyikben, ahol $i + j$ páros, az interakció a (3) egyenlet kifejezésében a 0 szinten szerepel, míg a másik osztályban az 1 szinten. Megjegyezzük továbbá, hogy a (3) egyenlet szerinti modell feltételezése — meghatározatlan konstansokkal — az y_{ij} változók várható értékeire semmi megszorítást sem jelent, a várható érték ismeretében a (2) és (4) összefüggések figyelembevételével a (3)-ban szereplő konstantsok egyértelműen meghatározhatók. (Ezzel szemben az (1) egyenletnek megfelelő modell feltételezése esetén fennáll a várható értékek között az $\mathbf{M}(y_{11}) + \mathbf{M}(y_{22}) = \mathbf{M}(y_{12}) + \mathbf{M}(y_{21})$ reláció.)

Általában, több faktor esetén is, ha mindegyik faktor 2—2 szinten szerepel, ugyancsak érvényes, hogy mindegyik interakció két egyenlő osztályba sorolja a lehetséges szintkombinációk halmazát. Hasonlóképpen igaz az is, hogy az összes lehetséges interakciók szerepeltetése esetén (pl. 3 faktor (A, B, C) esetén az AB, AC, BC és ABC interakciók alkalmazása mellett) a változók várható értékeire semmilyen megszorítást nem jelent a modell.

Tekintsük most a három szint esetét. Legyen két faktorunk, mindegyik 3—3 szinten. Most is alkalmazhatjuk a (3) egyenlet által megadott modellt (ahol most i és j a 0, 1, 2 értékeket veszik fel), természetesen a (2) és a (4) képleteknek megfelelő relációkat is, csak ezekben 2-ig megy az összegezés, az AB indexei pedig mod 3 értendők. Könnyen meggyőződhetünk azonban róla, hogy most a (3) képlet nem jelenti a lehető legáltalánosabb modellt: hiszen a változók száma 9, a független konstansok száma pedig 7. Tehát itt, ha általánosabb modellt akarunk alkalmazni, még egy elsőrendű interakciót kell szerepeltetnünk. Ezt úgy definiáljuk, hogy az $i + 2j$ értékeinek megfelelően bontsa 3 osztályra az y_{ij} változók halmazát. Az új interakciót az AB^2 jellel jelezzük, komponensei: AB_0^2, AB_1^2, AB_2^2, és az y_{ij} kísérletnek a modell az AB_{i+2j}^2 komponenst felelteti meg (az index itt is mod 3 értendő). Így tehát a modell a következő lesz:

$$y_{ij} = \mu + A_i + B_j + AB_{i+j} + AB_{i+2j}^2 + \varepsilon_{ij} \qquad (i, j = 0, 1, 2)\,.$$

Az AB^2 szimbolumban a B felett álló 2 index a j együtthatójára utal.

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy ez a modell a 2 faktoros 3 szintes faktoriális kísérlet legáltalánosabb modellje: éppen 9 független állandónk van, mert a főhatások és az interakciók 3—3 komponense mind 0-ra összegeződik. Önként felvetődik azonban a kérdés, hogy miért alkalmazzuk i-nek és j-nek ezt a két függvényét: az $i + j$ meg az $i + 2j$ függvényt interakciók definiálására? Ennek a magyarázata a következő: a 3-as modulusra vonatkozóan csak 4 különböző lineáris függvény van, amelyben pontosan 2 változó szerepel:

$$x_1 + x_2, \quad x_1 + 2x_2, \quad 2x_1 + x_2, \quad 2x_1 + 2x_2\,.$$

Ezek közül a második kettő az első kettőtől csak konstans faktorban különbözik:

$$2x_1 + x_2 \equiv 2(x_1 + 2x_2)\,,$$
$$2x_1 + 2x_2 \equiv 2(x_1 + x_2)\,.$$

Az egymástól csak konstans faktorban különböző lineáris függvények nem alkalmasak külön-külön interakció definiálására, mert az így nyert interakciók ugyanazt a felosztást generálnák a kísérletek között és ezért egymástól megkülönböztethetetlenek volnának.

Továbbmenve 3 faktor esetére, hasonló elvek alapján építhetjük fel modellünket. Itt szerepelnek az A, B, C főhatások, az AB, AB^2, AC, AC^2, BC, BC^2 elsőrendű interakciók és az ABC, ABC^2, AB^2C, AB^2C^2 másodrendű interakciók. Az interakciók indexei értelemszerűen úgy állapítandók meg, mint az előző esetben. Nem szerepeltetünk itt sem olyan interakciókat, amelynek szimbólumában az elsőnek álló betű felett hatványkitevő van.

4 faktor esetén a fenti modell értelemszerűen továbbfejleszthető; itt már harmadrendű interakciók is felléphetnek.

Megismételt kísérletek. Egyszerűség kedvéért térjünk vissza a (3) modell esetére. Említettük, hogy az y_{ij} változók várható értékei a modellben szereplő konstansokat egyértelműen meghatározzák. Tehát amennyiben a kísérletek eredményei véletlen hibától mentesek lennének, elég lenne a faktorok szintjeinek minden kombinációja mellett egy-egy kísérletet végrehajtani; az így kapott négy egyenletből a fenti ismeretlenek meghatározhatók. Ha azonban a véletlen hatása nem elhanyagolható, az egyenletek megoldása bizonytalanságot rejt magában (újabb kísérletsorozat esetén más értékeket kapnánk), és ezen bizonytalanság mértékére nézve nincs információnk. A szükséges információ megszerzése a kísérletek számának növelése útján történik.

A fenti példában a késérletsorozat R-szeri ($R = 2, 3, \ldots$) végrehajtása ($4R$ mérés) alapján σ^2 $4R - 4$ szabadságfokú kifejezéssel becsülhető; σ^2 ismeretében valószínűségi következtetések vonhatók le arra nézve, hogy a μ, A_1, A_2 stb. kifejezések számított értékei mennyire térhetnek el valódi értékeiktől.

Blokkok. A faktoriális kísérleti modellek alapfeltevése, hogy a kísérleti eredmények — a véletlen ingadozást leszámítva — csak a figyelembe vett faktoroktól függnek, azaz a kísérletezés körülményei a szintek különbözőségétől eltekintve változatlanok. Ennek a feltevésnek a helyessége sok kísérlet elvégzése esetén erősen kétséges lehet; ezen hibaforrás kiküszöbölésére szolgál a kísérletnek kisebb csoportokba, ún. blokkokba való beosztása.[4]

A blokkbeosztást általában úgy szokták megszabni, hogy valamilyen magasabbrendű interakciót (interakciókat) választunk ki, (elsősorban olyant, amelyről feltételezzük, hogy eltűnik) és azok a kísérletek kerülnek azonos blokkba, amelyekben ez a kiválasztott interakció (interakciók) egyforma szinten szerepel. Ilyen módon természetesen a kiválasztott interakció a kísérletekből nem becsülhető meg, mert nem tudjuk szétválasztani a blokkhatástól: azt mondjuk, hogy az interakció *keveredik* a blokkhatással.

Ipari kísérleteknél azonban olykor — és ez így történik a mi esetünkben is — blokkonként egy-egy *kontrollkísérletet* is végeznek, annak érdekében, hogy a blokkhatást már a kísérletek végzése közben is szemmel tudják tartani és szükség esetén a berendezésen beállítást végezni. A kontrollkísérlet elvégzése mindegyik blokkban ugyanolyan beállítás mellett történik.

Kísérleti terv. A tudományos igényű kísérletezés a kísérleti terv elkészítésével kezdődik, amely faktoriális kísérletek esetén a következőkből áll:

[4] Feladatunk megoldásánál számításba kellett vennünk, hogy a kísérleti berendezés működése bizonyos idő elteltével kísérletről kísérletre fokozatosan változik. Az időben közeleső kísérleteknél ez a változás még nem jelentős, de a távoleső kísérleteknél nem hagyható figyelmen kívül.

a) A kísérleti modell megválasztása (faktorok, szintek kijelölése, egyes hatások elhanyagolása (lásd 2. §), blokk terjedelmének meghatározása).

b) A kísérleti elrendezés felírása (melyik szintkombinációt hányszor, milyen idősorrendben kell elvégezni; blokkbeosztás felírása, kontrollkísérletek).

c) A kísérletek kiértékelésére szolgáló módszer kidolgozása.

2. §. Frakcionális faktoriális kísérletek

A faktoriális kísérleteknél a teljes kísérletsorozat (minden lehetséges szintkombináció) megismétlése nem mindig valósítható meg előnyösen. Ha az egyes szintkombinációkra vonatkozó kísérletek száma nem egyforma, *részleges ismétlésről* beszélünk. Ide soroljuk azt az esetet is, amikor egyes szintkombinációkra vonatkozóan egyáltalán nem hajtunk végre kísérletet.

Az olyan faktoriális kísérleti terveket, amelyeknél részleges ismétlés fordul elő, *frakcionális faktoriális* kísérleti terveknek nevezzük. A továbbiakban azokra a tervekre szorítkozunk, amelyeknél a kísérletek száma kisebb, mint az összes lehetséges szintkombinációk. Ezen kísérleti tervek jelentősége különösen akkor nagy, amikor a teljes kísérletsorozat igen sok kísérletből áll.

A frakcionális faktoriális kísérletek tervezése azon a feltételezésen alapszik, hogy a magasabbrendű interakciók elhanyagolhatóan kicsinyek (első közelítésben nullák) a főhatásokhoz és az alacsonyabbrendű interakciókhoz képest. Ez a feltevés önkényes, de a gyakorlati esetek nagy részében fenn áll. A kísérleti adatok birtokában a feltevés helyességére vonatkozóan utólagos vizsgálatok végezhetők. Az egyes interakciók elhanyagolása következtében csökken a becslendő ismeretlenek száma, és így az elvégzendő kísérletek száma is.

Azokra az esetekre vonatkozóan, amikor mindegyik faktor két szinten, illetve három szinten szerepel, az irodalomban a probléma elméleti tárgyalása mellett kidolgozott kísérleti elrendezések is találhatók. A [2] dolgozat olyan kísérleti elrendezéseket közöl, ahol 4—10 faktor mindegyike három szinten szerepel és a teljes kísérletsorozatnak 3^p-edrésze hajtandó végre ($p = 1$, 2, 3, 4, 5).

Feladatunkban négy faktor mindegyike három értéket vehetett fel; a másod- és harmadrendű interakciókat elhanyagoltuk. Könnyen belátható, hogy a négyféle főhatás és tizenkétféle elsőrendű interakció (mindegyike három szinten) és a kísérleti átlag (μ) becslése legalább 33 mérést tesz szükségessé, ha a vizsgált hatásoknak egymással való keveredését el akarjuk kerülni; 27 kísérlet elvégzése az összes (81) helyett tehát nem minden szempontból kielégítő (lásd [2] 11. oldal). Ez a hiányosság kiküszöbölhető további kísérletek elvégzése által; vagyis a kísérleteket úgy tervezzük, hogy a végrehajtandó kísérletek száma nem lesz 3^p-edrésze az összes elvégzendő kísérletek számának. Az ilyen frakcionális kísérleteket, ahol az elvégzett kísérletek száma nem osztója az összes elvégezhető kísérlet számának, *irreguláris* frakcionális faktoriális kísérletnek nevezzük [8]. Az irreguláris frakció alkalmazása bizonyos előnyök feláldozását jelenti: a becslések, vagy legalábbis bizonyos becslések egymással korreláltak lesznek, a kísérlet tervezése és kiértékelése bonyolultabb, mint a szokásos kísérletek esetében. Az információ viszonylagos kihasználása gyengébb. Ezen kisebb hátrányokat bőven ellensúlyozza, hogy irreguláris frakció alkalmazása esetén az elvégzendő kísérletek számát — a becsülni kívánt főhatások és interakciók számának figyelembevételével —

közelítőleg optimálisan tudjuk megválasztani. Az irodalomban találhatók kétszintes irreguláris frakcionális kísérleti tervek (lásd [3], [8]). Viszont arra az esetre vonatkozóan amikor mindegyik faktor három szinten szerepel, tudomásunk szerint ilyen jellegű frakcionális faktoriális tervtáblázat nem jelent meg.

Dolgozatunkban egy konkrét kísérleti tervet ismertetünk a tervezés főbb lépéseinek felvázolásával. Ha a feladatban a faktorok, szintek, vagy az egy blokkba sorolandó kísérletek száma megváltozik, a konkrét kísérleti terv elkészítése a közölttől sokban különbözhet, néhány főbb elv azonban változatlan marad, és ezért jogosan beszélhetünk tervezési módszerről.

A külső megbízásként kapott feladatban szereplő faktorokat és szintjeiket a megbízó fél állapította meg. Feladatunk négy faktor három-három szinten való változására vonatkozó olyan kísérleti terv kidolgozása volt, ahol nem kell az összes (81) kísérletet végrehajtani. A Nagynyomású Kísérleti Intézetben már elvégeztek egy 36 kísérletből álló sorozatot az 1959-ben általunk kidolgozott terv alapján (lásd [1]). A 36 kísérletet tartalmazó terv hátránya, hogy a kísérletezési hiba mindössze 3 szabadságfokú kifejezéssel becsülhető. A jelen dolgozatban ismertetett, 45 kísérletet tartalmazó kísérleti terv legfőbb előnye a fenti tervvel szemben az, hogy a kísérletezési hiba 12 szabadságfokú kifejezéssel becsülhető; a több információ miatt természetesen a kísérletek várható értékére vonatkozó becslések is pontosabbak.

3. §. A kísérletek elrendezése

Jelölje $x_1x_2x_3x_4$ azt a szintkombinációt, amelyiknél az első faktor az x_1-edik, a második az x_2-edik, a harmadik az x_3-adik, a negyedik az x_4-edik szinten szerepel ($x_1, x_2, x_3, x_4 = 0, 1, 2$).

A 45 végrehajtandó szintkombináció kiválasztása és egyúttal a blokkbeosztás elvégzése az alábbi kongruenciarendszer alapján történt:

$$(5) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 \;\; + x_3 \equiv \alpha_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 \equiv \alpha_2 \end{cases} \qquad (x_1, x_2, x_3, x_4, \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, 2)\,.$$

A kongruencia-jel itt és a dolgozat további részében mod 3 értendő.

A blokkbeosztást az 1. táblázat mutatja.

1. táblázat

Blokk	1	2	3	4	5
α_1	0	0	0	1	2
α_2	1	2	0	0	0

Az elvégzendő kísérleteket az (5) kongruenciarendszernek (az 1. táblázatban szereplő α_1, α_2 értékpárok mellett) eleget tevő szintkombinációk határozzák meg; ezeket a szintkombinációkat — az 1. táblázat szerinti blokkbeosztásban — a 2. táblázat tartalmazza.[5]

2. táblázat

1. blokk	2. blokk	3. blokk	4. blokk	5. blokk
0001	0002	0000	0010	0020
0122	0120	0121	0101	0111
0210	0211	0212	0222	0202
1020	1021	1022	1002	1012
1111	1112	1110	1120	1100
1202	1200	1201	1211	1221
2012	2010	2011	2021	2001
2100	2101	2102	2112	2122
2221	2222	2220	2200	2210

A kísérletek tervezésénél az (5) kongruenciarendszer alapul választása azt jelenti, hogy a szereplő kongruenciáknak megfelelő ABC és AB^2D interakciókat, valamint még mindazokat az interakciókat, amelyek a két kongruencia lineáris következményének felelnek meg: az AC^2D^2 és a BC^2D interakciókat a blokkbeosztásnak és a frakcionálásnak feláldozzuk. Pontosabban: az α_1, α_2 értékpárral jellemzett blokkban az ABC_{α_1} és $AB^2D_{\alpha_2}$ komponensek valamennyi kísérletben szerepelnének, ha másodrendű interakciókat is felteteleztünk volna, hasonlóképpen, mint arról könnyen meggyőződhetünk, az $AC^2D_{2\alpha_1+2\alpha_2}$ és a $BC^2D_{2\alpha_1+\alpha_2}$ komponensek is. Ugyanis az (5) kongruenciarendszerből következnek az

$$x_1 + 2x_3 + 2x_4 \equiv 2\alpha_1 + 2\alpha_2,$$

$$x_2 + 2x_3 + x_4 \equiv 2\alpha_1 + \alpha_2$$

kongruenciák. Meggyőződhetünk arról is, hogy több ilyen kongruencia már nincsen, kivéve azokat, amelyek ezektől, vagy az eredeti két kongruencia valamelyikétől csak konstans faktorban különböznek.

Megállapíthatjuk tehát, hogy az (5) kongruenciarendszer választása mellett csak másodrendű, azaz modellünkben nem szereplő interakciókkal keveredik a blokkhatás, illetve a frakcionálás. Ez a körülmény kedvező, mert ha főhatással, vagy elsőrendű interakcióval keveredének, ezeket becsül-

[5] A végrehajtandó szintkombinációknak kongruencia-rendszer alapján történő kiválasztása és elrendezése általános módszer a frakcionális faktoriális kísérleti tervek elkészítésénél. Ez a módszer a kísérleti eredményekből nyert becslések bizonyos optimális tulajdonságai mellett a probléma könnyebb matematikai kezelhetőségét is biztosítja.

hetetlenné, vagy legalábbis — a kontrollkísérletek felhasználása esetén — becslésüket inefficienssé tennék. Az (5) kongruenciarendszer e keverő tulajdonsága annak a következménye, hogy sem magában a kongruenciarendszerben, sem következményei között nem szerepel olyan kongruencia, amely csak egy vagy két változót tartalmaz.

Az olvasó kérdezheti, hogy milyen szempont szerint történt az (5) kongruenciarendszer megválasztása, illetve hogy van-e még más négyváltozós lineáris kongruenciarendszer is, amely hasonló tulajdonsággal rendelkezik?

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy (5) lényegében az egyetlen olyan kongruenciarendszer, amely a követelményeknek megfelel; pontosabban szólva, *ha a*

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta x} = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 \equiv \alpha_1 \\ \boldsymbol{\gamma x} = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 + \gamma_4 x_4 \equiv \alpha_2 \end{cases}$$

kongruenciarendszerben szereplő $\boldsymbol{\beta}$ *és* $\boldsymbol{\gamma}$ *vektorok olyanok, hogy bármely* $\lambda_1 \boldsymbol{\beta} + \lambda_2 \boldsymbol{\gamma}$ $(\lambda_1 \lambda_2 = 0, 1, 2;\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0)$ *alakú vektornak legfeljebb egy komponense kongruens nullával, akkor a* $\boldsymbol{\beta}$ *és* $\boldsymbol{\gamma}$ *vektorok egyszerű transzformációval (összeadás, konstanssal való szorzás és koordináta-indexek felcserélése) átvihetők az* (1, 1, 1, 0) *ill.* (1, 2, 0, 1) *vektorokba.*

Bizonyítás. Nyilván elegendő az olyan $\boldsymbol{\beta}$ és γ vektorokat vizsgálni, amelyekre a $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}$ és $\boldsymbol{\beta} + 2\boldsymbol{\gamma}$ vektorok mindegyikének legfeljebb egy komponense kongruens nullával. Ha valamilyen i indexre $(i = 1, 2, 3, 4)$ $\beta_i + \gamma_i \not\equiv 0$ és $\beta_i + 2\gamma_i \not\equiv 0$ akkor vagy β_i vagy γ_i egyenlő nullával (mert $\gamma_i \neq 0$ esetén a β_i, $\beta_i + \gamma_i$, $\beta_i + 2\gamma_i$ számok egyike kongruens nullával). A feltevésből következik, hogy legalább két indexre, mondjuk i_1-re és i_2-re $\beta_{i_j} + \gamma_{i_j} \not\equiv 0$ és $\beta_{i_j} + 2\gamma_{i_j} \not\equiv 0$ $(j = 1, 2)$ fennáll; így a β_{i_1}, β_{i_2}, γ_{i_1}, γ_{i_2} számok közül kettő nullával egyenlő. Egyik vektornak sem lehet azonban két nulla komponense; így tehát $\beta_{i_1} = 0$, $\gamma_{i_2} = 0$, továbbá a másik két indexre, i_3-ra és i_4-re vonatkozóan a $\beta_{i_3} + \gamma_{i_3} = 0$ és a $\beta_{i_4} + 2\gamma_{i_4} = 0$ összefüggésnek kell fennállnia (i_1 és i_2, valamint i_3 és i_4 megfelelő megválasztása mellett). Így tehát a feltételnek eleget tevő $\boldsymbol{\beta}$ és $\boldsymbol{\gamma}$ vektorok komponenseire vonatkozóan a következők teljesülnek:

$$\beta_{i_1} = 0, \quad \beta_{i_2} \neq 0, \quad \gamma_{i_1} \neq 0, \quad \gamma_{i_2} = 0,$$
$$\beta_{i_3} \equiv 2\gamma_{i_3} \neq 0, \qquad \beta_{i_4} = \gamma_{i_4} \neq 0,$$

(ahol i_1, i_2, i_3, i_4 az 1, 2, 3, 4 számok valamely permutációja) amiből az állítás egyszerűen belátható.

4. §. A főhatások és interakciók becslése

Jelölje $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ a zárójelbe foglalt szintkombináció mellett elvégzett kísérletek mért értékét, $(x_1 \widehat{x_2} x_3 x_4)$ pedig a kísérlet számított eredményét (a mért eredmény várható értékének becslését), azaz

$$(x_1 \widehat{x_2} x_3 x_4) \sim \mathbf{M}((x_1 x_2 x_3 x_4)) .$$

A magasabbrendű interakciók elhanyagolása miatt az alábbi modellből indulhatunk ki:

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
(x_1x_2x_3x_4) &= \mu + A_{x_1} + B_{x_2} + C_{x_3} + D_{x_4} + \\
&+ AB_{x_1+x_2} + AB^2_{x_1+2x_2} + AC_{x_1+x_3} + AC^2_{x_1+2x_3} + AD_{x_1+x_4} + \\
&+ AD^2_{x_1+2x_4} + BC_{x_2+x_3} + BC^2_{x_2+2x_3} + BD_{x_2+x_4} + BD^2_{x_2+2x_4} + \\
&+ CD_{x_3+x_4} + CD^2_{x_3+2x_4} + \varepsilon_{x_1x_2x_3x_4} (x_1, x_2, x_3, x_4 = 0, 1, 2)\,,
\end{aligned}
$$

ahol az $\varepsilon_{x_1x_2x_3x_4}$ valószínűségi változók összességükben függetlenek, normális eloszlásúak, 0 várható értékkel és a szintektől független, de ismeretlen σ szórással; az interakciók indexei mod 3 értendők.

Becslési feladatunk három részből áll:

1. A (6) egyenlet jobboldalán álló főhatások és interakciók, valamint μ becslése.

2. A fenti becslések hibájának megadása.

3. σ^2 becslése.

Ebben a paragrafusban az 1. pontban megjelölt feladattal foglalkozunk. Vezessük be a következő jelöléseket:

$[qj]$ azon kísérlet mért eredménye, amely a 2. táblázatban a q-adik blokkban a j-edik helyen áll ($q = 1, 2, \ldots, 5$; $j = 1, 2, \ldots, 9$);

$$\{qy_p\} \quad (q = 1, 2, \ldots, 5\,;\ y = a, b, c, d\,;\ p = 0, 1, 2)$$

a q-adik blokk azon három kísérletének összege, ahol az első, második, harmadik illetve negyedik faktor (erre az a, b, c, d betűk utalnak) a p-edik szinten szerepel;

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
[q\cdot] &= \sum_{j=1}^{9} [qj] \\
\bar{\mu}_1 &= \frac{1}{27} \sum_{q=1}^{3} [q\cdot] \\
\bar{\mu}_2 &= \frac{1}{27} \sum_{q=3}^{5} [q\cdot] \\
\bar{\mu} &= \frac{1}{2} ({}_1\bar{\mu} + \bar{\mu}_2) \\
\Delta(\hat{\mu}) &= \frac{1}{2} (\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2) \\
\hat{\mu} &= \frac{1}{45} \sum_{q=1}^{5} [q\cdot]\,.
\end{aligned}
$$

A főhatások és interakciók első lépésben nyert (felülvonással jelölt) becsléseit a 3. táblázat tartalmazza. Az első öt becslés az 1—3. blokk kísérletein, a további öt becslés a 3—5. blokk kísérletein, az utolsó hat becslés az 1—5. blokk kísérletein alapul.

3. táblázat

$$\bar{D}_p = \frac{1}{9}\sum_{q=1}^{3}\{qd_p\} - \bar{\mu}_1$$

$$\overline{AD}_p = \frac{1}{9}\sum_{q=1}^{3}\{qb_{p+2q}\} - \bar{\mu}_1$$

$$\overline{AD}_p^2 = \frac{1}{9}\sum_{q=1}^{3}\{qc_{p+q}\} - \bar{\mu}_1$$

$$\overline{BD}_p = \frac{1}{9}\sum_{q=1}^{3}\{qc_{p+2q}\} - \bar{\mu}_1$$

$$\overline{BD}_p^2 = \frac{1}{9}\sum_{q=1}^{3}\{qa_{p+q}\} - \bar{\mu}_1$$

$$\bar{C}_p = \frac{1}{9}\sum_{q=3}^{5}\{qc_p\} - \bar{\mu}_2$$

$$\overline{AC}_p = \frac{1}{9}\sum_{q=3}^{5}\{qb_{2p+q}\} - \bar{\mu}_2$$

$$\overline{AC}_p^2 = \frac{1}{9}\sum_{q=3}^{5}\{qd_{p+q}\} - \bar{\mu}_2$$

$$\overline{BC}_p = \frac{1}{9}\sum_{q=3}^{5}\{qa_{2p+q}\} - \bar{\mu}_2$$

$$\overline{BC}_p^2 = \frac{1}{9}\sum_{q=3}^{5}\{qd_{2p+2q}\} - \bar{\mu}_2$$

$$\overline{CD}_p = \frac{1}{18}\left(\sum_{q=1}^{3}\{qa_{p+2q}\} + \sum_{q=3}^{5}\{qa_{p+2q}\}\right) - \bar{\mu}$$

$$\overline{CD}_p^2 = \frac{1}{18}\left(\sum_{q=1}^{3}\{qb_{p+q}\} + \sum_{q=3}^{5}\{qb_{p+2q}\}\right) - \bar{\mu}$$

$$\bar{A}_p = \frac{1}{18}\left(\sum_{q=1}^{3}\{qa_p\} + \sum_{q=3}^{5}\{qa_p\}\right) - \bar{\mu} - \frac{1}{2}(\overline{BC}_{2p} + \overline{BD}_p^2)$$

$$\bar{B}_p = \frac{1}{18}\left(\sum_{q=1}^{3}\{qb_p\} + \sum_{q=3}^{5}\{qb_p\}\right) - \bar{\mu} - \frac{1}{2}(\overline{AC}_{2p} + \overline{AD}_p)$$

$$\overline{AB}_p = \frac{1}{9}\sum_{q=1}^{3}\{qc_{2p}\} - \bar{\mu}_1 - \bar{C}_{2p}$$

$$\overline{AB}_p^2 = \frac{1}{9}\sum_{q=3}^{5}\{qd_{2p}\} - \bar{\mu}_2 - \bar{D}_{2p} \qquad (p = 0, 1, 2).$$

A 3. táblázat első tizenkét kifejezésének számítási módját egy példán mutatjuk be. Az $\overline{AD}_p^2$ kifejezést úgy kapjuk meg, hogy az (5) kongruencia-rendszerhez hozzávesszük az

$$x_1 + 2x_4 \equiv p$$

egyenletet. A három kongruencia következményeként (összeadva azokat) az

$$x_3 \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + p$$

egyenletet kapjuk; $\alpha_1 + \alpha_2$ viszont kongruens a blokk sorszámával. Azoknak a kísérleteknek az átlaga, ahol a harmadik faktor a q-adik blokkban ($q = 1, 2, 3$) a p-edik szinten ($p = 0, 1, 2$) szerepel:

$$\frac{1}{9} \sum_{q=1}^{3} \{qc_{p+q}\} ,$$

ebből kivonva az első 27 kísérlet átlagát, kapjuk az AD^2 interakció p-edik szinten vett értékének becslését.

Nem térünk itt ki részletesen annak indokolására, hogy egyes becslések miért alapulnak az első három blokk kisérletein, mások viszont a 3—5. blokk kisérletein. Számítással azonban könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az említett becslések torzitatlanok, hasonlóképen arról is, hogy például a 3. táblázat első öt képletében becsült interakciók nem becsülhetők a 3—5. blokkból, mert ott egyéb interakciókkal keverednek. Erre a körülményre egyébként a megfelelő kongruenciák lineáris következményeinek tanulmányozása utján is lehet következtetni.

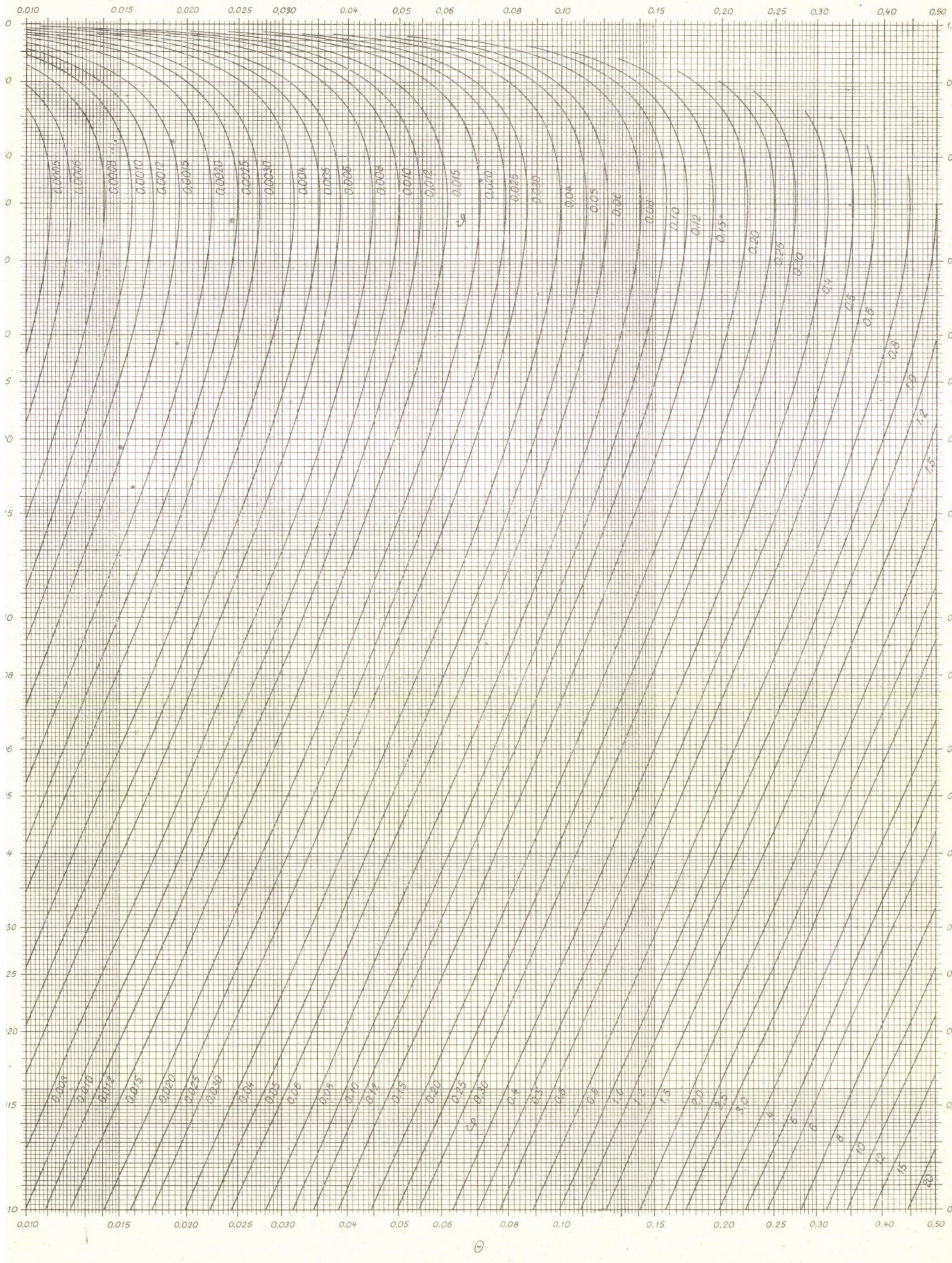
A 3. táblázat utolsó négy kifejezése baloldalán álló mennyiségek becslési módja kissé bonyolultabb. Példának okáért az AB_p interakció az 1—3. blokkon belül keveredik a C_{2p} ($p = 0, 1, 2$) főhatással (lásd (5) első egyenletét), és így a becslés csak két lépésben végezhető el: az első lépésben a 3—5. blokk kísérleteiből megkapjuk a C főhatás becslését, a második lépésben az 1—3. blokk kísérletei alapján már becsülhetjük az AB interakciót, felhasználva a C főhatás előbbi becslését.

A 3. táblázatban foglalt becslések nyilván rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy

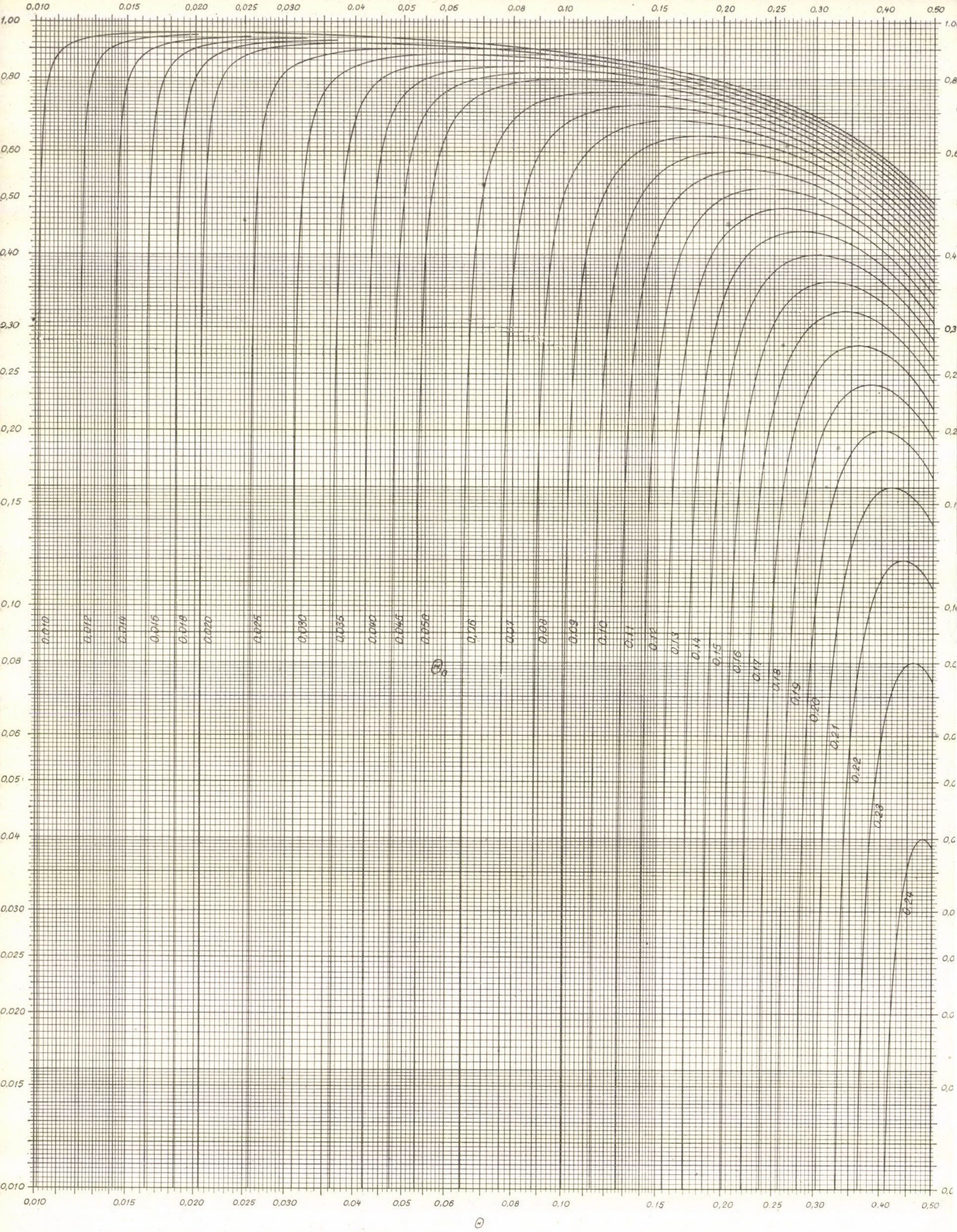
$$\sum_{p=0}^{2} \overline{Y}_p = 0 ,$$

ahol $\overline{Y}_p$ jelentheti a baloldalon álló kifejezések bármelyikét. A főhatások és interakciók becslései összesen 32 szabadságfokot foglalnak le, μ becslése egy szabadságfokot, míg a blokkhatás konstansai további 4 szabadságfokot. Így 45 kísérlet elvégzése esetén 8 szabadságfokú kifejezést konstruálhatunk σ^2 becslésére (lásd 5. §); ebben a becslésben játszanak szerepet az ún. *hibatagok*, amelyek a 4. táblázatban láthatók A 4 hibatag korrelálatlan egymással és összesen 8 szabadságfokot foglal le. Ezenkívül abban az esetben, ha blokkonként kontrollkísérletet is végeznek, ez az 5 kísérlet további 4 független hibatag képzésére ad módot (vagyis kiegyenlítik a blokkbeosztásra fordított 4 szabadságfokot), ezeket az 5. §-ban adjuk meg. Ebben az esetben 1 szabadságfokot a kontrollkísérlet beállítása foglal le, mert műszaki okokból a kontroll-

[6] Mivel feltételeztük a normális eloszlást, a korrelálatlanság egyúttal függetlenséget is jelent. Mikor itt és a továbbiakban a „korrelálatlan" kifejezést használjuk ez a szó arra céloz, hogy a függetlenség a kovariancia kiszámításával ellenőrizhető.

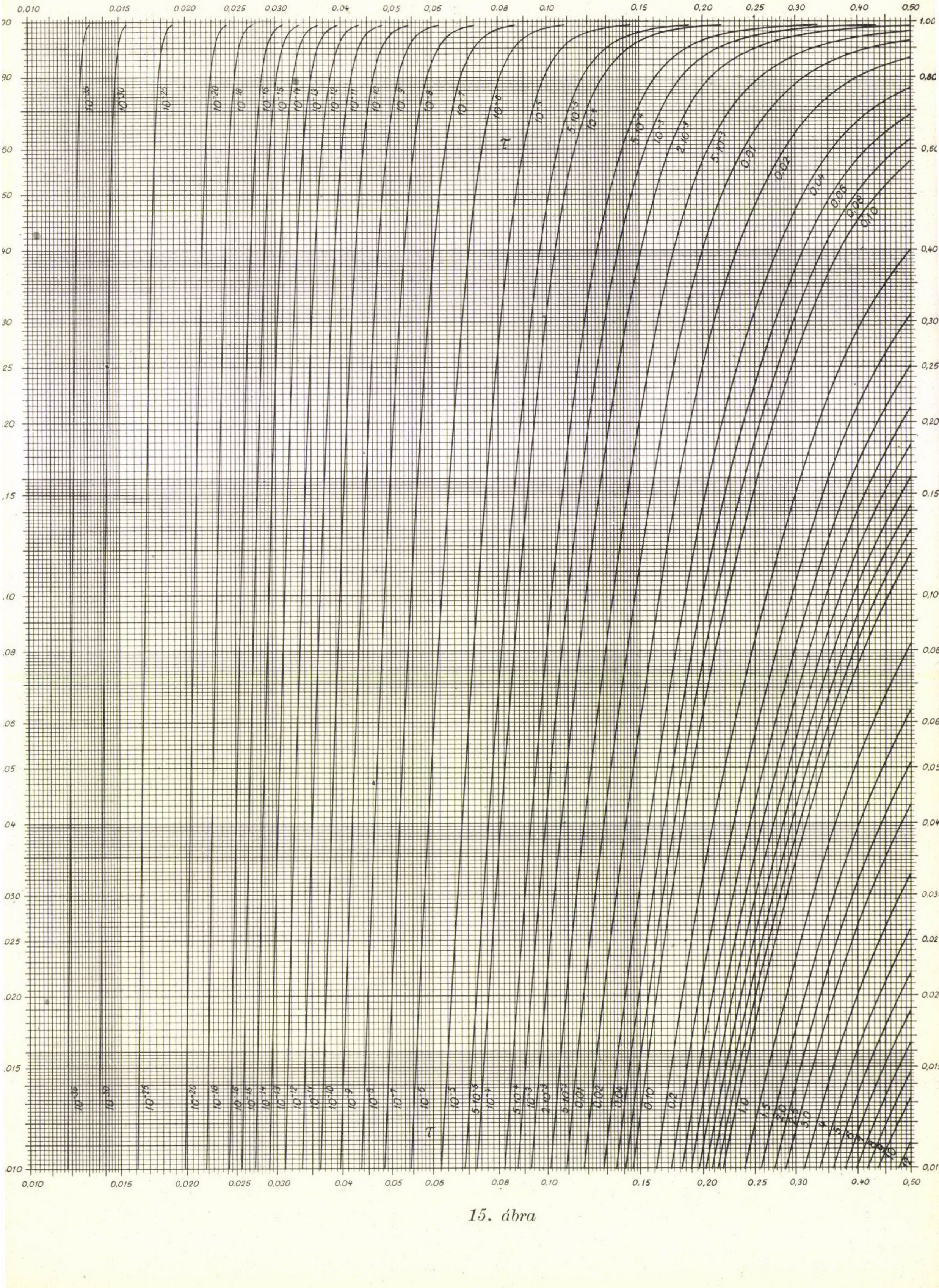


13. ábra



0,010
0,012
0,014
0,016
0,018
0,020
0,025
0,030
0,035
0,040
0,045
0,050
Θ_0
0,06
0,07
0,08
0,09
0,10
0,11
0,12
0,13
0,14
0,15
0,16
0,17
0,18
0,19
0,20
0,21
0,22
0,23
0,24
Θ

14. ábra


0,010
0,015
0,020
0,025
0,030
0,04
0,05
0,06
0,08
0,10
0,15
0,20
0,25
0,30
0,40
0,50
1,00
0,80
0,60
0,40
0,30
0,25
0,20
0,15
0,10
0,08
0,06
0,05
0,04
0,030
0,010
τ

15. ábra

4. táblázat

$$\overline{AB^2D_p^2} = \frac{1}{9}\sum_{q=1}^{3}\{qd_{p+2q}\} - \mu_1$$

$$\overline{ABC_p^2} = \frac{1}{9}\sum_{q=3}^{5}\{qc_{p+2q}\} - \mu_2$$

$$\Delta(CD)_p = \frac{1}{18}\left(\sum_{q=1}^{3}\{qa_{p+2q}\} - \sum_{q=3}^{5}\{qa_{p+2q}\}\right) - \Delta(\mu)$$

$$\Delta(CD_2)_p = \frac{1}{18}\left(\sum_{q=1}^{3}\{qb_{p+q}\} - \sum_{q=3}^{5}\{qb_{p+2q}\}\right) - \Delta(\mu) \qquad (p=0,1,2).$$

kísérletek beállítása a faktoriális kísérletsorozat 81 lehetséges szintkombinációja mindegyikétől különbözik. Ebben a paragrafusban egyelőre úgy számolunk, mintha a kontrollkísérletek nem volnának, egyébként — mint utólag megmutatjuk — ezek feltételezése itt még semmi változást nem okoz.

A kovarianciák kiszámítása. A továbbiak szempontjából szükséges, hogy a 3. és 4. táblázatban felírt becslések kovarianciáját kiszámítsuk. A számítási mód a következő:

Legyenek $\overline{Y}$ és $\overline{Z}$ a 3. vagy a 4. táblázatban felírt becslések,

$$\overline{Y}_p = \sum_{q=1}^{5}\sum_{j=1}^{9}[qj]\,y(q,j;p)$$

$$\overline{Z}_r = \sum_{q=1}^{5}\sum_{j=1}^{9}[qj]\,z(q,j;r) \qquad (p,r=0,1,2).$$

Ekkor

$$\operatorname{cov}(\overline{Y}_p,\overline{Z}_r) = \sigma^2\sum_{q=1}^{5}\sum_{j=1}^{9}y(q,j;p)\,z(q,j;r),$$

ti. két különböző kísérlethez tartozó kovariancia a kísérletek függetlensége miatt 0. A továbbiakban a következő, egyszerűen belátható összefüggést használjuk fel:

$$\operatorname{cov}\left(\left(\{qu_p\} - \frac{1}{3}[q\cdot]\right)\left(\{q'v_r\} - \frac{1}{3}[q'\cdot]\right)\right) = \begin{cases} 2\sigma^2, & \text{ha } q=q',\ u=v,\ p=r \\ -\sigma^2, & \text{ha } q=q',\ u=v,\ p\neq r \\ 0, & \text{ha } q\neq q' \text{ vagy } u\neq v \end{cases}$$

(8)

$$(q,q'=1,2,\dots,5;\ u,v=a,b,c,d;\ p,r=0,1,2).$$

A 3. és 4. táblázat becslései négy csoportra oszthatók fel aszerint, hogy a kifejezések jobboldalán a szumma-jel után az a, b, c illetve d betű áll (ennek megfelel az 5a, 5b, 5c,, 5d táblázat); (8) következményeként a nem ugyanabba a csoportba tartozó becslések korrelálatlanok.

Az 5. táblázat nem tünteti fel közvetlenül a megfelelő becslések összes komponenseinek kovarianciáit, illetve azokat a tényezőket, amellyel a σ^2 alapszórásnégyzetet megszorozva a becslések kovarianciáit kapjuk. A táblázatban fel nem tüntetett komponenspárok kovarianciája $(-1/2)$-szerese a táblázatban feltüntetett komponenspárokénak.

5. táblázat

	$\overline{A}_p$	$\overline{BC}_{2p}$	$\overline{BD}^2_p$	$\overline{CD}_p$	$\Delta(CD)_p$
$\overline{A}_p$	$\frac{2}{27}$	$-\frac{1}{27}$	$-\frac{1}{27}$	—	—
$\overline{BC}_{2p}$	$-\frac{1}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{81}$
$\overline{BD}^2_p$	$-\frac{1}{27}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{81}$	$-\frac{1}{81}$
$\overline{CD}_p$	—	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{4}{81}$	—
$\Delta(CD)_p$	—	$\frac{1}{81}$	$-\frac{1}{81}$	—	$\frac{2}{81}$

a)

	$\overline{B}_p$	$\overline{AC}_{2p}$	$\overline{AD}_p$	$\overline{CD}^2_p$	$\Delta(CD^2)_p$
$\overline{B}_p$	$\frac{2}{27}$	$-\frac{1}{27}$	$-\frac{1}{27}$	—	—
$\overline{AC}_{2p}$	$-\frac{1}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{81}$
$\overline{AD}_p$	$-\frac{1}{27}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{81}$	$-\frac{1}{81}$
$\overline{CD}^2_p$	—	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{4}{81}$	—
$\Delta(CD^2)_p$	—	$\frac{1}{81}$	$-\frac{1}{81}$	—	$\frac{2}{81}$

b)

	$\overline{C}_p$	$\overline{AB}_{2p}$	$\overline{AD}^2_p$	$\overline{BD}_p$	$\overline{ABC}^2_p$
$\overline{C}_p$	$\frac{2}{27}$	$-\frac{4}{81}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{2}{81}$	—
$\overline{AB}_{2p}$	$-\frac{4}{81}$	$\frac{8}{81}$	$-\frac{2}{81}$	$-\frac{2}{81}$	$\frac{2}{81}$
$\overline{AD}^2_p$	$\frac{2}{81}$	$-\frac{2}{81}$	$\frac{2}{27}$	—	$\frac{2}{81}$
$\overline{BD}_p$	$\frac{2}{81}$	$-\frac{2}{81}$	—	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{81}$
$\overline{ABC}^2_p$	—	$\frac{2}{81}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{2}{27}$

c)

	$\overline{D}_p$	$\overline{AB}^2_{2p}$	$\overline{AC}^2_p$	$\overline{BC}^2_{2p}$	$\overline{AB^2D}^2_p$
$\overline{D}_p$	$\frac{2}{27}$	$-\frac{4}{81}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{2}{81}$	—
$\overline{AB}^2_{2p}$	$-\frac{4}{81}$	$\frac{8}{81}$	$-\frac{2}{81}$	$-\frac{2}{81}$	$\frac{2}{81}$
$\overline{AC}^2_p$	$\frac{2}{81}$	$-\frac{2}{81}$	$\frac{2}{27}$	—	$\frac{2}{81}$
$\overline{BC}^2_{2p}$	$\frac{2}{81}$	$-\frac{2}{81}$	—	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{81}$
$\overline{AB^2D}^2_p$	—	$\frac{2}{81}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{2}{27}$

d)

Példák:

$$\operatorname{cov}(\overline{A}_p, \overline{BD}^2_r) = \begin{cases} \dfrac{-\sigma^2}{27}, & \text{ha } p = r \\ \dfrac{\sigma^2}{54}, & \text{ha } p \neq r, \end{cases}$$

$$(p, r = 0, 1, 2).$$

$$\operatorname{cov}(\overline{A}_p, \overline{BC}_r) = \begin{cases} \dfrac{-\sigma^2}{27}, & \text{ha } p \equiv 2r \\ \dfrac{\sigma^2}{54}, & \text{ha } p \not\equiv 2r, \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy valamennyi becslés és hibatag korrelálatlan $\widehat{\mu}$-ra. Ha figyelembe vesszük, hogy a három komponensű becslések (hibatagok) közül csak kettő lineárisan független, akkor 33 becslésünk és 8 hibatagunk van. Ezekhez számítsuk még hozzá a 4 független blokk-konstans becslését is (ezeket egyelőre nem írtuk fel). A megfigyelési értékeknek e 45 lineáris függvénye között további kapcsolat már nincsen: ugyanis a hibatagok egymás között sztochasztikusan függetlenek, egyéb kapcsolat pedig a várható értékek közötti kapcsolatot vonná maga után; ilyen pedig nincs, mert a becsült mennyiségek valódi értékei tetszőlegesek lehetnek. Így ez a 45 lineáris függvény fukcionálisan független. Ezért a 45 megfigyelési érték minden további függvénye az említett 45 függvényből előállítható. Ebből következik, hogy minden 0 várható értékű függvény a hibatagok függvénye. Ugyanazon menynyiségre adott két torzítatlan becslés különbségének várható értéke 0 és így ugyancsak előállítható a hibatagok függvényeként.

Az $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$, $\overline{CD}$ és $\overline{CD^2}$ becslések — amint ez az 5. táblázatból látható — az összes hibatagokkal korrelálatlanok. Mivel korrelálatlan tag hozzáadása egy változóhoz annak szórását csak növeli, így az említett becslések minimális szórású lineáris becslések. A többi becslések az 5. táblázat szerint csak egy-egy hibataggal korreláltak, így a többi konstans mindegyikének legkisebb szórású lineáris becslése a 4. táblázatban megadottól csak olyan kifejezéssel különbözik, amely ezen hibatag komponenseinek lineáris függvénye. Kimutatjuk, hogy mindegyik esetben elég a hibatagnak csak egyik komponensét figyelembe venni, éspedig azt, amelyik a vizsgált becsléskomponensnek az 5. táblázat szerint megfelel.

Azaz legyen $\overline{Y}_r$ a 3. táblázat valamelyik kifejezése és legyen $H_{p(r)}$ annak a hibatagnak, amely az 5. táblázatban az $\overline{Y}_r$-rel egy résztáblázatban szerepel, az a komponense, amelyet a táblázat neki megfeleltet (a $\overline{BD^2}$, $\overline{AD}$, $\overline{AD^2}$, $\overline{BD}$, $\overline{AC^2}$ becslések esetén $p(r) = r$, a $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, $\overline{AB^2}$, $\overline{BC^2}$ becsléseknél $p(r) = 2r$). Akkor, — mint kimutatjuk, — β megfelelő megválasztása mellett az

$$\widehat{Y}_r = \overline{Y}_r - \beta H_{p(r)} \qquad (r = 0, 1, 2) \tag{9}$$

becslésre teljesülni fog:

$$\operatorname{cov}(\widehat{Y}_r, H_s) = 0 \qquad (r, s = 0, 1, 2)\,, \tag{10}$$

vagyis, mivel $\widehat{Y}_r$ az összes hibatagtól független, minimális szórású lineáris becslés lesz. A (10) összefüggés az $s = p(r)$ esetben nyilván akkor áll fenn, ha

$$\beta = \frac{\operatorname{cov}(\overline{Y}_r, H_{p(r)})}{\mathbf{D}^2(H_{p(r)})}\,, \tag{11}$$

(azaz β $\overline{Y}_r$-nek $H_{p(r)}$-re vonatkozó regressziós együtthatója).

Legyen $H_{q(r)}$ a hibatag egy másik komponense; az 5. táblázathoz fűzött megjegyzés szerint

$$\operatorname{cov}(\overline{Y}_r, H_{q(r)}) = -\frac{1}{2}\operatorname{cov}(\overline{Y}_r, H_{p(r)})$$

és

$$\operatorname{cov}(H_{p(r)}, H_{q(r)}) = -\frac{1}{2}\mathbf{D}^2(H_{p(r)}),$$

tehát a (11) összefüggésből

$$\operatorname{cov}(\widehat{Y}_r, H_{q(r)}) = -\frac{1}{2}\operatorname{cov}(\widehat{Y}_r, H_{p(r)}) = 0$$

is következik.

β értékei az 5. táblázat alapján meghatározhatók. Az így nyert becsléseket a 6. táblázat tünteti fel.

6. táblázat

$$\widehat{A}_p = \bar{A}_p \qquad \widehat{B}_p = \bar{B}_p$$

$$\widehat{BC}_p = \overline{BC}_p - \frac{1}{2}\Delta(CD)_{2p} \qquad \widehat{AC}_p = \overline{AC}_p - \frac{1}{2}\Delta(CD^2)_{2p}$$

$$\widehat{BD}^2_p = \overline{BD}^2_p + \frac{1}{2}\Delta(CD)_p \qquad \widehat{AD}_p = \overline{AD}_p + \frac{1}{2}\Delta(CD^2)_p$$

$$\widehat{CD}_p = \overline{CD}_p \qquad \widehat{CD}^2_p = \overline{CD}^2_p$$

$$\widehat{C}_p = \bar{C}_p \qquad \widehat{D}_p = \bar{D}_p$$

$$\widehat{AB}_p = \overline{AB}_p - \frac{1}{3}\overline{ABC^2_{2p}} \qquad \widehat{AB}^2_p = \overline{AB}^2_p - \frac{1}{3}\overline{AB^2D^2_{2p}}$$

$$\widehat{AD}^2_p = \overline{AD}^2_p - \frac{1}{3}\overline{ABC^2_p} \qquad \widehat{AC}^2_p = \overline{AC}^2_p - \frac{1}{3}\overline{AB^2D^2_p}$$

$$\widehat{BD}_p = \overline{BD}_p - \frac{1}{3}\overline{ABC^2_p} \qquad \widehat{BC}^2_p = \overline{BC}^2_p - \frac{1}{3}\overline{AB^2D^2_{2p}}$$

$$(p = 0, 1, 2).$$

A 6. táblázat kiegészítéseképpen a (7) képlet μ becsléseként megadja a $\widehat{\mu}$ mennyiséget. Ez szintén minimális szórású lineáris becslés.

A 6. táblázatban megadott becslések kovarianciatáblázatát a 7. táblázat tünteti fel ugyanolyan módon, mint az 5. táblázat a felülvonásos becsléseket; azaz a különböző résztáblázatban szereplő becslések egymással korrelálatlanok, továbbá a táblázatban nem szereplő komponenspárok $(-1/2)$-szeresei a táblázatban megtalálható komponenspárokénak. A táblázat alapján nyert értékeket még meg kell szorozni a σ^2 alapszórással.

7. táblázat

	$\widehat{A}_p$	$\widehat{BC}_{2p}$	$\widehat{BD}_p^2$	$\widehat{CD}_p$
$\widehat{A}_p$	$\frac{2}{27}$	$-\frac{1}{27}$	$-\frac{1}{27}$	—
$\widehat{BC}_{2p}$	$-\frac{1}{27}$	$\frac{11}{162}$	$\frac{5}{162}$	$\frac{1}{81}$
$\widehat{BD}_p^2$	$-\frac{1}{27}$	$\frac{5}{162}$	$\frac{11}{162}$	$\frac{1}{81}$
$\widehat{CD}_p$	—	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{4}{81}$

a)

	$\widehat{B}_p$	$\widehat{AC}_{2p}$	$\widehat{AD}_p$	$\widehat{CD}_p^2$
$\widehat{B}_p$	$\frac{2}{27}$	$-\frac{1}{27}$	$-\frac{1}{27}$	—
$\widehat{AC}_{2p}$	$-\frac{1}{27}$	$\frac{11}{162}$	$\frac{5}{162}$	$\frac{1}{81}$
$\widehat{AD}_p$	$-\frac{1}{27}$	$\frac{5}{162}$	$\frac{11}{162}$	$\frac{1}{81}$
$\widehat{CD}_p^2$	—	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{4}{81}$

b)

	$\widehat{C}_p$	$\widehat{AB}_{2p}$	$\widehat{AD}_p^2$	$\widehat{BD}_p$
$\widehat{C}_p$	$\frac{2}{27}$	$-\frac{4}{81}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{2}{81}$
$\widehat{AB}_{2p}$	$-\frac{4}{81}$	$\frac{22}{243}$	$-\frac{8}{243}$	$-\frac{8}{243}$
$\widehat{AD}_p^2$	$\frac{2}{81}$	$-\frac{8}{243}$	$\frac{16}{243}$	$-\frac{2}{243}$
$\widehat{BD}_p$	$\frac{2}{81}$	$-\frac{8}{243}$	$-\frac{2}{243}$	$\frac{16}{243}$

c)

	$\widehat{D}_p$	$\widehat{AB}_{2p}^2$	$\widehat{AC}_p^2$	$\widehat{BC}_{2p}^2$
$\widehat{D}_p$	$\frac{2}{27}$	$-\frac{4}{81}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{2}{81}$
$\widehat{AB}_{2p}^2$	$-\frac{4}{81}$	$\frac{22}{243}$	$-\frac{8}{243}$	$-\frac{8}{243}$
$\widehat{AC}_p^2$	$\frac{2}{81}$	$-\frac{8}{243}$	$\frac{16}{243}$	$-\frac{2}{243}$
$\widehat{BC}_{2p}^2$	$\frac{2}{81}$	$-\frac{8}{243}$	$-\frac{2}{243}$	$\frac{16}{243}$

d)

A 7. táblázat kiegészítéseképpen megadjuk $\widehat{\mu}$ szórásnégyzetét:

$$\mathbf{D}^2(\widehat{\mu}) = \frac{1}{45}\sigma^2. \tag{12}$$

A 6. táblázatban megadott minimális szórású lineáris becslések Markov tétele ([3], 32 o.) értelmében egyúttal a legkisebb négyzetek elvének megfelelő becslések is. Mivel a normális eloszlást feltételeztük, mindegyik becslés nemcsak a lineáris becslések, hanem az összes lehetséges torzítatlan becslések között minimális szórású.

A 6. táblázatban megadott becslések alapján a (6) képlet alkalmazásával becslést adhatunk tetszőleges szintkombináció mellett végzett kísérlet eredményének várható értékére:

$$(13)\quad \widehat{l(x_1x_2x_3x_4)} = \hat{\mu} + \hat{A}_{x_1} + \hat{B}_{x_2} + \ldots + \widehat{CD}^2_{x_3+2x_4} \qquad (x_1, x_2, x_3, x_4 = 0, 1, 2),$$

valamint különböző szintkombinációknak megfelelő becslések egymásközti eltéréseire. Ezeknek a becsléseknek a szórását a 7. táblázat alapján kiszámíthatjuk. A számítást a kísérleti eredmények várható értékeinek becslésére vonatkozóan a 6. §-ban el is végezzük.

A hibatagok alapján becslést adtunk a σ^2 szórásnégyzetre az 5. §-ban, ugyanitt közöljük a szóráselemzés táblázatot is, amelynek alapján az elsőrendű interakciók szignifikáns volta megvizsgálható.

5. §. Szórásbecslés és szóráselemzés

A szórás becsléséhez a hibatagok négyzeteit az 5. táblázatból kikeresett szórásnégyzet-tényezőikkel osztva, összeadjuk, ezt a négyzetösszeget kell azután a szabadságfokkal osztani. Egy-egy hibatag három komponensének négyzetösszege χ^2-eloszlású 2 szabadságfokkal, így ezek összege 8 szabadságfokú χ^2-eloszlású.

Itt, a gyakorlati esetnek megfelelően, már tekintetbe vesszük a kontrollkísérletek által szolgáltatott hibatagokat is. Jelölje k_q $(q = 1, 2, \ldots, 5)$ az egyes blokkok közepén elvégzett kontrollkísérlet eredményét.

Vezessük be az

$$\eta_q = \frac{1}{9}[q\cdot] - \hat{\mu} - k_q + \bar{k} \qquad (q = 1, 2, \ldots, 5)$$

jelölést, ahol

$$\bar{k} = \frac{1}{5}\sum_{q=1}^{5} k_q.$$

Könnyen belátható, hogy az η_q mennyiségek várható értéke 0, és korrelálatlanok az előző paragrafusban bevezetett valamennyi becsléssel és hibataggal. Ebből következik, hogy a 4. §-ban megadott becslések legkisebb négyzetbecslések abban az esetben is, ha kontrollkísérleteket is végeznek. Az η_q mennyiségek szórásnégyzete

$$\mathbf{D}^2(\eta_q) = \frac{8}{9}\sigma^2 \qquad (q = 1, 2, \ldots, 5).$$

A $\left(\sum_{q=1}^{5} \eta_q^2\right) \Big/ \mathbf{D}^2(\eta_q)$ négyzetösszeg 4 szabadságfokú χ^2-eloszlású. Vezessük be az

$$S = \frac{9}{8}\Bigg[12 \sum_{p=0}^{2} (\overline{AB^2D^2_p})^2 + 12 \sum_{p=0}^{2} (\overline{ABC^2_p})^2 + \\ + 36 \sum_{p=0}^{2} (\Delta(CD)_p)^2 + 36 \sum_{p=0}^{2} (\Delta(CD^2)_p)^2 + \sum_{q=1}^{5} \eta_q^2\Bigg]$$

jelölést.

Alkalmazva a χ^2-eloszlás additívitási tulajdonságát, s felhasználva az 5. táblázatban megadott értékeket, az S/σ^2 kifejezés 12 szabadságfokú, χ^2-eloszlású, azon hipotézis mellett, hogy a másod- és harmadrendű interakciók 0-val egyenlők.

$$s^2 = \frac{S}{12} = \frac{3}{32}\left[12 \sum_{p=0}^{2} (\overline{AB^2D_p^2})^2 + 12 \sum_{p=0}^{2} (\overline{ABC_p^2})^2 + \right.$$

$$\left. + 36 \sum_{p=0}^{2} (\Delta(CD)_p)^2 + 36 \sum_{p=0}^{2} (\Delta(CD^2)_p)^2 + \sum_{q=1}^{5} \eta_q^2 \right]$$

torzítatlan, 12 szabadságfokú becslése σ^2-nek.

A főhatások legkisebb négyzet-becslése azon hipotézis mellett, hogy az elsőrendű interakciók is eltűnnek, az előző paragrafusban ismertetett módon határozható meg. Az eredményt a 8. táblázat tartalmazza.

8. táblázat

$$\widetilde{A}_p = \widehat{A}_p + \frac{2}{5}\widehat{BC}_{2p} + \frac{2}{5}\widehat{BD}_p^2 - \frac{1}{5}\widehat{CD}_p$$

$$\widetilde{B}_p = \widehat{B}_p + \frac{2}{5}\widehat{AC}_{2p} + \frac{2}{5}\widehat{AD}_p - \frac{1}{5}\widehat{CD}_p^2$$

$$\widetilde{C}_p = \widehat{C}_p + \frac{2}{5}\widehat{AB}_{2p} - \frac{1}{5}\widehat{AD}_p^2 - \frac{1}{5}\widehat{BD}_p$$

$$\widetilde{D}_p = \widehat{D}_p + \frac{2}{5}\widehat{AB}_{2p}^2 - \frac{1}{5}\widehat{AC}_p^2 - \frac{1}{5}\widehat{BC}_{2p}^2$$

E becslések szórásnégyzete

$$\mathbf{D}^2(\widetilde{A}_p) = \mathbf{D}^2(\widetilde{B}_p) = \mathbf{D}^2(\widetilde{C}_p) = \mathbf{D}^2(\widetilde{D}_p) = \frac{2}{45}\sigma^2 \qquad (p = 0, 1, 2).$$

A 7. táblázat alapján $\widetilde{A}_p$, $\widetilde{B}_p$, $\widetilde{C}_p$ és $\widetilde{D}_p$ egymással korrelálatlanok, tehát a megfelelő négyzetösszegek is függetlenek:

$$S_A = \frac{45}{2} \sum_{p=0}^{2} (\widetilde{A}_p)^2$$

$$S_B = \frac{45}{2} \sum_{p=0}^{2} (\widetilde{B}_p)^2$$

$$S_C = \frac{45}{2} \sum_{p=0}^{2} (\widetilde{C}_p)^2$$

$$S_D = \frac{45}{2} \sum_{p=0}^{2} (\widetilde{D}_p)^2 .$$

A blokkhatást a

$$\xi_q = \frac{1}{9}[q\cdot] + k_q - \widehat{\mu} - \overline{k}$$

eltérések jellemzik, ezek eloszlása azonos az η_q eltérésekével, így a blokkhatásnak megfelelő négyzetösszeg

$$S_{BL} = \frac{9}{8} \sum_{q=1}^{5} \xi_q^2 .$$

A kontrollkísérlet beállítását jellemzi a $\bar{k} - \widehat{\mu}$ különbség, ennek szórásnégyzete: $\frac{2}{9}\sigma^2$, úgy hogy a megfelelő empirikus (1 szabadságfokú) szórásnégyzet

$$S_k = \frac{9}{2}(\bar{k} - \widehat{\mu})^2 .$$

Jelölje végül

$$S_t = \sum_{q=1}^{5} \left(\sum_{i=0}^{9} \left([q_i] - \frac{9\widehat{\mu} + \bar{k}}{10} \right)^2 + \left(k_q - \frac{9\widehat{\mu} + \bar{k}}{10} \right)^2 \right)$$

a teljes négyzetösszeget.

Ezeknek a mennyiségeknek a segítségével összeállíthatjuk az alábbi szórásfelbontó táblázatot:

9. táblázat

A szórás eredete	Négyzetösszeg	Szabadságfok
Blokk	S_{BL}	4
Kontrollkísérlet	S_k	1
A	S_A	2
B	S_B	2
C	S_C	2
D	S_D	2
Elsőrendű interakciók	$S_t - S_{BL} - S_k - S_A - S_B - S_C - S_D - S$	24
Maradék	S	12
Teljes	S_t	49

A megfelelő szórásnégyzeteket úgy nyerjük, hogy a négyzetösszeget a megfelelő szabadságfokkal osztjuk. A szórásfelbontó táblázat segítségével elvégezhetjük a szóráselemzésnél szokásos próbákat (lásd pl. [3], [4], [5], [6]).

Mivel mindegyik hibatagban szerepelnek a másodrendű interakciók, így ezek szignifikanciájára csak úgy végezhetünk próbát, ha megvizsgáljuk, hogy melyik hibatag milyen mértékben függ a másodrendű interakcióktól. A 10. táblázat feltünteti az alaphipotézisünk szerint standardizált hibatagok szórásnégyzetét azon H_1 ellenhipotézis mellett, hogy csak a harmadrendű interakciók tűnnek el, míg a másodrendű interakciók független valószínűségi vektorváltozók 0 várható értékkel és

$$(14)\qquad \begin{Vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{Vmatrix} \tau^2 \sigma^2$$

kovarianciamátrixszal.

10. táblázat

$$\frac{\mathbf{D}^2(\overline{AB^2D_p^2} \mid H_1)}{\mathbf{D}^2(\overline{AB^2D_p^2})} = \frac{\mathbf{D}^2(\overline{ABC_p^2} \mid H_1)}{\mathbf{D}^2(\overline{ABC_p^2})} = 1 + \frac{81}{2}\tau^2,$$

$$\frac{\mathbf{D}^2(\Delta(CD)_p \mid H_1)}{\mathbf{D}^2(\Delta(CD)_p)} = \frac{\mathbf{D}^2(\Delta(CD^2)_p \mid H_1)}{\mathbf{D}^2(\Delta(CD^2)_p)} = 1 + 81\tau^2$$

$$(p = 0, 1, 2);$$

$$\frac{\mathbf{D}^2(\eta_q \mid H_1)}{\mathbf{D}^2(\eta_q)} = 1 + \frac{81}{20}\tau^2 \qquad (q = 1, 2, \ldots, 5).$$

A táblázatból látható, hogy az η_q mennyiségek kevésbé függnek a másodrendű interakcióktól, mint a többiek, ezért az

$$(15)\qquad F = \frac{8S - 9\sum_{q=1}^{5} \eta_q^2}{18\sum_{q=1}^{5} \eta_q^2}$$

(8, 4) szabadságfokú F-eloszlású statisztika alapján vizsgálhatjuk a másodrendű interakciók szignifikanciáját.

6. §. A (13) alatti becslés szórása

Ebben a paragrafusban a tetszőleges szintkombináció esetére adott (13) alatti becslés szórásnégyzetét számítjuk ki. Nyilván felírható, hogy

$$\mathbf{D}^2(\widehat{x_1x_2x_3x_4}) = Q_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + 2\,Q_2(x_1, x_2, x_3, x_4), \qquad (x_1, x_2, x_3, x_4 = 0, 1, 2),$$

ahol

$$Q_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathbf{D}^2(\widehat{\mu}) + \mathbf{D}^2(\widehat{A}_{x_1}) + \mathbf{D}^2(\widehat{B}_{x_2}) + \ldots + \mathbf{D}^2(\widehat{CD}^2_{x_3+2x_4}) = \frac{17}{15}\sigma^2,$$

és

$$Q_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \operatorname{cov}(\widehat{A}_{x_1}, \widehat{B}_{x_2}) + \operatorname{cov}(\widehat{A}_{x_1}, \widehat{C}_{x_3}) + \ldots + \operatorname{cov}(\widehat{CD}_{x_3+x_4}, \widehat{CD}^2_{x_3+2x_4}).$$

$Q_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 120 tag összege, de ezen tagok közül csak 22 különbözik nullától, (amint az a 7. táblázatból látható); a számítási munka teljesen leegyszerűsödik, mert igaz a következő állítás:

$$Q_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} \dfrac{-5}{27}\sigma^2 \text{ a 3-dik blokkba tartozó kísérleteknél} \\[2ex] \dfrac{-11}{54}\sigma^2 \text{ az 1., 2., 4. és 5. blokkba tartozó kísérleteknél} \\[2ex] \dfrac{1}{4}\sigma^2 \text{ az el nem végzett kísérleteknél.} \end{cases} \tag{16}$$

Bizonyítás. a) Legyen $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ a 3. blokkba tartozó kísérlet, azaz legyen

$$y_1 + y_2 + y_3 \equiv y_1 + 2\,y_2 + y_4 \equiv 0\,.$$

Alkalmazzuk cikkünk problémájára az

$$x_i' \equiv x_i - y_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

szinttranszformációt. Ez a transzformáció az ABC és AB^2D interakciók szintjét változatlanul hagyja, így az elvégzendő kísérletek ugyanazok maradnak és a blokkbeosztás változatlan marad. A transzformáció az $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ szintkombinációt a (0000) szintkombinációba viszi át. A legkisebb négyzetek módszere egyetlen megoldáshoz vezet, s így

$$\mathbf{D}^2(y_1 \widehat{y_2\, y_3}\, y_4) = \mathbf{D}^2(0\, \widehat{0\, 0}\, 0)\,.$$

amiből, a $Q_2(0, 0, 0, 0)$ kifejezést a 7. táblázat alapján kiszámolva, (16) első része következik.

b) Legyen $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ az 1. vagy 2. blokkba tartó kísérlet, azaz legyen

$$y_1 + y_2 + y_3 \equiv 0$$
$$y_1 + 2\,y_2 + y_4 \not\equiv 0\,.$$

Alkalmazzuk a következő szinttranszformációt:

$$x_i' \equiv x_1 - y_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$x_4' \equiv (x_1 + 2\,x_2 + x_4)\,(y_1 + 2\,y_2 + y_4) - x_1 + y_1 - 2\,x_2 + 2\,y_2\,.$$

Ez a transzformáció az ABC interakció szintjét változatlanul hagyja, az AB^2D interakció szintjét $(y_1 + 2y_2 + y_4)$-szeresére változtatja, így az elvégzendő kísérletek ugyanazok maradnak és a blokkbeosztás — a blokkok sorrendjétől eltekintve — változatlan marad. Az a) alatti következtetést megismételve, nyerjük, hogy

$$\mathbf{D}^2(y_1 \widehat{y_2\, y_3}\, y_4) = \mathbf{D}^2(0\, \widehat{0\, 0}\, 1)\,. \tag{17}$$

c) Ha $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ a 4. vagy 5. blokkba tartozik, azaz

$$y_1 + y_2 + y_3 \not\equiv 0$$
$$y_1 + 2y_2 + y_4 \equiv 0\,,$$

a megfelelő transzformáció

$$x_1' \equiv x_1 - y_1$$
$$x_2' \equiv 2x_2 - 2y_2$$
$$x_3' \equiv x_4 - y_4$$
$$x_4' \equiv (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3) - x_1 + y_1 - x_2 + y_2\,.$$

A transzformáció az ABC interakció szintjét $(y_1 + y_2 + y_3)$-szorosára változtatva, felcseréli az AB^2D interakció szintjével, így az előzőkhöz hasonlóan az elvégzendő kísérleteken és a blokkbeosztáson nem változtat. (17) tehát ebben az esetben is érvényes és így (16) második állítása a 7. táblázat alkalmazásával igazolható.

d) Ha $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ a 2. táblázatban nem szerepel, azaz

$$y_1 + y_2 \quad + y_3 \not\equiv 0\,,$$
$$y_1 + 2y_2 + y_4 \not\equiv 0\,,$$

akkor az

$$x_1' \equiv x_1 - y_1$$
$$x_2' \equiv x_2 - y_2$$
$$x_3' \equiv (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3) - x_1 + y_1 - x_2 + y_2$$
$$x_4' \equiv (x_1 + 2x_2 + x_4)(y_1 + 2y_2 + y_4) - x_1 + y_1 - 2x_2 + 2y_2$$

transzformáció alkalmazása hasonlóan, mint fennt, arra vezet hogy

$$\mathbf{D}^2(y_1 \widehat{y_2 y_3} y_4) = \mathbf{D}^2(0\widehat{01}1)\,,$$

és így a (16) utolsó állítása is a 7. táblázat alkalmazásával egyszerűen igazolható.

Ezzel állításunkat bebizonyítottuk és így a (13) alatti becslés szórásnégyzetére a következő eredményt kaptuk:

$$(18)\qquad \mathbf{D}^2(x_1 \widehat{x_2 x_3} x_4) = \left|\begin{array}{ll} \dfrac{103}{135}\sigma^2 & \text{a 3. blokkba tartozó kísérleteknél} \\[2ex] \dfrac{98}{135}\sigma^2 & \text{az 1., 2., 4. és 5. blokkba tartozó kísérleteknél} \\[2ex] \dfrac{49}{30}\sigma^2 & \text{az el nem végzett kísérleteknél.} \end{array}\right.$$

μ becslésének elhagyása. Becslési eljárásunk módosítható olyanformán, hogy a (13) egyenlőség jobboldaláról $\hat{\mu}$-t elhagyjuk. Az így számított ,,kísérleti eredmények'' várható értéke egy ismeretlen additív konstansban különbözik a valódi kísérleti eredmények várható értékétől. A számított értékek egymáshoz viszonyítva — a becslési hibától eltekintve — helyes képet mutatnak, ami lehetővé teszi az optimális szintkombináció kíválasztását, de anélkül, hogy az optimális beállítás melletti kísérlet eredményének várható értékét ismernénk.[7]

Az eljárás előnye viszont az, hogy a becslés szórásnégyzete némileg csökken $\left(\text{a } Q_1(x_1,x_2,x_3,x_4) \text{ kifejezésből elhagyható } \mathbf{D}^2(\hat{\mu})\right)$. Megállapíthatjuk, hogy ez a módosítás a szórásokban csupán 1—2%-os eltéréseket eredményez.

7. §. Gyakorlati útmutatás a számítások elvégzéséhez

A 3—6. § számos olyan megállapítást, táblázatot, levezetést tartalmaz, amelynek a kísérleti adatok kiértékelésénél közvetlen szerepe nincs. Ezért közlünk egy olyan útmutatást, amely összefoglalja a számítás főbb lépéseit.

A kísérleti tervben szereplő faktorokat és ezek szintjeit a műszaki körülmények alapján kell kijelölni. Az elvégzendő 45 kísérlet elrendezését a 2. táblázat tünteti fel. Az egy blokkba tartozó kísérletek egymásután végzendők el (mezőgazdasági alkalmazásnál egymás melletti parcellákon). A 2. táblázatban nem szerepelnek a kontrollkísérletek. Kontrollkísérletek beállítására más korlátozás nincsen, csak az, hogy valamennyi azonos beállítású legyen. Az öt kontrollkísérletet az öt blokk ,,közepén'', azaz vagy a 4. és 5., vagy az 5. és 6. kísérlet közé iktatjuk be.

Némely esetben célszerű, ha a kapott kísérleti eredményeket transzformáljuk, és a transzformált értékeket tekintjük ,,kísérleti eredmény''-nek[8].

A számítás első lépése a (7) alatti kifejezések meghatározása. A továbbiakban célszerű a $\{qy_p\}$ (lásd (7) képlet felett) kifejezéseket mind a 60 lehetséges esetben kiszámítani, azaz elkészíteni a

$$\{1\,a_0\} = (0001) + (0122) + (0210)$$

$$\{1\,a_1\} = (1020) + (1111) + (1202)$$

— — —

$$\{5\,d_2\} = (0202) + (1012) + (2122)$$

táblázatot. Ellenőrzési lehetőség:

$$\sum_{p=0}^{2} \{qy_p\} = [q\cdot] \qquad (q = 1, 2, \ldots, 5\,; y = a, b, c, d)\,.$$

[7] A külső megbízásra végzett számításnál ezt az utat követtük, mert az optimális beállítás megtalálása volt a cél.

[8] Például, ha a mért értékek 0 és 1 közé eső arányszámok, nem várható, hogy a hatások összegeződjenek, azaz a (6) alatti modell helyes legyen. Ekkor célszerű az

$$y = \log \frac{x}{1-x}$$

ún. logit-transzformáció alkalmazása. Ha az adatok 0 vagy 1 közelében csoportosulnak, logaritmikus transzformáció is megfelelő.

Fenti kifejezésekből, mint ,,előregyártott elemekből" kiszámítjuk a 3., 4. és 6. táblázatban feltüntetett becsléseket, illetve hibatagokat. A 6. táblázat becsléseire kapott értékeket behelyettesítjük (13) jobboldalába; így megkapjuk az elvégzett és az el nem végzett kísérletek várható értékének becslését.

A σ^2 becslésére szolgáló s^2 kifejezés kiszámításához előbb az η_q mennyiségek meghatározása szükséges; itt használjuk fel a kontrollkísérletek eredményét. A becslés pontosságára vonatkozóan a 12 szabadságfokú χ^2/f eloszlás táblázata (lásd pl. [7]) alapján nyerhetünk felvilágosítást, így például

$$\mathbf{P}\left(\frac{s^2}{\sigma^2} > 1{,}7522\right) = 0{,}05, \tag{19}$$

azaz kapott becslésünk kb. 95%-os valószínűséggel $\frac{7}{4}\sigma^2$ alatt marad.

A szóráselemzéssel kapcsolatos próbák leírását mellőzzük, az erre vonatkozó irodalomra az 5. §-ban utalunk.

A magasabbrendű interakciók elhanyagolásának jogosságát a (15) kifejezés alapján vizsgálhatjuk; ha az F-próba alapján kapott eredmény nem megnyugtató, a modellünk alapján számított eredményeket csak bizonyos fenntartással fogadhatjuk el, ilyenkor, — amennyiben erre mód van — a további 36 kísérletet is célszerű elvégezni.

Végül a (13) alatti becslés szórását a (18) képlet alapján számíthatjuk ki. Ezen eredmények megbízhatóságának vizsgálatánál is alkalmazhatjuk a (19) összefüggést.

(Beérkezett: 1962. október 19.)

IRODALOM

[1] Bánkövi Gy., Sarkadi K., Horváth J., Jakob K.: ,,Über Entwurf und Auswertung von Dieselölentschwefelungsversuchen mit mathematisch-statistischen Methoden". *Acta Chim. Hung.* **31** (1962) 23—30.

[2] Connor, W. S., Zelen, M.: *Fractional Factorial Experiment Designs For Factors at Three Levels.* National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series, 54, 1959.

[3] Kempthorne, O.: *The Design and Analysis of Experiments.* Wiley, New York, 1952.

[4] Mann, H. B.: *Analysis and Design of Experiments.* Dover Publications, Inc., New York, 1949.

[5] Finney, D. J.: *An Introduction to the Theory of Experimental Design.* The University of Chicago Press, 1960.

[6] Vincze I. (szerk.): *Statisztikai minőségellenőrzés.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1958.

[7] Hald, A.: *Statistical Tables and Formulas.* Wiley, New York, 1952.

[8] Addelman, S.: ,,Irregular Fractions of the 2^n Factorial Experiments", *Technometrics* **3** (1961) 479—496.

[9] Rényi A.: *Valószínűségszámítás.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.

ДРОБНО-ФАКТОРИАЛЬНОЕ ИСПЫТАНИЕ ТИПА 3^4, С 5/9-ЫМ ПОВТОРЕНИЕМ

G. BÁNKÖVI и K. SARKADI

Резюме

Написанный неправильный, дробно-факториальный план испытания (Таблица 2) был разработан для оценки результатов опытов по обессериванию дизельного топлива, производимых в Исследовательском Институте по Высокому Давлению. Работа содержает формулы для оценки.

Неправильные, дробно-факториальные планы испытания различаются от более обще использованных (правильных) планов в том, что число всевозможных экспериментов не разделимо на число производимых экспериментов. В работе [8] S. Addelman исследует неправильные дробно-факториальные планы испытания типа 2^n; авторы думают, что неправильные системы другого типа не исследованы в литературе до сих пор.

1-ая и 2-ая главы работы содержают основные понятия относительно факториальных испытаний. Использованная модель дается в 4-ой главе, уравнением (6); в этой модели пренебрежены взаимодействия второго и третьего порядка (начиная с этой главы индексы взаимодействий и конгруэнтностей поняты по модулю 3).

Проектирование производимых экспериментов и устройство блоков основаны на системе конгруэнций (5) (см. и Таблицу 1.). Формулы выводятся в двух шагах. Первые оценки основных эффектов и взаимодействий, основанные частью на блоках 1—3, частью на блоках 3—5, даются в Таблице 3. В этой тадлице $[qj]$ означает наблюденное значение, результата измерения намеченного в Таблице 2, как j-тый эксперимент q-ого блока ($q = 1, 2, \ldots, 5$; $j = 1, 2, \ldots, 9$).

$\{qy_p\}$ означает сумму результатов тех трех экспериментов в q-ом блоке ($q = 1, 2, \ldots, 5$), которые принадлежат к эффектам A, B, C или D (соответственно тому, что y равно a, b, c или d) на p-ом уровне ($p = 0, 1, 2$).

Члены ошибок даются в Таблице 4, каждый из четырех членов ошибок имеет 3 компонента и 2 степени свободы.

Таблица 5 — таблица ковариаций количеств содержанных в Таблицах 3 и 4. Пары оценок принадлежащих к равным частям Таблицы 5 (5a, b, c, d) некоррелированы. Ковариация пар тех компонентов, которые не показываются в таблице, получается помножив ковариацию соответственных пар в таблице показанных компонентов на $-\frac{1}{2}$. Данные таблицы еще нужно помножить на дисперсию σ^2 ошибки.

В втором шаге образовываются регрессивные остатки оценок Таблицы 3 относительно членов ошибок. Эти — оценки по методу наименьших квадратов и показываются в Таблице 6; их ковариации даются в Таблице 7 (толкование которой по аналогию Таблицы 5). Между средней величиной $\widehat{\mu}$ (формула [7]) и каждой оценкой Таблиц 3, 4 и 6, нет корреляции. Дисперсия средней величины $\widehat{\mu}$ дается формулой [12].

В 5-ой главе дается таблица дисперсионного анализа. По техническим причинам, в каждом блоке произведен контрольный эксперимент k_q; это обстоятельство принято во внимание (т. е. контрольные эксперименты не оказы-

вают влияние на формулы предыдущей главы). В таблице дисперсионного анализа (Таблица 9) содержатся следующие источники дисперсии: Блоки, Контрольные эксперименты, Основные эффекты: A, B, C, D, Взаимодействия первого порядка, Остаточная, Итого. s^2 служит оценкой дисперсии σ^2.

Каждый член ошибок зависит от взаимодействий второго порядка, но не в одной мере. В Таблице 10 содержатся дисперсии стандартизованных членов ошибок при альтернативной гипотезе H_1; по этой гипотезе взаимодействия второго порядка независимые, случайные векторные переменные с математическим ожиданием 0 и с матрицами ковариаций данными формулой (14). На основе Таблицы 10, статистика (15) дисперсионного отношения с степенями свободы 8, 4, предлагается для критерий значимости взаимодействий второго порядка.

В 6-ой главе исчисляется дисперсия оценки (13). Доказывается, что эта дисперсия

$$\mathbf{D}^2(\widehat{x_1 x_2 x_3 x_4}) = \begin{cases} \frac{103}{135}\sigma^2, & \text{относительно экспериментов, содержанных в блоке 3,} \\ \frac{98}{135}\sigma^2, & \text{относительно экспериментов, содержанных в блоках 1, 2, 4, 5,} \\ \frac{49}{30}\sigma^2, & \text{относительно не произведенных экспериментов.} \end{cases}$$

В 7-ой главе даются практические указания на выполнение численного расчета.

5/9 REPLICATION OF A 3^4 FACTORIAL EXPERIMENT

G. BÁNKÖVI and K. SARKADI

Abstract

The irregular fractional factorial experiment described here (Table 2) was worked out at the request of the High Pressure Research Institute for the investigation of oil desulphurisation. The paper includes formulae for evaluation.

Irregular fractional replications of factorial experiments differ from the more commonly used (regular) ones in that the number of all possible treatment combinations is not divisible by the number of the treatment combinations to be performed. Irregular fractions of 2^n factorial experiments are dealt with by S. ADDELMAN [8], those of other systems are believed not to be treated in the literature till now.

Sections 1—2 give basic concepts concerning factorial experiments.

The model applied is given in Section 4, Eq. (6), according to which the three- and four factor interaction are neglected. From this Section on, interaction indices as well as congruences refer to the module 3.

The design of the experiments to be performed and the block arrangement are based on the congruence system (5) (see also Table 1). The evaluating formulae are derived in two steps. The first estimates of the main effects and interactions, based partly on blocks 1—3, partly on blocks 3—5, are

given in Table 3. Here $[qj]$ denotes the observed value of the experiment, marked by Table 2, as the j-th treatment combination of the q-th block ($q = 1, 2, \ldots, 5$; $j = 1, 2, \ldots, 9$) $\{qy_p\}$ denotes the sum of the results of three observatios within the q-th ($q = 1, 2, \ldots, 5$) block, belonging to the effects A, B, C or D (according to whether y equals a, b, c or d resp.) and on the p-th level ($p = 0, 1, 2$).

Table 4 gives the error terms. There are four error terms, each having 3 components and 2 degrees of freedom.

Table 5 is the covariance table of the quantities of Tables 3 and 4. Pairs of estimates appearing in different subtables of Table 5 are uncorrelated. The covariance of pairs of components not appearing in the table is obtained by multiplying the covariance of the corresponding pairs of components appearing in the table with $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Entries of the table are to be multiplied by the variance σ^2 of the error term.

In the second step we formed the regression residuals of the estimates of Table 3 in respect of the error terms. These are least square estimates and are given in Table 6, while Table 7 gives their covariances (use of Table 7 is analogous to that of Table 5). The average $\widehat{\mu}$ (formula (7)) is uncorrelated to each of the other estimates, its variance is given by formula (12).

Section 5 gives the analysis of variance table. By technical reasons in each block a control experiment k_q is performed, this circumstance is taken into account (the control experiments do not affect the formulae of the preceding Section). The rows of the analysis of variance table (Table 9) are as follows: Blocks, Control experiments, Main effects: A, B, C, D, Interactions of the first order, Remainder, Total. The estimate of the variance σ^2 is given by s^2.

All error terms are dependent from the three-factor interactions but not to the same degree. Table 10 gives the variances of the standardised error terms under the alternative hypothesis H_1 that the three-factor interactions are independent random vector variates with expectations 0 and covariance matrices given by (14). On basis of Tables 10 the test statistic given in (15), having degrees of freedom 8, 4, is to be recommended to test the significance of the three-factor interactions.

In Section 6 the variance of the estimate given by (13) is computed. It is proved that this variance

$$\mathbf{D}^2(x_1 \widehat{x_2} x_3 x_4) = \begin{cases} \dfrac{103}{135}\sigma^2 & \text{concerning treatment combinations contained in Block 3} \\[2ex] \dfrac{98}{135}\sigma^2 & \text{concerning treatment combinations contained in Blocks 1, 2, 4, 5} \\[2ex] \dfrac{49}{30}\sigma^2 & \text{concerning treatment combinations not to be performed.} \end{cases}$$

Section 7 gives practical hints for numerical application.

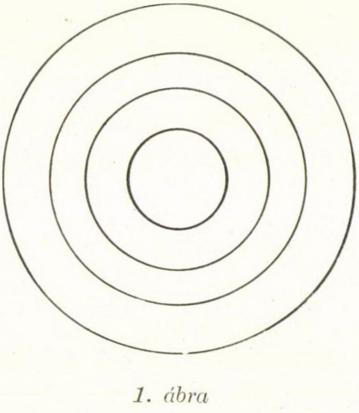
HULLÁMOS LEMEZ DEFORMÁCIÓJA ADOTT TERHELÉS MELLETT I

BIHARI IMRE

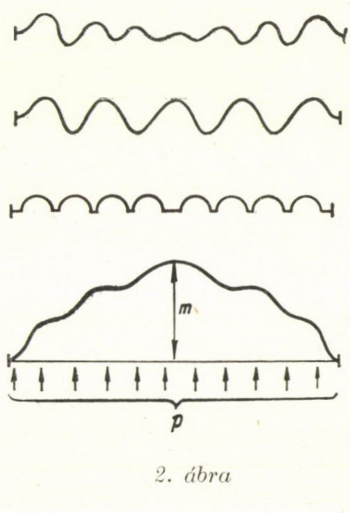
Bevezetés

Nyomásmérő, regisztráló műszerekben gyakran alkalmaznak hullámos felületű lemezzel fedett zárt dobozokat. A doboz és a lemez többnyire köralakú. A hullámosítás célja az, hogy a lemez közepének a kitérése nagy legyen és kellő módon — lehetőleg arányosan — függjön a nyomástól. A hullámok koncentrikusan helyezkednek el a lemez felületén (1. ábra) és alakjuk a 2. ábra szerinti, vagy bármely más alak lehet. A lemez közepén az érintősík mindig vízszintes. A technikusokat elsősorban az érdekli, hogy a lemez közepének a kitérése milyen függvénye a nyomásnak, illetve az, hogy hogyan kell a lemez felületét hullámosítani, hogy ez a függvény egy előírt $m = f(p)$ függvény legyen (3. ábra). A hullámokat a lemez felületére préseléssel viszik rá.

Megjegyezzük, hogy a lemez — ellentétben a membránnal — hajlítással szemben rugalmas ellenállást mutat. Az utóbbi erre csak kifeszített állapotban képes. — A műszerekben a lemez egyenletes eloszlást mutató nyomás (terhelés) alatt áll. Először a lemeznek — vastagságához képest — csak kis kitérését fogjuk vizsgálni (nagy kihajlás tárgyalását lásd 3.-ban), valamint feltesszük, hogy pontjainak a kitérése a szimmetriasíkjára merőleges[1], végül azt, hogy



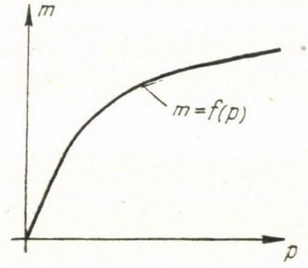
1. ábra



2. ábra

[1] Ez feltehető, ha a hullámok elég „laposak".

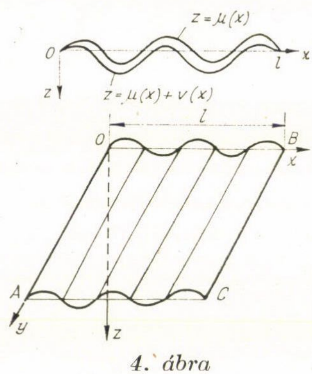
a lemez homogén, izotrop és rugalmas viselkedése a Hooke-törvénynek megfelelő. A kérdés tanulmányozása céljából előbb a következő — önmagában sem érdektelen — segédfeladatot oldjuk meg.[2]



3. ábra

1. Téglalap alakú, hosszú, hullámos lemez hengeres hajlítása

A lemez hossza legyen tetszőleges, szélessége l, vastagsága h és hosszával párhuzamosan hullámos. Legyen befogva, vagy forgásképesen feltámasztva (ún. egyszerű feltámasztás) az $\overline{OA}$ és $\overline{BC}$ szélei mentén úgy, hogy vízszintes reakcióerő ne támadjon. Különben az alakváltozás jórészt hajlítás és nem nyújtás következménye, amiért a mondott reakcióerő csak jelentéktelen lehet.



4. ábra

Keressük a lemez lehajlását adott terhelés mellett. A koordinátarendszer helyzetét a 4. ábra mutatja. — Hogy a hajlítás hengeres az azt jelenti, hogy független az y-tól, ami elérhető, ha a lemez elég hosszú. Tekintsük a lemez ún. középfelületét. Legyen az (xz) síkkal párhuzamos metszetének az egyenlete terheletlen helyzetben $z = u(x)$, terhelve — lehajlás után — $z = w(x) = u(x) + v(x)$. Tehát $v(x)$ magát a lehajlást jelenti.

[2] Hullámos kör alakú lemez feszültségi állapotának meghatározását lásd K. Stange: Der Spannungzustand einer Kreisringschale, Ingenieur-Archiv 2 (1931) 47—91. dolgozatában. A lemez kihajlását ott nem tárgyalja. Módszere roppant nehézkes.

Az $u(x)$-ről feltesszük, hogy görbülete abszolút értékben egy bizonyos pozitív érték alatt marad. $u(x)$ és $v(x)$ legyenek szakaszonként háromszor folytonosan differenciálhatók. A v lehajlást és v' deriváltját abszolút értékben kicsinek vesszük u — ill. u'-höz képest, illetve, ahol az $|u|$ ill. $|u'|$ kicsiny, ott a h-ill. az 1-hez képest. A v'-re vonatkozó feltevést indokolja, hogy — mint már megjegyeztük — a jelen esetben elsősorban csak hajlításról van szó, a nyújtás igen kis mértékű, sőt a középfelületnél semmi. Nincs ívhosszváltozás.[3] Ilyenkor a középfelületre merőleges sík-keresztmetszetek hajlítás után is ugyanilyenek maradnak, csak elfordulnak úgy, hogy a lemezt mint egy l hosszúságú, h vastagságú rudat tekinthetjük. Vegyük a lemeznek két y tengellyel párhuzamos normálsík közé eső elemi darabját. Legyen a síkok szöge $d\alpha$, a középfelületből kimetszett szakasz hossza ds_0, a tőle z távolságban[4] kimetszett szakasz hossza ds, a középfelület görbületi sugara R. Terhelés (hajlítás) alatt e mennyiségek legyenek $d\alpha'$, $ds_0' = ds_0$, ds', R'. Számítsuk ki az $\varepsilon_x = \dfrac{ds' - ds}{ds}$ relatív nyúlást. Az 5. ábra szerint

$$ds = (R + z)\,d\alpha = (R + z)\frac{ds_0}{R} = ds_0 + \frac{z}{R}ds_0$$

$$ds' = (R' + z)\,d\alpha' = (R' + z)\frac{ds_0}{R'} = ds_0 + \frac{z}{R'}ds_0 .$$

Ebből

$$ds' - ds = z\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right)ds_0$$

és így

$$\varepsilon_x = \frac{ds' - ds}{ds} = z\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right)\frac{ds_0}{ds} = z\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right)\frac{R}{R + z}. \tag{1}$$

(Pl. ha síklemezt hajlítunk $R = \infty$, $\varepsilon_x = \dfrac{z}{R'}$ Hooke-törvénye szerint az ε_x, ε_y relatív nyúlások a σ_x, σ_y feszültségekkel így függnek össze:

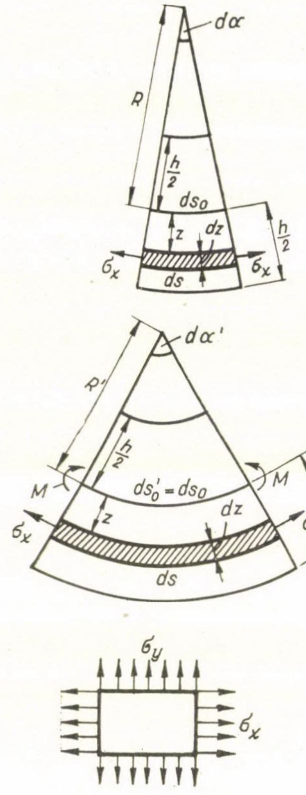
$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x - \nu\sigma_y}{E} \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y - \nu\sigma_x}{E} = 0 \end{aligned}\right. \tag{2}$$

ahol E a nyújtási modulus, ν a Poisson-féle állandó $\left(0 < \nu < 1\,;\ kb. = \dfrac{1}{3}\right)$.

---

[3] Viszont, ha *minden* x-re szigorúan (és nem közelítőleg) fennállna, hogy $\int\limits_0^x \sqrt{1 + u'^2}\,dx = \int\limits_0^x \sqrt{1 + w'^2}\,dx$, akkor innen $u'(x) \equiv w'(x)$, ill. $u(x) \equiv w(x)$ következnék.

[4] Itt z nem a z tengely mentén mért koordináta, hanem a középrétegtől a normális mentén vett távolság.



5. *ábra*

Az oldalirányú (y irányú) nyúlásnak zérusnak kell lennie, hogy hajlítás alatt a lemez folytonos maradhasson, amiből következik, hogy $\sigma_y = \nu\sigma_x$ és így

$$\varepsilon_x = \frac{(1-\nu^2)\,\sigma_x}{E}, \quad \text{ill.} \quad \sigma_x = \frac{E\,\varepsilon_x}{1-\nu^2} \tag{3}$$

és ez a fentiek szerint

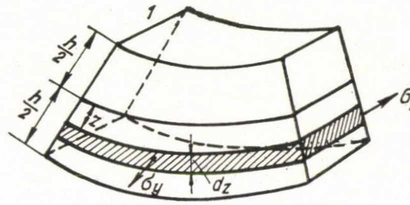
$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} R \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right) \frac{z}{R+z}. \tag{4}$$

Számítsuk ki ennek a forgatónyomatékát egy y tengellyel párhuzamos és a középfelületben benne levő tengelyre és a lemez egységnyi hosszára.[5] Ez

$$M = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz = \frac{E}{1-\nu^2} R \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z^2}{R+z} dz \;* \tag{5}$$

[5] Ami egyensúly esetén majd a külső erők nyomatékával kell hogy egyenlő legyen.

* **Megjegyzés a korrektúránál.** Freud Géza felhívta a figyelmemet az (1), (4), (6) képletek bizonyos Grashof-féle képletekkel való hasonlóságára (l. pl. Muttnyánszky: Szilárdságtan (1961) 279—292. o.). Ezek azonban csak rudakra vonatkoznak. Lemezek ilyen tárgyalása — legjobb tudomásom szerint — nem ismeretes az irodalomban.



6. ábra

(ti. R és R' a z-től függetlenek), de

$$I = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z^2}{R+z} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(z - R + \frac{R^2}{R+z}\right) dz = \left[\frac{(z-R)^2}{2} + R^2 \log (R+z)\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} =$$

$$= \frac{\left(R-\frac{h}{2}\right)^2 - \left(R+\frac{h}{2}\right)^2}{2} + R^2 \log \frac{R+\frac{h}{2}}{R-\frac{h}{2}} = -hR + 2R^2 \frac{1}{2} \log \frac{1+\frac{h}{2R}}{1-\frac{h}{2R}}.$$

Mint kikötöttük, R egy pozitív érték fölött van, mégpedig legyen speciálisan $2R \gg h$, vagyis $\frac{h}{2R} \ll 1$. Ekkor a logaritmus sorfejtése gyorsan konvergál és

$$I = -hR + 2R^2 \left(\frac{h}{2R} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2R}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2R}\right)^5 + \dots\right) =$$

$$= -hR + hR + \frac{2R^2}{3}\left(\frac{h}{2R}\right)^3 \left(1 + \frac{3}{5}\left(\frac{h}{2R}\right)^2 + \frac{3}{7}\left(\frac{h}{2R}\right)^4 + \dots\right) \approx$$

$$\approx \frac{2R^2}{3}\left(\frac{h}{2R}\right)^3 = \frac{1}{12}\frac{h^3}{R}$$

és így

$$M = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right) = D\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right) \qquad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{6}$$

D a merevség (a hajlítással szemben való ellenállás) mértéke. Adott M-nél D növekedtével csökken az alakváltozás, ti. $\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}$. A (6)-ból

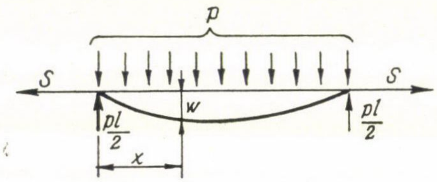
$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{M}{D} = f(x) \qquad \text{(ismert függvény)}. \tag{7}$$

Ennek alapján a hajlított lemez alakja közelítőleg grafikusan is megszerkeszthető. $z = w(x)$ pedig az

$$\frac{1}{R'} = -\frac{w''}{(1 + w'^2)^{3/2}} = f(x) \tag{8}$$

egyenletből határozható meg. Itt $w' = r$-t téve

$$\frac{r'}{(1 + r^2)^{3/2}} = -f(x) \quad \text{ill.} \quad \int \frac{dr}{(1 + r^2)^{3/2}} = -\int f(x)\, dx = F(x) + c_1$$



7. *ábra*

ahol $F(x)$ a $-f(x)$ egy primitív függvénye, vagyis

$$\frac{r}{\sqrt{r^2 + 1}} = F(x) + c_1$$

amelyből

$$r = \frac{dw}{dx} = \frac{F(x) + c_1}{\sqrt{1 - (F(x) + c_1)^2}}$$

és így

$$w(x) = \int \frac{F(x) + c_1}{\sqrt{1 - (F(x) + c_1)^2}} dx + c_2 \tag{9}$$

Vizsgáljuk meg lehetséges-e a $w'(x) \approx u'(x)$ feltevés. Ha ez igaz, akkor (8)-ból

$$w'' = -f(x)(1 + u'^2)^{3/2} = g(x) \qquad \text{(ismert függvény),} \tag{10}$$

ahonnan w két egymásutáni kvadratúrával kapható. A (10) kissé részletesebben így írható

$$w'' = u'' - \frac{M}{D}(1 + u'^2)^{3/2} \tag{10'}$$

Legyen pl. a lemez egyenletes p nyomással terhelve, akkor a hajlító nyomaték az x helyen a lemez hosszának 1 cm-ére vonatkoztatva

$$M = \frac{pl}{2}x - \frac{px^2}{2} = \frac{p}{2}x(l - x) \tag{11}$$

(a lemez alakjától függetlenül). Ezt (10′)-be téve

$$(12) \qquad w'' = u'' - \frac{p}{2D} x(l-x)(1+u'^2)^{3/2}$$

Innen

$$(13) \qquad w'(x) = u'(x) - \frac{p}{2D}\int_0^x t(l-t)(1+u'^2(t))^{3/2} dt + K, \quad K = w'(0) - u'(0)$$

De állítólag $w'(x) \approx u'(x)$. Ez akkor teljesül kielégítő pontossággal, ha $\frac{p}{2D} \ll 1$. Tehát csak ilyen nyomás (D-hez képest kis nyomás) jöhet számításba.

Ekkor $K = 0$ és (13)-ból az $\int_0^x (\int_0^t \varphi(z)\,dz)\,dt = \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt$ képlet felhasználásával

$$(14) \qquad w(x) = u(x) - \frac{p}{2D}\int_0^x (x-t)t(l-t)(1+u'^2(t))^{3/2} dt + L,$$

$$L = w(0) - u(0) = 0$$

Továbbá

$$(15) \qquad w(l) = u(l) - \frac{p}{2D}\int_0^l t(l-t)^2(1+u'^2(t))^{3/2} dt \quad \text{és} \quad u(l) = w(l) = 0$$

amivel ellentmondásra jutottunk, mert a (14) és (15)-beli integrálok nagyságrendje nem kisebb mint a (13)-beli integrálé. Így tehát csak azt kaptuk, hogy ha $\frac{p}{2D} \ll 1$*, akkor $w(x) \approx u(x)$ ami nyilvánvalóan hibás, illetve semmitmondó. Tehát annak feltételezése, hogy $w'(x) \approx u'(x)$ (vagyis, hogy $|v'(x)| \ll \ll |u'(x)|$) helytelen.

Viszont lehetséges az a fentebb tett kikötés, hogy

$$|v'(x)| \ll |u'(x)|$$

kivéve ott, ahol $|u'(x)| \ll 1$, vagyis, ahol maga $|u'(x)|$ is kicsi, ahol viszont legyen $|v'(x)| \ll 1$. Ekkor tehát

$$1 + w'^2 = 1 + (u'+v')^2 = 1 + u'^2 + 2u'v' + v'^2 = \begin{cases} 1+u'^2, & \text{ahol} \quad |v'| \ll 1 \\ 1, & \text{ahol} \quad |u'| \ll 1 \end{cases}$$

vagyis $1 + w'^2$ mindig $1 + u'^2$-nek vehető. Ekkor (13) érvényben marad, csak $K \neq 0$ és $w'(x) \not\approx u'(x)$. A (14) helyett pedig

$$(14') \qquad w(x) = u(x) - \frac{p}{2D}\int_0^x (x-t)t(l-t)(1+u'^2(t))^{3/2} dt + [w'(0) - u'(0)]x + L-$$

* Helyesebben $\frac{p}{E} \ll 1$.

et kapunk, ahol $L = w(0) - u(0) = 0$, mert $w(0) = u(0) = 0$. Továbbá

$$w(l) = u(l) - \frac{p}{2D}\int_0^l t(l-t)^2 (1+u'^2)^{3/2} dt + [w'(l) - u'(l)]\, l = 0 \tag{15'}$$

és $u(l) = 0$ szintén. Így (15′)-ből $w'(0)$ értékét megkapjuk. Ez

$$w'(0) = u'(0) + \frac{p}{2Dl}\int_0^l t(l-t)^2 (1+u'^2)^{3/2} dt.$$

Ezt (14′)-be téve

$$w(x) = u(x) - \frac{p}{2D}\int_0^x (x-t)\, t(l-t)\,(1+u'^2)^{3/2} dt + \frac{px}{2Dl}\int_0^l t(l-t)^2 (1+u'^2)^{3/2} dt. \tag{14''}$$

Tehát a $v = w - u$ lehajlás p-vel arányos. (14″)-ben $x = \frac{l}{2}$-t téve megkapjuk a lemez középének a kitérését.

A σ_x feszültség (4) és (6) alapján

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} R \frac{M}{D} \frac{z}{R+z}$$

ami kiszámítható a (11) és az $R = -\frac{(1+u'^2)^{3/2}}{u''}$ képletek felhasználásával. Viszont σ_y-t a $\sigma_y = \nu\sigma_x$ képlet adja meg.

Nem érdektelen a (7)-et pontosabb tárgyalás alá venni. (7) így írható

$$-\frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}} = -\frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}} + \frac{M}{D}.$$

Innen

$$\frac{w'}{\sqrt{1+w'^2}} = \frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} - \frac{1}{D}\int_0^x M\,dt + C = \frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} - \frac{p}{2D}\int_0^x (lt - t^2)\,dt + C =$$

$$= \frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} - \frac{p}{12D} x^2(3l - 2x) + C, \qquad C = \left.\frac{w'}{\sqrt{1+w'^2}} - \frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}}\right|_{x=0}$$

Itt most újra alkalmazva a $\sqrt{1+w'^2} \approx \sqrt{1+u'^2}$ közelítést

$$w' = u' - \frac{p}{12D} x^2(3l-2x)\sqrt{1+u'^2} + C\sqrt{1+u'^2}.$$

Ezt integrálva

$$w = u - \frac{p}{12D}\int_0^x t^2(3l-2t)\sqrt{1+u'^2}\,dt + Cs_x$$

ahol $s_x = \int_0^x \sqrt{1+u'^2}\,dx$ a $z = u(x)$ görbe ívhossza. Ebből

$$w(l) = u(l) - \frac{p}{12\,D}\int_0^l t^2(3\,l - 2\,t)\sqrt{1+u'^2}\,dt + Cs_l = 0 \quad \text{és} \quad u(l) = 0\,.$$

Innen

$$C = \frac{p}{12\,Ds_l}\int_0^l t^2(3\,l - 2\,t)\sqrt{1+u'^2}\,dt$$

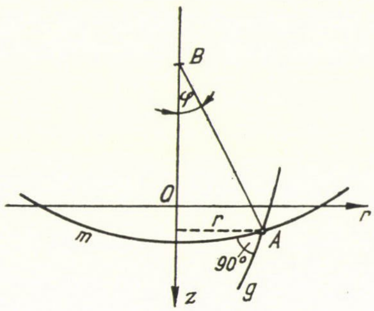
és így

$$w = u - \frac{p}{12\,D}\int_0^x t^2(3\,l - 2\,t)\sqrt{1+u'^2}\,dt + \frac{ps_x}{12\,Ds_l}\int_0^l t^2(3\,l - 2t)\sqrt{1+u'^2}\,dt.$$

A lehajlás itt is p-vel arányos és az $u(x)$ *ívhosszától* is függ.

2. Kör alakú, hullámos lemez kis kihajlása

2.1. Egy ilyen lemez terhelve is megtartja tengelykörüli szimmetriáját, ha a terhelés is tengelyszimmetrikus. Ez elsősorban a középfelületre nézve lényeges. Ekkor a terhelés csak a szimmetriatengelytől számított r távolságtól függ. Ugyanez érvényes az eredeti alakra és a lehajlásra is, vagyis $u = u(r)$,



8. ábra

$w = w(r)$ és a lehajlást elég csak egy meridiánsíkban vizsgálni. Ennek az m metszetenek a görbülete az A pontban (terhelés nélkül)

$$\frac{1}{r_n} = -\frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}}\,. \tag{16}$$

Az A ponton átmenő erre merőleges g *normálmetszete* B görbületi középpontja a szimmetriatengelyen van, tehát a görbületi sugara $r_t = \overline{AB}$. (Ennek bizonyítását l. a Függelékben!) Ez a φ szöggel így fejezhető ki

(17) $$r_t = \frac{r}{\sin\varphi} \quad \text{ill.} \quad \frac{1}{r_t} = \frac{\sin\varphi}{r}.$$

De $\sin\varphi = \dfrac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = -\dfrac{u'}{(1+u'^2)^{1/2}}$ (a — jel a z tengely irányításának a következménye), tehát

(18) $$\frac{1}{r_t} = -\frac{u'}{r(1+u'^2)^{1/2}}.$$

Hooke-törvénye szerint a feszültségek és a relatív megnyúlások között az

(19) $$\begin{cases} E\,\varepsilon_r = \sigma_r - \nu\sigma_t \\ E\,\varepsilon_t = \sigma_t - \nu\sigma_r \end{cases}$$

összefüggés áll fenn, melyből

(20) $$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_t), \qquad \sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_r + \varepsilon_t).$$

De az 1. szerint a középfelülettől a normális mentén z távolságban

(21) $$\varepsilon_r = z\left(\frac{1}{r_n'} - \frac{1}{r_n}\right)\frac{r_n}{r_n+z}, \qquad \varepsilon_t = z\left(\frac{1}{r_t'} - \frac{1}{r_t}\right)\frac{r_t}{r_t+z},$$

ahol r_n' és r_t' a megterhelt lemezre vonatkoznak abban az A' pontban, melybe az A jutott. Tehát

(22) $$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\left(\frac{1}{r_n'} - \frac{1}{r_n}\right) r_n \frac{z}{r_n+z} + \nu\left(\frac{1}{r_t'} - \frac{1}{r_t}\right) r_t \frac{z}{r_t+z}\right]$$
$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\nu\left(\frac{1}{r_n'} - \frac{1}{r_n}\right) r_n \frac{z}{r_n+z} + \left(\frac{1}{r_t'} - \frac{1}{r_t}\right) r_t \frac{z}{r_t+z}\right].$$

A megfelelő hajlító (forgató) nyomatékok (1 cm-re vonatkoztatva)

$$M_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_r\,dz = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\left(\frac{1}{r_n'} - \frac{1}{r_n}\right) r_n \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z^2}{r_n+z}\,dz + \nu\left(\frac{1}{r_t'} - \frac{1}{r_t}\right) r_t \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z^2}{r_t+z}\,dz\right],$$

$$M_t = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_t\,dz = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\nu\left(\frac{1}{r_n'} - \frac{1}{r_n}\right) r_n \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z^2}{r_n+z}\,dz + \left(\frac{1}{r_t'} - \frac{1}{r_t}\right) r_t \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z^2}{r_t+z}\,dz\right].$$

De

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z^2\,dz}{r+z} \approx \frac{1}{12}\,\frac{h^3}{r} \qquad \text{(l. a (6) előtt)}$$

tehát

$$(23) \qquad \begin{cases} M_r = D\left[\left(\frac{1}{r_n'} - \frac{1}{r_n}\right) + \nu\left(\frac{1}{r_r'} - \frac{1}{r_t}\right)\right] \\ M_t = D\left[\nu\left(\frac{1}{r_n'} - \frac{1}{r_n}\right) + \left(\frac{1}{r_r'} - \frac{1}{r_t}\right)\right]. \end{cases} \qquad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Ebből (16) és (18) figyelembevételével

$$(24) \qquad \begin{aligned} M_r &= D\left[\left(-\frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}} + \frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}}\right) + \frac{\nu}{r}\left(-\frac{w'}{(1+w'^2)^{1/2}} + \frac{u'}{(1+u'^2)^{1/2}}\right)\right] \\ M_t &= D\left[\nu\left(-\frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}} + \frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}}\right) + \frac{1}{r}\left(-\frac{w'}{(1+w'^2)^{1/2}} + \frac{u'}{(1+u'^2)^{1/2}}\right)\right]. \end{aligned}$$

Ez az

$$U = \frac{w'}{\sqrt{1+w'^2}} - \frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} \approx \frac{w'-u'}{\sqrt{1+u'^2}}$$

jelölés és a

$$\frac{dU}{dr} + \frac{\nu}{r}U = \frac{1}{r^\nu}\,\frac{d}{dr}(r^\nu U)$$

összefüggés felhasználásával így írható[6]

$$(25) \qquad \begin{aligned} M_r &= -D\left(\frac{dU}{dr} + \frac{\nu}{r}U\right) = -\frac{D}{r^\nu}\,\frac{d}{dr}(r^\nu U) \\ M_t &= -D\left(\nu\frac{dU}{dr} + \frac{1}{r}U\right) = -\frac{D\nu}{r^{\frac{1}{\nu}}}\,\frac{d}{dr}\left(r^{\frac{1}{\nu}}U\right) \end{aligned}$$

2.2. Messünk ki a kör alakú lemezből egy elemi darabot, mégpedig a szimmetriatengelyen átmenő két síkkal (szögük $d\theta$) és két olyan (kúp) felülettel melyek merőlegesek a középfelületre és az (xy) sík rádiuszvektoraira (l. 9a. és 9b. ábra) és az (xy) sík mentén mért távolságuk dr. Ezen elemi rész egyensúlyi feltételének megállapítására vegyük szemügyre a fellépő forgatónyomatékokat.

[6] Ti. pl.

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}}\right) = \frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}}$$

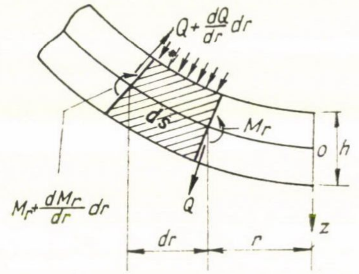
Az M_r a (cd) oldalon forgat, az M_t pedig az (ad) és (bc) oldalon. Minden erő nyomatékát egy olyan irányú tengelyre vonatkoztatjuk, mely merőleges a rádiuszvektorra. A (cd) oldalon a forgatónyomaték

(26) $$M_r r d\theta$$

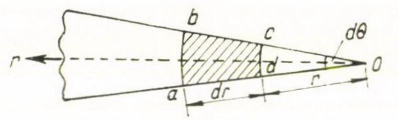
Az (ab) oldalon

(26') $$\left(M_r + \frac{dM_r}{dr} dr\right)(r + dr)\, d\theta\,.$$

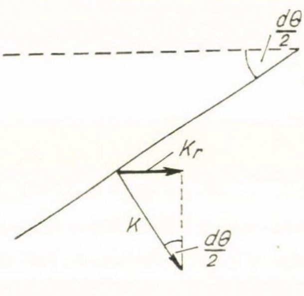
Az (ad) és (bc) oldalon ható σ_t feszültség egy dz szélességű, a középtől z távolságra levő sávon $K = \sigma_t\, dz ds$ erőt eredményez, mert az elem hossza nem dr,



9a. ábra



9b. ábra



9c. ábra

hanem ds (l. 9a. ábra). Itt $ds = dr\sqrt{1 + w'^2} \approx dr\sqrt{1 + u'^2}$. Ennek az erőnek radiális összetevője (l. 9c. ábra)

$$K_r = \sigma_t\, dz\, ds \sin\frac{d\theta}{2} \approx \sigma_t\, dz\, ds\, \frac{d\theta}{2}$$

melynek a mondott (a radiális irányra merőleges) tengelyre való nyomatéka (a másik, a tengellyel párhuzamos összetevő nem forgat)

$$\frac{1}{2} ds\, d\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_t\, dz = \frac{1}{2} ds\, d\theta\, M_t \quad [\text{l. (22) után } M_t \text{ képletét}]$$

Az (ad) és (bc) oldalra ható nyomatékok összege tehát

$$M_t\,ds\,d\theta \tag{27}$$

Ezenkívül nyíróerők is működnek, de a szimmetria folytán csak az (ab) és (cd) oldalon. Ha ennek 1 cm-re eső értéke a (cd) oldalon Q, akkor ezen az egész nyíróerő $Qrd\theta$ és az (ab) oldalon $\left(Q+\frac{dQ}{dr}dr\right)(r+dr)\,d\theta$, melyek együttes nyomatékát a magasabbrendű kicsik elhanyagolásával (az utóbbi erő helyett is csak $Qrd\theta$-t véve és e két erőt erőpárnak felfogva)

$$Qr\,d\theta\,ds \tag{28}$$

nek vesszük, mert ez erőpár karja ds. Az egyensúly feltétele a (26), (26'), (27), (28) nyomatékok megfelelő előjellel való összegének az eltűnése

$$\left(M_r+\frac{dM_r}{dr}dr\right)(r+dr)\,d\theta-M_r r\,d\theta-M_t\,ds\,d\theta+Qr\,d\theta\,ds=0,\; ds=dr\sqrt{1+u'^2}$$

melyből a magasabbrendűek elhanyagolásával az

$$M_r+\frac{dM_r}{dr}r-(M_t-Qr)\sqrt{1+u'^2}=0 \tag{29}$$

illetve

$$\frac{d(rM_r)}{ds}-M_t+Qr=0 \tag{29'}$$

egyenletre jutunk. Beírva ide M_r és M_t (25) alatti értékét a

$$-D\frac{d}{dr}\left[r^{1-\nu}\frac{d}{dr}(r^\nu U)\right]+\frac{D\nu}{r^{\frac{1}{\nu}}}\frac{d}{dr}(r^{\frac{1}{\nu}}U)\sqrt{1+u'^2}+Qr\sqrt{1+u'^2}=0 \tag{30}$$

egyenletet kapjuk, mely a differenciálások elvégzése után a $\sqrt{1+u'^2}=$ $=1+a(r)$ $(a(r)\geqq 0)$ jelölés bevezetésével az

$$r(rU')'-U-\frac{Q}{D}r^2-\left(\nu rU'+U+\frac{Q}{D}r^2\right)a=0 \tag{31}$$

alakot ölti. Ha pl. egyenletesen eloszló nyomás terheli a lemezt, akkor $Q=$ $=\frac{r^2\pi p}{2r\pi}=\frac{pr}{2}$[7] és (31) így alakul

$$r(rU')'-U-\frac{p}{2D}r^3-\left(\nu rU'+U+\frac{p}{2D}r^3\right)a=0. \tag{31'}$$

Tekintsük eme pontosabb egyenlet helyett a közelítő (csonkított)

$$r(rU')'-U-\frac{p}{2D}r^3=0 \tag{31''}$$

[7] A lemez egy középponti köralakú részére ható nyomóerő könnyen beláthatő módon egyenlő a vízszintes síkra való vetületére ható nyomóerővel.

egyenletet, mely (31′)-ből az a-t tartalmazó tagok elhagyásával (lapos hullámok esete) áll elő.[8] Ez az $r\dfrac{dU}{dr}=\dfrac{dU}{d\varrho}$ — azaz a $\dfrac{dr}{r}=d\varrho$, $\log r=\varrho$, $r=e^{\varrho}$ — helyettesítéssel a

$$\frac{d^2U}{d\varrho^2}-U-\frac{p}{2D}e^{3\varrho}=0$$

egyenletbe megy át, melynek általános megoldása $c_1e^{\varrho}+c_2e^{-\varrho}+\dfrac{p}{16\,D}e^{3\varrho}$ (c_1, c_2 tetszőleges állandók). Tehát a (31″) általános megoldása [és közelítőleg a (31′)-é is]

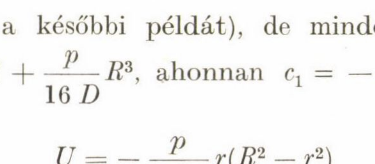
$$U=\frac{w'}{\sqrt{1+w'^2}}-\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}}\approx c_1r+c_2\frac{1}{r}+\frac{p}{16\,D}r^3. \tag{32}$$

De $r=0$ esetén $u'=w'=0$ (véges értékek), tehát $c_2=0$. A (31')-ben elhagyott tagok összege ekkor

$$H=\left[c_1(\nu+1)\,r+\frac{(3\,\nu+9)\,p}{16\,D}r^3\right]a \tag{33}$$

melynek maximális lehetséges értékét meg fogjuk vizsgálni. Két esetet fogunk tárgyalni. Az egyik az, amikor a lemez széle szilárdan be van fogva, a másik az, amikor a lemez széle szabadon foroghat, vagyis a lemez szélén a radiális nyomaték M_r eltűnik és vízszintes reakcióerő nincs a lemez hullámosítása folytán (nem lévén nyúlás a középfelületben). Ez az ún. egyszerű feltámasztás esete.

A) *A befogott lemez esete.* A lemez széle nem szükségképpen van víz-



10. ábra

szintesen befogva (l. a későbbi példát), de mindenesetre $u'(R)=w'(R)$, vagyis $u(R)=0=c_1R+\dfrac{p}{16\,D}R^3$, ahonnan $c_1=-\dfrac{p}{16\,D}R^2$ és így

$$U=-\frac{p}{16\,D}r(R^2-r^2)$$

és (32) szerint

$$\frac{w'}{\sqrt{1+w'^2}}=\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}}-\frac{p}{16\,D}r(R^2-r^2)=f(r) \tag{34}$$

[8] Később pontosabb közelítést is fogunk tárgyalni. L. 2.5. és 2.7-ben.

ahol $f(r)$ ismert függvény. Innen $w' = \frac{f}{\sqrt{1-f^2}}$ (a gyök pozitív előjellel veendő, mert w' és f előjele (34) szerint megegyezik) és így

$$w(r) = -\int_r^R \frac{f(t)}{\sqrt{1-f^2(t)}}\,dt \qquad |ti \cdot w(R) = 0|. \tag{35}$$

Ha pedig (34)-ben a $\sqrt{1+w'^2} \approx \sqrt{1+u'^2}$ közelítést vesszük

$$w' = u' - \frac{p}{16\,D} r(R^2 - r^2)\sqrt{1+u'^2}$$

melyből

$$w(r) = u(r) + \frac{p}{16\,D}\int_r^R t(R^2-t^2)\sqrt{1+u'^2(t)}\,dt \qquad (u(R)=0). \tag{36}$$

A lemez közepének a kitérése

$$m = w(0) - u(0) = \frac{p}{16\,D}\int_0^R r(R^2-r^2)\sqrt{1+u'^2(r)}\,dr = pF(R). \tag{37}$$

A kitérés mindenütt a nyomással arányos és persze a középen a legnagyobb. — Fordítva, hogyan kell hullámosítani a lemezt, hogy m az előírt $pF(R)$ függvénnyel legyen egyenlő? — Ehhez először közelítőleg megoldjuk a (36) (Volterra-típusúra emlékeztető) integrálegyenletet olyan módon, hogy az integrandusz $1 + u'^2$-e helyett $1 + w'^2$-et írunk. A megoldás tehát

$$u(r) = w(r) - \frac{p}{16\,D}\int_r^R t(R^2-t^2)\sqrt{1+w'^2(t)}\,dt. \tag{38}$$

Ebből

$$m = w(0) - u(0) = \frac{p}{16\,D}\int_0^R t(R^2-t^2)\sqrt{1+w'^2(t)}\,dt$$

és most válasszuk meg $w(r)$-et úgy, hogy $m = pF(R)$ legyen. Nyilván ez végtelen sokféleképpen lehetséges. Ezek után egy követelményeinknek megfelelő $u(r)$-et (38) ad.

A (33) alatti hiba értéke most

$$H = \frac{p}{16\,D} r(10\,r^2 - 1{,}33\,R^2)\,a$$

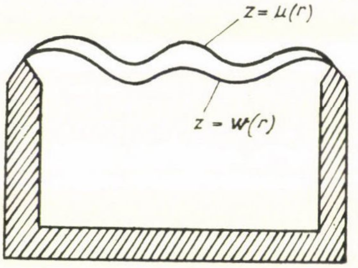
és $\frac{H}{a}$ $0 \leqq r \leqq R$-beli maximumát $r = R$-nél veszi fel. Ez $\frac{8{,}67\,pR^3}{16\,D}$ és

$$H_{\max} \leqq \frac{8{,}67\,pR^3}{16\,D}\max a.$$

Ez persze akármilyen kicsivé tehető 1-hez képest a $\frac{pR^3}{D}$ kellő kicsire választásával, de ez semmit sem mond önmagában. A (31)-re való tekintettel viszonyítsuk $H_{\max}$-ot $U_{\max} = \frac{2}{3\sqrt{3}} R^3 \frac{p}{16\,D}$-hez. Így az

$$H_{r\,\max} \leqq \frac{8{,}67 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{2} \max a = 22{,}6 \max a$$

mennyiséget kapjuk mint a pontosság valamilyen jellemzőjét, mely csak akkor kicsi, ha *max a* az (lapos hullámok). Nem lapos hullámok esetén a közelítés gyenge. Mégis ebben a pontban és a következő kettőben csak ezt az esetet tárgyaljuk, hogy kevés számítással a $w(r)$ alakulásának a tendenciájáról fogalmat alkothassunk. Pontosabb közelítést a 2.5, és 2.7. pontban határozunk meg.



11. ábra

B) *Egyszerű feltámasztás esete.* Ekkor $M_r \big|_{r=R} = 0$ kell legyen. De

$$M_r = -D\left(U' + \frac{\nu}{r} U\right)$$

és

$$M_r\big|_{r=R} = -D\left(U'(R) + \frac{\nu}{R} U(R)\right)$$

Azonban

$$U(r) = c_1 r + \frac{p}{16\,D} r^3, \qquad U'(r) = c_1 + \frac{3\,p}{16 D} r^2$$

és így

$$M_r\big|_{r=R} = -D\left[(1+\nu)\,c_1 + \frac{(3+\nu)\,p}{16\,D} R^2\right] = 0\,.$$

Innen

$$c_1 = -\frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{p}{16\,D} R^2$$

és így

$$U(r) = \frac{p}{16\,D} r\left(r^2 - \frac{3+\nu}{1+\nu} R^2\right)$$

melyből a megoldást (35) adja, ha ott $f(r) = \frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} + \frac{p}{16\,D}\, r\left(r^2 - \frac{3+\nu}{1+\nu} R^2\right)$ et írunk. (36) és (37) helyett most

$$(36') \qquad w(r) = u(r) + \frac{p}{16\,D}\int\limits_r^R t\left(\frac{3+\nu}{1+\nu} R^2 - t^2\right)\sqrt{1+u'^2(t)}\,dt$$

$$(37') \qquad m = w(0) - u(0) = \frac{p}{16\,D}\int\limits_0^R r\left(\frac{3+\nu}{1+\nu} R^2 - r^2\right)\sqrt{1+u'^2(r)}\,dr$$

kapunk, végül (36′) megoldása most közelítőleg

$$(38') \qquad u(r) = w(r) - \frac{p}{16\,D}\int\limits_r^R t\left(\frac{3+\nu}{1+\nu} R^2 - t^2\right)\sqrt{1+w'^2(t)}\,dt\,.$$

A (33) alatti hiba így alakul $H = \frac{pr}{16\,D}(10r^2 - 3{,}3R^2)\,a$, melynek maximuma

$$(39') \qquad H_{max} \leqq \frac{6{,}7\,pR^3}{16\,D}\max a\,.$$

A relatív hiba megint csak akkor kicsi, ha max a kicsi.

2.3. Kereshetjük a C_3 függvényosztályon azt a kezdeti $u(r)$ alakot, melynél adott p mellett a közép kitérése $m = w(0) - u(0)$ a lehető legnagyobb vagy legkisebb (U-t most u'-től függetlennek vesszük). — Keressük tehát pl. az A) esetben az

$$m = w(0) - u(0) = \frac{p}{16D}\int\limits_0^R r(R^2 - r^2)\sqrt{1+u'^2(r)}\,dr = I\,[u]$$

extrémumát az $u(R) = 0$ feltétel mellett. Az

$$I\,[u] = \int\limits_0^R G(r, u, u')\,dr$$

integrál első variációja

$$\delta S = \int\limits_0^R \left(\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{d}{dr}\frac{\partial G}{\partial u'}\right)\delta u dr + \left[\frac{\partial G}{\partial u'}\,\delta u\right]_0^R.$$

Egy $u(r)$ extremális tehát a

$$(40) \qquad \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{d}{dr}\frac{\partial G}{\partial u'} = 0,\ \left.\frac{\partial G}{\partial u'}\right|_{r=0} = 0$$

Euler-egyenletnek és peremfeltételnek tesz eleget. A jelen esetben $\frac{\partial G}{\partial u} \equiv 0$, tehát $\frac{d}{dr}\frac{\partial G}{\partial u'} = 0$, illetve $\frac{\partial G}{\partial u'} = c$, de a peremfeltétel miatt $c = 0$. A $\frac{\partial G}{\partial u'} = 0$ feltétel részletesen kiírva

$$(41) \qquad \frac{p}{16\,D} r(R^2 - r^2) \frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} = 0$$

ahonnan $u' \equiv 0$, $u \equiv 0$ (mert $u(R) = 0$). Ez nyilván a minimumot szolgáltatja, melynek értéke (37) szerint $\frac{pR^4}{64\,D}$. $I[u]$-nak nincs maximuma, mert a (41) alatti Euler-egyenletnek nincs más megoldása. Tehát m akármilyen nagy lehet, mint később példán is megmutatjuk. Persze ez mégsem igaz, mert egyenleteink csak h-hoz képest kis kitérésekre érvényesek.

Ha a pontosabb (35) alapján keressük az extremális $u(r)$ függvényt, akkor az

$$I[u] = m = w(0) - u(0) = \int_0^R \left(u' - \frac{f}{\sqrt{1-f^2}} \right) dr, \; f = \underbrace{\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} - \frac{p}{16\,D} r(R^2 - r^2)}_{U(r)}$$

integrálra kell végrehajtani a fenti számítást. Most

$$G(r, u, u') = u' - \frac{f}{\sqrt{1-f^2}}$$

és egyenletünk megint $\frac{\partial G}{\partial u'} = 0$. De

$$\frac{\partial G}{\partial u'} = 1 - \frac{\partial}{\partial u'}\left(\frac{f}{\sqrt{1-f^2}}\right) = 1 - \frac{d}{df}\left(\frac{f}{\sqrt{1-f^2}}\right)\frac{\partial f}{\partial u'} = 1 - \frac{1}{(1-f^2)^{3/2}} \cdot \frac{1}{(1+u'^2)^{3/2}}$$

Tehát a $\frac{\partial G}{\partial u'} = 0$ egyenlet így alakul

$$(42) \quad (1-f^2)(1+u'^2) \quad \text{ill.} \quad \pm \frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} = f = \frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} - \frac{p}{16\,D} r(R^2 - r^2)$$

Itt csak akkor nem jutunk ellentmondásra, ha a — jelet vesszük. Ekkor

$$\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} = \frac{p}{32\,D} r(R^2 - r^2) = -\frac{U}{2}$$

ahonnan

$$u' = \frac{p}{32\,D} \frac{r(R^2 - r^2)}{\sqrt{1 - \left(\frac{p}{32\,D}\right)^2 r^2 (R^2 - r^2)^2}}.$$

Mint könnyen megállapítható, a $\frac{p}{32\,D}r(R^2-r^2)$ függvény maximuma a $0 \leqq r \leqq R$ közön $\frac{R^3 p}{48\sqrt{3}\,D}$. Az u' valós voltához tehát az szükséges, hogy $\frac{R^3 p}{48\sqrt{3}\,D} < 1$ legyen. Ekkor

$$u(r) = -\frac{p}{32\,D}\int\limits_r^R \frac{t(R^2-t^2)\,dt}{\sqrt{1-\left(\frac{p}{32\,D}\right)^2 t^2(R^2-t^2)^2}}$$

és

$$u(0) = -\frac{p}{32\,D}\int\limits_0^R \frac{t(R^2-t^2)\,dt}{\sqrt{1-\left(\frac{p}{32\,D}\right)^2 t^2(R^2-t^2)^2}}.$$

Most (42) alapján

$$w(0) = -\int\limits_0^R \frac{f(r)}{\sqrt{1-f^2(r)}}\,dr = -\int\limits_0^R \left(-\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}}\right)\sqrt{1+u'^2}\,dr = \int\limits_0^R u'(r)\,dr = -u(0)$$

és így

$$m = w(0) - u(0) = -2u(0) = \frac{p}{16\,D}\int\limits_0^R \frac{t(R^2-t^2)\,dt}{\sqrt{1-\left(\frac{p}{32\,D}\right)^2 t^2(R^2-t^2)^2}} \tag{43}$$

adódik a lehetséges minimális középlehajlásra (p terhelés mellett), ami nagyobb mint a (37) alapján kapott minimális $\frac{pR^4}{64\,D}$ érték. Ha $\frac{R^3 p}{48\sqrt{3}\,D} \ll 1$, akkor a két érték jól egyezik, mint az a fenti integrál sorfejtéséből könnyen megállapítható.

Az általános esetben $u(r) = \int\limits_r^R \frac{U(t)}{\sqrt{4-U'^2(t)}}\,dt.$

2.4. Ha maximum nincs is, de minden adott $u(r)$ kezdeti alak esetére a lehajlásnak meg lehet adni egy könnyen kiszámítható felső korlátját. — Alkalmazzuk a Schwartz-féle egyenlőtlenséget pl. (37)-re. Ekkor

$$m^2 \leqq \left(\frac{p}{16\,D}\right)^2 \int\limits_0^R r^2(R^2-r^2)^2\,dr \cdot \int\limits_0^R [1+u'^2(r)]\,dr = \tag{44}$$

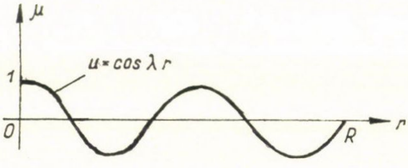
$$= \left(\frac{p}{16\,D}\right)^2 \frac{8}{105} R^7 \int\limits_0^R (1+u'^2)\,dr$$

ami az alábbi példában könnyen kiszámítható, míg (37)-ből m értéke — a gyakorlatilag fontos esetekben — zárt alakban nem fejezhető ki. Ha (37)-et először parciális integrálásnak vetjük alá és az integrálrészre ismét a Schwartz-féle egyenlőtlenséget alkalmazzuk, akkor m-re hasonlóan egy alsó korlátot nyerhetünk.

Tekintsük a következő példát. Legyen $u = \cos \lambda r$, ahol λ-t úgy határozzuk meg, hogy $u(R) = 0$, $u'(0) = 0$ legyen, vagyis, hogy a $(0, R)$ közre $2n + 1$ számú $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ negyedhullám essék (a lemez a szélén ferdén van befogva). Ebből $\lambda R = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, $\lambda = (2n+1)\dfrac{\pi}{2R}$. Most a (44) szerint

$$m^2 \leqq \left(\frac{p}{16D}\right)^2 \frac{8}{105} R^7 \int_0^R (1 + \lambda^2 \sin^2 \lambda r)\, dr = \left(\frac{p}{16D}\right)^2 \frac{R^6}{105} [8R^2 + (2n+1)^2 \pi^2]$$

$$m \leqq \frac{p}{16D} \frac{R^3}{10} \sqrt{8R^2 + (2n+1)^2 \pi^2}\,.$$



12. ábra

Ez az m egy felső korlátja. — Megmutatjuk, hogy m növekszik a λ-val, vagyis az n-nel. Az m értéke λ függvénye

$$(45) \qquad m = \frac{p}{16D} \int_0^R r(R^2 - r^2) \sqrt{1 + \lambda^2 \sin^2 \lambda r}\, dr = F(\lambda)\,.$$

Ez a $\lambda r = z$ helyettesítéssel így alakul

$$(45') \qquad m = \frac{p}{16D\lambda^4} \int_0^{\lambda R} z(R^2\lambda^2 - z^2) \sqrt{1 + \lambda^2 \sin^2 z}\, dz = F(\lambda)\,.$$

A második tényező (az integrál) nyilvánvalóan növekszik a λ-val, de az első csökken. Ezért inkább a (45)-nél maradunk. A $\sqrt{1 + \lambda^2 \sin^2 \lambda r}$ tényezőt sorbafejtjük. Ha pl. $R \geqq 25$, $\lambda \leqq (2n+1)\dfrac{\pi}{50}$ és $\lambda < 1$, ha $2n + 1 \leqq 15$ (ami kb. 4 hullámnak felel meg). Azonban $\dfrac{\lambda^2}{2 + \lambda^2} < 1$ bármekkora is a λ, tehát a mondott tényezőt ne ebben a formában fejtsük sorba, hanem inkább a következőképpen

$$\sqrt{1+\lambda^2\sin^2\lambda r} = \sqrt{1+\frac{\lambda^2}{2}(1-\cos 2\lambda r)} = \sqrt{\frac{2+\lambda^2}{2}}\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{2+\lambda^2}\cos 2\lambda r} =$$

$$= \sqrt{\frac{2+\lambda^2}{2}}\left[1-\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{2+\lambda^2}\cos 2\lambda r-\frac{1}{8}\left(\frac{\lambda^2}{2+\lambda^2}\right)^2\cos^2 2\lambda r-\dots\right].$$

Az első két tag figyelembevételével

$$m \approx \frac{p}{16D\sqrt{2}}\left[-\frac{R^2}{\sqrt{2+\lambda^2}}-\frac{3}{8}\frac{1}{\lambda^2\sqrt{2+\lambda^2}}+\frac{R^4}{4}\sqrt{2+\lambda^2}\right]$$

ami λ-val tényleg növekvő. A többi tag elhanyagolható, ha λ nem túl nagy (pl. $\lambda = 2$ esetén $\frac{\lambda^2}{2+\lambda^2} = \frac{2}{3}$ és 8 teljes hullám van a lemezen). Az $r(R^2 - r^2)$ függvény maximuma $r = R\frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}577R$-nél van. Ezért [l. (37)] m akkor lesz nagy, ha a hullámok meredeksége $|u'|$ ezen a környéken nagy.

2.5. Irjuk a (31') egyenletet az

$$r(rU')' + \nu rU' - \left(\nu rU' + U + \frac{p}{2D}r^3\right)\sqrt{1+u'^2} = 0 \tag{46}$$

alakba, mely persze az $r = e^\varrho$ helyettesítéssel a

$$\frac{d^2U}{d\varrho^2} + \nu\frac{dU}{d\varrho} - \left(\nu\frac{dU}{d\varrho} + U + \frac{p}{2D}e^{3\varrho}\right)\sqrt{1+u'^2} = 0 \tag{46'}$$

alakot ölti. Legyen most hasonlóan az előző ponthoz $u = a\cos\lambda r$, $\lambda = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, akkor

$$\sqrt{1+u'^2} = \sqrt{1+a^2\lambda^2\sin^2\lambda r}\sqrt{\frac{2+a^2\lambda^2-a^2\lambda^2\cos 2\lambda r}{2}} =$$

$$= \sqrt{1+\left(\frac{a\lambda}{\sqrt{2}}\right)^2}\sqrt{1-\frac{a^2\lambda^2}{2+a^2\lambda^2}\cos 2\lambda r}.$$

Ezt sorbafejtve

$$\sqrt{1+u'^2} = \sqrt{1+\left(\frac{a\lambda}{\sqrt{2}}\right)^2}\left[1-\frac{1}{2}\frac{a^2\lambda^2}{2+a^2\lambda^2}\cos 2\lambda r-\frac{1}{8}\left(\frac{a^2\lambda^2}{2+a^2\lambda^2}\right)^2\cos^2 2\lambda r-\dots\right]$$

Most $\max|u'| = a\lambda$. Legyen $a\lambda \leq 1$ (Ha pl. $a = 3$, akkor $\lambda \leq \frac{1}{3}$, ami $R = 50$ esetén $2n+1 \leq 11$-et jelent, ha $R = 100$, $2n+1 \leq 22$-t.) Ekkor

$$\sqrt{1+\left(\frac{a\lambda}{\sqrt{2}}\right)^2} \leq \sqrt{1{,}5} \approx 1{,}2 \quad \text{és} \quad \frac{a^2\lambda^2}{2+a^2\lambda^2} \leq \frac{1}{3}.$$

A fenti zárjelben álló tagok nagyságrendje tehát rendre

$$1\,,\ \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{72}\cdot\frac{1}{4}\,,\ \ldots$$

Vegyük tehát csak a sorfejtés első tagját, azaz a

$$\sqrt{1+u'^2}\approx\sqrt{1+\left(\frac{a\,\lambda}{\sqrt{2}}\right)^2}=b$$

közelítést. Ezzel a (46′) így alakul

$$\frac{d^2U}{d\varrho^2}+\nu(1-b)\frac{dU}{d\varrho}-bU-\frac{pb}{2\,D}e^{3\varrho}=0\,. \tag{46''}$$

Ennek az állandó együtthatós lineáris egyenletnek a karakterisztikus egyenlete

$$\varkappa^2+\nu(1-b)\,\varkappa-b=0 \tag{47}$$

melynek gyökei $\left(\text{lévén } \nu=\frac{1}{3}\right)$ $\varkappa=\frac{b-1}{6}\pm\sqrt{\left(\frac{b-1}{6}\right)^2+b}$. De — mint láttuk — $1\leqq b\leqq 1{,}2$, ezért $\frac{b-1}{6}\leqq 0{,}03$, $\left(\frac{b-1}{6}\right)^2\leqq 0{,}0009$, tehát $\varkappa\approx\pm\sqrt{b}$, amivel a homogén egyenlet egy megoldása $c_1\,e^{\sqrt{b}\,\varrho}+c_2\,e^{-\sqrt{b}\,\varrho}$. Az inhomogén egyenlet egy pertikuláris megoldása $ce^{3\varrho}$ alakban keresendő. Így $c=\frac{bp}{4(5-b)\,D}$-t kapunk. Vagyis megoldásunk

$$U=U(r)=c_1r^{\sqrt{b}}+c_2r^{-\sqrt{b}}+\frac{bp}{4(5-b)\,D}\,r^3\,.$$

Vegyük pl. a 2.3. pontban tárgyalt A) esetet. Ekkor $c_2=0$ és az $U(R)=0$ feltételből $c_1=-\frac{bp}{4(5-b)\,D}R^{3-\sqrt{b}}$ és így

$$U(r)=\frac{bp}{4(5-b)\,D}\left(r^3-R^{3-\sqrt{b}}\,r^{\sqrt{b}}\right)$$

amelynek maximuma $r=\left(\frac{\sqrt{b}}{3}\right)^{\frac{1}{3-\sqrt{b}}}R$-nél van. A b-nek a maximális $\sqrt{1+u'^2}=$ $=\sqrt{2}$-től való eltérése $\geqq 1{,}41-1{,}2=0{,}21$. A (46) ill. (46′)-ben a zárjelben álló tagok összegét ezzel szorozva kapjuk a 2.3.-nak megfelelő H „hiba"-értékét. Ezt viszonyítva egy alkalmas értékhez, fogalmat kapunk a tényleges (relatív) hiba nagyságáról. De mi legyen ez?

2.6. Ehelyett a teljesen bizonytalan eljárás helyett több használható módszert mutatunk. Az első módszer lényege az, hogy megbecsüljük, hogy két különböző $u(r)$ függvényhez — legyenek ezek u_1, u_2 — tartozó U_1 és U_2 függvények mennyire térhetnek el egymástól. A (46') ezekre így írható

$$\ddot{U}_i + \nu \dot{U}_i - \left(\nu \dot{U}_i + U_i + \frac{p}{2D} e^{3\varrho}\right) b_i = 0, \quad \left(b_i = \sqrt{1 + u_i'^2}, \ (i = 1, 2); \ \dot{U}_i = \frac{dU_i}{d\varrho}\right). \tag{48}$$

Ezekből a $V = V(\varrho) = U_2 - U_1$ jelöléssel

$$\ddot{V} + \nu \dot{V} - b_2(\nu \dot{V} + V) + (b_1 - b_2)\left(\nu \dot{U}_1 + U_1 + \frac{p}{2D} e^{3\varrho}\right) = 0 .$$

Tekintsük az U_1-et egy ismert közelítésnek (pl. a fenti $U(r)$-nek, vagy a 2.3. alatti $U(r)$ függvénynek, akkor a $W = \nu \dot{U}_1 + U_1 + \frac{p}{2D} e^{3\varrho}$ egy ismert függvény és előbbi egyenletünk így alakul

$$\ddot{V} + \nu(1 - b_2)\dot{V} - b_2 V + (b_1 - b_2) W = 0 . \tag{48'}$$

Ezzel ekvivalens a következő elsőrendű rendszer

$$\dot{V} = Z$$

$$\dot{Z} = \nu(b_2 - 1) Z + b_2 V + (b_2 - b_1) W .$$

Innen, lévén $|D_+ f| = |D_+ |f||$, (ahol D_+ a jobboldali deriválást jelenti)

$$\big|D_+|V|\big| = |\dot{V}_+| = |Z|$$

$$\big|D_+|Z|\big| = |\dot{Z}_+| \leq \nu(b_2 - 1)|Z| + b_2 |V| + |b_2 - b_1|\,|W|$$

melyből

$$\big|D_+(|V| + |Z|)\big| = \big|D_+|V| + D_+|Z|\big| \leq \big|D_+|V|\big| + \big|D_+|Z|\big| \leq$$

$$\leq (\nu(b_2 - 1) + 1)|Z| + b_2 |V| + |b_2 - b_1|\,|W| .$$

De $\nu(b_2 - 1) + 1 = \dfrac{b_2 - 1}{3} + 1 = \dfrac{b_2 + 2}{3} \leq b_2$, mert $b_2 \geq 1$, tehát

$$\big|D_+(|V| + |Z|)\big| \leq b_2(|V| + |Z|) + |b_2 - b_1|\,|W|$$

ami az $Y = |V| + |Z|$, $|b_2 - b_1| = \delta$ jelöléssel a

$$|D_+ Y| \leq b_2 Y + \delta |W| \tag{49}$$

alakot ölti. Innen Y-ra különböző pontosságú becslések nyerhetők. Ha $b_2 \leq \sqrt{2}$ és $\max \delta = \delta_m$, $\max |W| = W_m$ $(-\infty \leq \varrho \leq \log R$ ill. $0 \leq r \leq R)$ akkor

$$|D_+ Y| \leq \sqrt{2}\, Y + \delta_m W_m \tag{50}$$

melyből (l. Kamke: Differentialgleichungen reeller Funktionen, 93. o.)

$$(51)\qquad |V| \leqq Y \leqq Y(\varrho_0)\, e^{\sqrt{2}(\varrho-\varrho_0)} + \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_m W_m(e^{\sqrt{2}(\varrho-\varrho_0)} - 1) = Y(r_0)\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\sqrt{2}} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_m W_m\left(\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\sqrt{2}} - 1\right)$$

ahol r_0 és r tetszőlegesek és pl. a 2.3. A) szerint $W_m = \dfrac{8{,}67\, p R^3}{16\, D}$. De $Y(r) =$ $= |V| + |Z| = |V| + |\dot{V}_+| = |V| + r\,|V'_+|$, vagyis $Y(r_0) = |V(r_0)| +$ $+ r_0\,|V'_+(r_0)|$ és így $Y(0) = 0$, lévén $V(0) = 0$. Azonban $\lim\limits_{r_0 \to +0} Y(r_0)\left(\dfrac{r}{r_0}\right)^{\sqrt{2}}$ értékét mégsem tudjuk. Mégha feltesszük is, hogy ez 0, akkor is az (51) második tagja $r_0 \to +0$ esetén nem marad véges, bár minden más helyen tetszőlegesen kicsivé tehető, ha δ_m-et elég kicsinek választjuk. — A (49) egyenlőtlenséget tehát finomabb kezelésnek kell alávetni. A

$$(53)\qquad |D_+ Y| \leqq a(\varrho)\, Y + b(\varrho) \qquad\qquad Y(\varrho) \geqq 0$$

egyenlőtlenség a

$$(53')\qquad -aY - b \leqq D_+ Y \leqq aY + b$$

alakba írható. A jobboldali rész viszont az $\dot{Y}_+ - aY \leqq b$, illetve

$$D_+\left(Y e^{-\int\limits_{\varrho_0}^{\varrho} a\,d\varrho}\right) \leqq b e^{-\int\limits_{\varrho_0}^{\varrho} a\,d\varrho}$$

alakba, melyből integrálással

$$Y(\varrho) \leqq Y(\varrho_0)\, e^{\int\limits_{\varrho_0}^{\varrho} a\,d\varrho} + e^{\int\limits_{\varrho_0}^{\varrho} a\,d\varrho} \int\limits_{\varrho_0}^{\varrho} b e^{-\int\limits_{\varrho_0}^{\varrho} a\,d\varrho}\, d\varrho$$

illetve

$$(54)\qquad Y(r) \leqq Y(r_0)\, e^{\int\limits_{r_0}^{r} \frac{a}{r}\,dr} + e^{\int\limits_{r_0}^{r} \frac{a}{r}\,dr} \int\limits_{r_0}^{r} \frac{b}{r}\, e^{-\int\limits_{r_0}^{r} \frac{a}{r}\,dr}\, dr\,.$$

Esetünkben ez a

$$(55)\qquad |V(r)| \leqq Y(r) \leqq Y(r_0)\, e^{\int\limits_{r_0}^{r} \frac{b_2}{r}\,dr} + e^{\int\limits_{r_0}^{r} \frac{b_2}{r}\,dr} \int\limits_{r_0}^{r} \frac{|b_2 - b_1|\,|W|}{r}\, e^{-\int\limits_{r_0}^{r} \frac{b_2}{r}\,dr}\, dr$$

becslére vezet. De $b_2(r_0) \to 1$, ha $r_0 \to +0$, tehát $Y(r_0)\, e^{\int_{r_0}^{r} \frac{b_2}{r} dr} = O\left(\frac{Y(r_0)}{r_0}\right)$.

Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{r_0 \to +0} Y(r_0)\, e^{\int_{r_0}^{r} \frac{b_2}{r} dr} = 0$ és $\int\limits_0^r \frac{|b_2 - b_1|}{r}\, dr < \infty$ (konvergens) (az utóbbi feltevés egészen természetes; l. a következő pontot is) akkor (55)-ből

$$V(r) \leqq W_{\max} \int\limits_0^r \frac{|b_2 - b_1|}{r}\, dr \tag{56}$$

ami könnyen kiszámítható. — Térjünk a $|w_2 - w_1|$ becslésére. Az $U_i = \dfrac{w_i' - u_i'}{\sqrt{1 + u_i'^2}}$ összefüggésből $\sqrt{1 + u_i'^2} = b_i$ jelöléssel $w_i = u_i - \int\limits_r^R U_i\, b_i\, dr$ és $w_2 - w_1 = u_2 - u_1 - \int\limits_r^R (U_2 b_2 - U_1 b_1)\, dr$. De $U_2 b_2 - U_1 b_1 = (U_2 - U_1)\, b_2 + U_1(b_2 - b_1)$, tehát (lévén $b_2 \leqq \sqrt{2}$)

$$|w_2 - w_1| \leqq |u_2 - u_1| + \int\limits_r^R (b_2 |V| + |U_1|\, \delta)\, dr =$$

$$= |u_2 - u_1| + \sqrt{2} \int\limits_r^R |V|\, dr + \delta_m \int\limits_r^R |U_1|\, dr$$

ami könnyen kiszámítható. Ezt azonban mellőzzük, mert a következő pontban más módszerrel kérdéseinkre sokkal kielégítőbb választ fogunk kapni.

Megjegyzés. Az (53′) balodali része nem hoz hasznot számunkra, mert $Y(R) = R\, |V'_+(R)|$ nem ismeretes.

2.7. A másik — önmagában sem érdektelen — módszer abban áll, hogy az

$$r(rU')' - U - \frac{p}{2D} r^3 - \left(\nu r U' + U + \frac{p}{2D} r^3\right) a(r) = 0\,, \quad U(0) = U(R) = 0 \tag{57}$$

illetve

$$\frac{d^2U}{d\varrho^2} - U - \frac{p}{2D} e^{3\varrho} - \left(\nu \frac{dU}{d\varrho} + U + \frac{p}{2D} e^{3\varrho}\right) a(\varrho) = 0\,, \quad U(-\infty) = U(\log R) = 0$$

$$(a(r) = a(\varrho) = \sqrt{1 + u'^2} - 1\,, \quad r = e^{\varrho}) \tag{58}$$

egyenlet megoldására szukcesszív approximációt alkalmazunk, ami kissé szokatlan, mert a jelen esetben nem kezdeti-, hanem peremértékproblémáról van szó. Nulladik közelítésnek a 2.2. A)-beli $U_0(r) = U_0(\varrho) = \dfrac{p}{16\, D}\, (-R^2 e^{\varrho} +$

$+ e^{3\varrho}$) függvényt vesszük, mely történetesen kielégíti a peremfeltételeket és $a(r) \equiv 0$-nak felel meg. $U_1(\varrho)$-nak a

$$\frac{d^2U_1}{d\varrho^2} - U_1 - \frac{p}{2D} e^{3\varrho} = \left(\nu \frac{dU_0}{d\varrho} + U_0 + \frac{p}{2D} e^{3\varrho}\right) a(\varrho) = h_0(\varrho) \tag{59}$$

egyenletnek az adott peremfeltételeket kielégítő megoldását vesszük. Általában a szukcesszív approximációt a

$$\frac{d^2U_n}{d\varrho^2} - U_n - \frac{p}{2D} e^{3\varrho} = \left(\nu \frac{dU_{n-1}}{d\varrho} + U_{n-1} + \frac{p}{2D} e^{3\varrho}\right) a(\varrho) = h_{n-1}(\varrho) \tag{60}$$

egyenlettel definiáljuk, ahol $U_n(\varrho)$-nak ki kell elégítenie a peremfeltételeket. Vajon léteznek-e ilyen $\{U_n(\varrho)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ függvények egyáltalán (ti. ez nem magától értetődő) és konvergál-e ez a sorozat és a határfüggvény megoldása lesz-e az (58)-nak? A válasz igenlő lesz, továbbá megmutatjuk, hogy a feladatnak csak egy megoldása van és az $U_n(\varrho)$ hibájára is becslést adunk.

Az állandó variálásából származó képlet szerint a (60) egyenletnek az $U_n(-\infty) = 0$ feltételt kielégítő összes megoldása a következő alakba írható

$$U_n(\varrho) = U_0(\varrho) + c_n e^{\varrho} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\varrho} (e^{\varrho - t} - e^{-(\varrho - t)})\, h_{n-1}(t)\, dt \tag{61}$$

(ti. a homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{\varrho} + Be^{-\varrho}$). Határozzuk meg c_n-t úgy, hogy $U_n(\varrho)$ még az $U_n'(\log R) = 0$ feltételt is kielégítse. A

$$0 = U_n(\log R) = U_0(\log R) + c_n R + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\log R} \left(Re^{-t} - \frac{1}{R} e^{t}\right) h_{n-1}(t) dt$$

egyenletből

$$c_n = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\log R} \left(e^{-t} - \frac{1}{R^2} e^{t}\right) h_{n-1}(t)\, dt$$

Ezt (61)-be téve

$$\begin{aligned} U_n(\varrho) &= U_0(\varrho) - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\log R} \left(e^{\varrho - t} - \frac{1}{R^2} e^{\varrho + t}\right) h_{n-1}(t)\, dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\varrho} (e^{\varrho - t} - e^{-(\varrho - t)}) h_{n-1}(t)\, dt = \\ &= U_0(\varrho) - \frac{1}{2} \int_{\varrho}^{\log R} e^{\varrho - t} h_{n-1}(t)\, dt + \frac{1}{2R^2} \int_{-\infty}^{\log R} e^{\varrho + t} h_{n-1}(t) dt - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\varrho} e^{-(\varrho - t)} h_{n-1}(t)\, dt\,, \end{aligned} \tag{62}$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

ahol

$$h_n(\varrho) = \left(\nu \frac{dU_n}{d\varrho} + U_n(\varrho) + \frac{p}{2D} e^{3\varrho}\right) a(\varrho) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots). \tag{63}$$

Tehát (60) helyett (62)—(63) alapján végezzük a szukcesszív approximációt. Konvergenciájának biztosítására tegyük fel, hogy az $\int\limits_0 \frac{a(r)}{r}\,dr = \int\limits_{-\infty} a(\varrho)\,d\,\varrho$ integrál konvergens, mégpedig

$$(64)\qquad \int\limits_0^R \frac{a(r)}{r}\,dr = \int\limits_{-\infty}^{\log R} a(\varrho)\,d\varrho < \frac{1}{\nu+1}\left(\approx\frac{3}{4}\right)$$

ami nagyon ésszerű és cseppet sem túlerős feltevés. Lényegileg csak azt kívánja, hogy a lemez kezdeti alakja középen elég lapos legyen ($a(r) = O(r^\alpha)$ $\alpha > 0$, $r \to 0$). A (62)—(63) alapján az $U_n(\varrho) - U_{n-1}(\varrho) = V_n(\varrho)$ különbségre, a következő formulát kapjuk

$$(65)\qquad \begin{aligned} V_n(\varrho) = &-\frac{1}{2}\int\limits_\varrho^{\log R} e^{\varrho-t}\,W_{n-1}(t)\,a(t)\,dt + \frac{1}{2\,R^2}\int\limits_{-\infty}^{\log R} e^{\varrho+t}\,W_{n-1}(t)\,a(t)\,dt - \\ &-\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\varrho} e^{-(\varrho-t)}\,W_{n-1}(t)\,a(t)\,dt \end{aligned}$$

$$\left(W_n(t) = V_n(t) + \nu\frac{dV_n}{dt}\right) \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

Szükségünk van a $\frac{dV_n}{d\varrho}$-ra is. Ez (65) alapján

$$(66)\qquad \begin{aligned} \frac{dV_n}{d\varrho} = &-\frac{1}{2}\int\limits_\varrho^{\log R} e^{\varrho-t}\,W_{n-1}(t)\,a(t)\,dt + \frac{1}{2\,R^2}\int\limits_{-\infty}^{\log R} e^{\varrho+t}\,W_{n-1}(t)\,a(t)\,dt + \\ &+\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\varrho} e^{-(\varrho-t)}W_{n-1}(t)\,a(t)\,dt\,. \end{aligned}$$

Legyen $|\,V_n(\varrho)\,| + \nu\left|\frac{dV_n}{d\varrho}\right| = Z_n(\varrho)$ ($n = 1, 2, \ldots$). Ekkor (65)—(66) alapján

$$(67)\qquad \begin{aligned} Z_n(\varrho) \leqq &\frac{\nu+1}{2}\int\limits_\varrho^{\log R} e^{\varrho-t}\,Z_{n-1}(t)\,a(t)\,dt + \frac{\nu+1}{2R^2}\int\limits_{-\infty}^{\log R} e^{\varrho+t}\,Z_{n-1}(t)\,a(t)\,dt + \\ &+\frac{\nu+1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\varrho} e^{-(\varrho-t)}\,Z_{n-1}(t)\,a(t)\,dt \qquad (n = 2, 3, \ldots) \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy $Z_{n-1}(\varrho) \leqq a_n$ $(-\infty \leqq \varrho \leqq \log R)$, akkor (67)-ből következik, hogy (lévén $\max\limits_{\varrho \leqq t \leqq \log R} e^{\varrho-t} = 1$, $\max\limits_{-\infty \leqq t \leqq \log R} e^{\varrho+t} \leqq R^2$, és $\max\limits_{-\infty \leqq t \leqq \varrho} e^{-(\varrho-t)} = 1$)

$$Z_n(\varrho) \leqq (\nu+1)\, a_n \int\limits_{-\infty}^{\log R} a(t)\, dt = a_n q, \qquad \left(q = (\nu+1) \int\limits_{-\infty}^{\log R} a(\varrho)\, d\varrho < 1\right)$$

De $Z_1 \leqq a(-\infty \leqq \varrho \leqq \log R)$ (az a-t később meg fogjuk adni), tehát

$$Z_2 \leqq aq,\ Z_3 \leqq aq^2, \ldots, Z_n \leqq aq^{n-1}, \ldots$$

vagyis a $Z_1(\varrho) + Z_2(\varrho) + \ldots + Z_n(\varrho) + \ldots$ sor egyenletesen konvergens tehát a

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_n + \ldots$$

$$\frac{dV_1}{d\varrho} + \frac{dV_2}{d\varrho} + \ldots + \frac{dV_n}{d\varrho} + \ldots$$

sorok is abszolút és egyenletesen konvergálnak $-\infty \leqq \varrho \leqq \log R$ esetén de ezek részletösszegei $U_n(\varrho) - U_0(\varrho)$ ill. $\frac{d}{d\varrho}(U_n(\varrho) - U_0(\varrho))$ és így az $\{U_n(\varrho)\}$, $\left\{\frac{dU_n}{d\varrho}\right\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ sorozatok egyenletesen konvergálnak és az $U(\varrho) = \lim\limits_{n=\infty} U_n(\varrho)$ határfüggvény eleget tesz az

$$(68) \qquad U(\varrho) = U_0(\varrho) - \frac{1}{2} \int\limits_{\varrho}^{\log R} e^{\varrho-t} h(t)\, a(t)\, dt + \frac{1}{2R^2} \int\limits_{-\infty}^{\log R} e^{\varrho+t} h(t)\, a(t)\, dt - $$

$$- \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\varrho} e^{-(\varrho-t)} h(t)\, a(t)\, dt$$

$$\left(h(\varrho) = \nu \frac{dU}{d\varrho} + U(\varrho) + \frac{p}{2D} e^{3\varrho}\right)$$

integrálegyenletnek (hasonló igaz $\frac{dU}{d\varrho} = r \frac{dU}{dr}$-re is) amiből könnyen következik, hogy az (58) differenciálegyenletnek is. (68)-nak nincs más megoldása, mert, ha $U(\varrho)$ megoldása (68)-nak, akkor (68) és (62) alapján a fentihez hasonlóan megmutathatjuk, hogy

$$(69) \qquad |U(\varrho) - U_n(\varrho)| \leqq Aq^{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

ahol A egy állandó és ebből $U(\varrho) = \lim\limits_{n=\infty} U_n(\varrho)$. A (69) egyúttal az n-edik közelítés hibájára ad becslést. A (69) bizonyítása így történik. (68) és (62) alapján

$$X_n(\varrho) = U(\varrho) - U_n(\varrho) = -\frac{1}{2}\int_{\varrho}^{\log R} e^{\varrho-t}\, Y_{n-1}(t)\, a(t)\, dt +$$

$$+\frac{1}{2R^2}\int_{-\infty}^{\log R} e^{\varrho+t}\, Y_{n-1}(t)\, a(t)\, dt - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\varrho} e^{-(\varrho-t)}\, Y_{n-1}(t)\, a(t)\, dt$$

$$\frac{dX_n}{d\varrho} = -\frac{1}{2}\int_{\varrho}^{\log R} e^{\varrho-t}\, Y_{n-1}(t)\, a(t)\, dt + \frac{1}{2R^2}\int_{-\infty}^{\log R} e^{\varrho+t}\, Y_{n-1}(t)\, a(t)\, dt +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\varrho} e^{-(\varrho-t)}\, Y_{n-1}(t)\, a(t)\, dt$$

$$\left(Y_n(\varrho) = X_n(\varrho) + \nu\frac{dX_n}{d\varrho}\right).$$

Ebből

$$R_n(\varrho) = |X_n(\varrho)| + \nu\left|\frac{dX_n}{d\varrho}\right| \leqq \frac{\nu+1}{2}\int_{\varrho}^{\log R} e^{\varrho-t}\, R_{n-1}(t)\, a(t)\, dt +$$

$$+\frac{\nu+1}{2R^2}\int_{-\infty}^{\log R} e^{\varrho+t}\, R_{n-1}(t)\, a(t)\, dt + \frac{\nu+1}{2}\int_{-\infty}^{\varrho} e^{-(\varrho-t)}\, R_{n-1}(t)\, a(t)\, dt\,.$$

Ebből az exponenciális szorzókra megállapított felső korlátok alapján [l. (67) képlet után], ha $R_{n-1}(\varrho) \leqq A_n$, akkor

$$R_n(\varrho) \leqq q A_n$$

és ha $R_0(\varrho) \leqq A$, akkor $R_n(\varrho) \leqq Aq^n$. De

$$R_0(\varrho) = |X_0(\varrho)| + \nu\left|\frac{dX_0}{d\varrho}\right| = |U(\varrho) - U_0(\varrho)| + \nu\left|\frac{d}{d\varrho}(U(\varrho) - U_0(\varrho))\right| < A$$

bizonyos A számra, mert $U(\varrho)$ és $\frac{dU}{d\varrho}$ is korlátosak. Az utóbbi a fenti $U_n(\varrho)$ és $\frac{dU_n}{d\varrho}$ függvények egyenletes korlátosságából következik. A fentiek szerint

$$R_0(\varrho) \leqq a + aq + aq^2 + \ldots = \frac{a}{1-q} = A$$

és így

$$R_n(\varrho) \leqq \frac{aq^n}{1-q}\,. \tag{70}$$

Mégcsak az a szám meghatározása van hátra. Ez $Z_1(\varrho) = |V_1(\varrho)| + \nu \left| \frac{dV_1}{d\varrho} \right| =$
$= |U_1(\varrho) - U_0(\varrho)| + \nu \left| \frac{d}{d\varrho} (U_1(\varrho) - U_0(\varrho)) \right|$ [l. (68) képlet előtt] egy felső korlátját jelenti. Azonban

$$U_1(\varrho) - U_0(\varrho) = -\frac{1}{2} \int_{\varrho}^{\log R} e^{\varrho - t} h_0(t)\, a(t)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2R^2} \int_{-\infty}^{\log R} e^{\varrho + t} h_0(t)\, a(t)\, dt - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\varrho} e^{-(\varrho - t)} h_0(t)\, a(t)\, dt.$$

Itt

$$h_0(\varrho) = \nu \frac{dU_0}{d\varrho} + U_0(\varrho) + \frac{p}{2D} e^{3\varrho} = \frac{p}{16D} [-R^2(1+\nu)\, e^{\varrho} + 3(3+\nu)\, e^{3\varrho}].$$

Ennek alapján

$$\frac{16D}{p} (U_1(\varrho) - U_0(\varrho)) = -\frac{1}{2} \int_{\varrho}^{\log R} [-R^2(1+\nu)\, e^{\varrho} + 3(3+\nu)\, e^{\varrho+2t}]\, a(t)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2R^2} \int_{-\infty}^{\log R} [-R^2(1+\nu)\, e^{\varrho+2t} + 3(3+\nu)\, e^{\varrho+4t}]\, a(t)\, dt -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\varrho} [-R^2(1+\nu)\, e^{-\varrho+2t} + 3(3+\nu)\, e^{-\varrho+4t}]\, a(t)\, dt$$

és

$$\frac{16D}{p} \frac{d}{d\varrho} (U_1(\varrho) - U_0(\varrho)) = -\frac{1}{2} \int_{\varrho}^{\log R} [-R^2(1+\nu)\, e^{\varrho} + 3(3+\nu)\, e^{\varrho+2t}]\, a(t)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2R^2} \int_{-\infty}^{\log R} [-R^2(1+\nu)\, e^{\varrho+2t} + 3(3+\nu)\, e^{\varrho+4t}]\, a(t)\, dt -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\varrho} [R^2(1+\nu)\, e^{-\varrho+2t} - 3(3+\nu)\, e^{-\varrho+4t}]\, a(t)\, dt.$$

Tehát

$$\frac{16D}{p} Z_1(\varrho) \leqq \frac{\nu+1}{2} R^3 q + 3(3+\nu) R^3 q + \frac{1}{2R^2} [R^5(1+\nu)\, q + 3(3+\nu) R^5 q] +$$

$$+ \left[\frac{\nu+1}{2} R^3 q + 3(3+\nu) R^3 q \right] = \frac{3}{2} R^3 q (7\nu + 19)$$

vagyis

$$Z_1(\varrho) \leq \frac{3p}{32D}(7\nu + 19) R^3 q = a$$

és így (70) alapján

$$|U(\varrho) - U_n(\varrho)| \leq R_n(\varrho) \leq \frac{3p}{32D}(7\nu + 19) R^3 \frac{q^{n-1}}{1-q} \quad \left(\begin{matrix} -\infty \leq \varrho \leq \lg R \\ 0 \leq r \leq R \end{matrix} \right).$$

Ekkor (37) alapján $m = \frac{p}{16D} \int\limits_0^R U(r) \sqrt{1+u'^2}\, dr, \quad m_n = \frac{p}{16D} \int\limits_0^R U_n(r) \sqrt{1+u'^2}\, dr$

és $\Delta_n = |m - m_n| \leq \frac{p}{16D} \int\limits_0^R |U - U_n| \sqrt{1+u'^2}\, dr$ és a Schwartz-féle egyenlőtlenség szerint

$$\Delta_n^2 \leq \left(\frac{p}{16D}\right)^2 \int\limits_0^R (U - U_n)^2\, dr \int\limits_0^R (1 + u'^2)\, dr\,.$$

Itt a 2.3.-beli $u = \cos \lambda r \left(\lambda = (2k + 1)\frac{\pi}{2R}\right)$ -et véve

$$\Delta_n \leq \frac{3(7\nu + 19)}{32^2 \sqrt{2}} \frac{R^3 p^2}{D^2} \frac{q^{n+1}}{1-q} \sqrt{8R^2 + (2k+1)^2 \pi^2}$$

Ez az n-edik közelítés hibája ($2k + 1$ a lemezen levő negyedhullámok száma).

3. Köralakú hullámos lemez nagy kihajlása

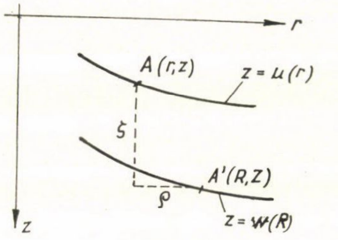
Köralakú lemeznél körszimmetrikus terhelés esetén a lemez egy pontja a függőleges $\zeta = \zeta(r, z) = \zeta(r, u(r)) = \zeta(r)$ elmozduláson kívül csak radiális $\varrho = \varrho(r, z) = \varrho(r, u(z)) = \varrho(r)$ elmozdulást végezhet. E kettőből tevődik össze a teljes elmozdulás, melynek eredményeképpen

$$A(r, z) \rightarrow A'(R, Z)$$

ahol

(71) $$R = r + \varrho(r)\,, \quad Z = u(r) + \zeta(r)$$

Ez a $w = w(R)$ görbe paraméteres egyenlete. Paraméter az r. A 2.1. pontbeli megállapítások a (23) egyenletig most is változatlanul érvényesek. Mint ott meg van jegyezve [a (21) képlet után] az r_n' és r_t' a megterhelt lemezre vonatkoznak és abban az A' pontban képzendők, melybe A jutott és persze az új görbe egyenlete alapján. Csak ez a $z = w(R)$ egyenlet explicite nem írható fel és a (23) képletben és minden további képletben w, w', w'', w''' argumentuma



13. ábra

nem r, hanem $R = r + \varrho(r)$ lenne ismeretlen $\varrho(r)$ függvénnyel. E mennyiségeket inkább (71) alapján írjuk fel. Mégpedig

$$\frac{1}{r_n'} = -\frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}} = -\frac{\ddot Z\dot R - \dot Z\ddot R}{(\dot Z^2+\dot R^2)^{3/2}} = -\frac{(\ddot u+\ddot\zeta)(1+\dot\varrho)-\ddot\varrho(\dot u+\dot\zeta)}{[(1+\dot\varrho)^2+(\dot u+\dot\zeta)^2]^{3/2}}$$

$$\frac{1}{r_t'} = -\frac{w'}{R(1+w'^2)^{1/2}} = -\frac{\dot Z}{R(\dot Z^2+\dot R^2)^{1/2}} = -\frac{\dot u+\dot\zeta}{(r+\varrho)[(1+\dot\varrho)^2+(\dot u+\dot\zeta)^2]^{1/2}}\,.$$

A magasabbrendű kicsik elhanyagolásával

$$\frac{1}{r_n'} = -\frac{\ddot u+\ddot\zeta+\ddot u\dot\varrho-\dot u\ddot\varrho}{(1+2\dot\varrho+\dot u^2+2\dot u\dot\zeta)^{3/2}}$$

$$\frac{1}{r_t'} = -\frac{\dot u+\dot\zeta}{(r+\varrho)(1+2\dot\varrho+\dot u^2+2\dot u\dot\zeta)^{1/2}}\,.$$

Ezeket kell (24)-be tennünk, hogy M_r és M_t helyes értékét megkapjuk

$$(24')\qquad \begin{aligned} M_r &= D\Bigg[\left(-\frac{\ddot u+\ddot\zeta+\ddot u\dot\varrho-\dot u\dot\varrho}{(1+2\dot\varrho+\dot u^2+2\dot u\dot\zeta)^{3/2}}+\frac{\ddot u}{(1+\dot u^2)^{3/2}}\right)+ \\ &\quad + \nu\left(-\frac{\dot u+\dot\zeta}{(r+\varrho)(1+2\dot\varrho+\dot u^2+2\dot u\dot\zeta)^{1/2}}+\frac{\dot u}{r(1+\dot u^2)^{1/2}}\right)\Bigg] \\ M_t &= D\Bigg[\nu\left(-\frac{\ddot u+\ddot\zeta+\ddot u\dot\zeta-\dot u\ddot\varrho}{(1+2\dot\varrho+\dot u^2+2\dot u\dot\zeta)^{3/2}}+\frac{\ddot u}{(1+\dot u^2)^{3/2}}\right)+ \\ &\quad + \left(-\frac{\dot u+\dot\zeta}{(r+\varrho)(1+2\dot\varrho+\dot u^2+2\dot u\dot\zeta)^{1/2}}+\frac{\dot u}{r(1+\dot u^2)^{1/2}}\right)\Bigg]\,. \end{aligned}$$

A (29') egyenlet helyett pedig

$$(29'')\qquad \frac{d(RM_r)}{d\sigma} - M_t + QR = 0\,,\quad d\sigma = dr(\dot R^2+\dot Z^2)^{1/2} = dr[(1+\dot\varrho)^2+(\dot u+\dot\zeta)^2]^{1/2}$$

veendő.
Részletesen

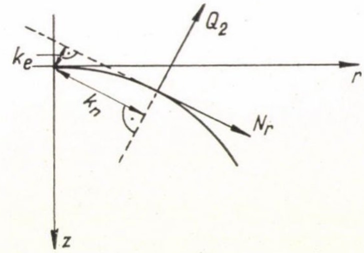
$$(72)\qquad (r+\varrho)\frac{dM_r}{dr} + M_r(1+\dot\varrho) - [M_t - Q(r+\varrho)]\,[(1+\dot\varrho)^2+(\dot u+\dot\zeta)^2]^{1/2} = 0\,.$$

A Q nyíróerő két részből tevődik össze. Az egyik a terhelésből adódik, értéke $Q_1 = \frac{pR}{2} = \frac{p}{2}(r+\varrho)$, a másik a radiális N_r erő (l. alább) következménye. Ennek Q_2 értékét a lemez belső köralakú része egyensúlyának meggondolásából nyerjük. Az egyensúly feltétele

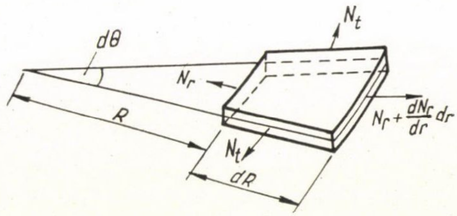
$$Q_2 k_n = N_r k_e$$

De k_n és k_e a Q_2 és az N_r egyenesének a távolsága az origótól. Ezek $k_n = -\frac{R\dot{R}+Z\dot{Z}}{\sqrt{\dot{R}^2+\dot{Z}^2}}$, $k_e = -\frac{R\dot{Z}-\dot{R}Z}{\sqrt{\dot{R}^2+\dot{Z}^2}}$ és igy $Q_2 = N_r \frac{R\dot{Z}-\dot{R}Z}{R\dot{R}+Z\dot{Z}}$, illetve ϱ és ζ-val kifejezve (a magasabbrendűeket elhagyva)

$$Q_2 = N_r \frac{r\dot{u}+\dot{u}\varrho+r\dot{\zeta}-u-u\dot{\varrho}-\zeta}{r+\varrho+r\dot{\varrho}+u\dot{u}+\dot{u}\zeta+u\dot{\zeta}}$$



14. ábra



15. ábra

A (72)-be $Q = Q_1 + Q_2$ teendő. Ezenkívül (24')-ből beírva M_r és M_t értékét egy egyenletet kapunk a két ismeretlen függvényre ϱ és ζ-ra.

Még egy egyenletet ad a lemez elemére ható erők radiális komponensei összegének az eltűnése. Legyenek a radiális és tangenciális erők N_r és N_t (1 cm-re vonatkoztatva). Ezek a (22) szerint

$$N_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r dz = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\left(\frac{1}{r'_n}-\frac{1}{r_n}\right) r_n \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{zdz}{r_n+z} + \nu\left(\frac{1}{r'_t}-\frac{1}{r_t}\right) r_t \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{zdz}{r_t+z}\right]$$

$$N_t = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_t dz = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\nu\left(\frac{1}{r'_n}-\frac{1}{r_n}\right) r_n \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{zdz}{r_n+z} + \left(\frac{1}{r'_t}-\frac{1}{r_t}\right) r_t \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{zdz}{r_t+z}\right].$$

De

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{zdz}{r+z} \approx -\frac{h^3}{12r^2}, \quad \text{ha} \quad \frac{h}{2r} \ll 1.$$

Igy

$$(73)\qquad \begin{cases} N_r = -D\left[\left(\dfrac{1}{r_n'}-\dfrac{1}{r_n}\right)\dfrac{1}{r_n}+\nu\left(\dfrac{1}{r_r'}-\dfrac{t}{r_t}\right)\dfrac{1}{r_t}\right] \\ N_t = -D\left[\left(\nu\left(\dfrac{1}{r_n'}-\dfrac{1}{r_n}\right)\dfrac{1}{r_n}+\left(\dfrac{1}{r_t'}-\dfrac{1}{r_t}\right)\dfrac{1}{r_t}\right]\end{cases} \qquad \left(D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\right)$$

A ϱ és ζ bevezetésével ezek is egy (24')-höz hasonló alakot öltenek, melynek felírását mellőzzük.

A 2.2-belihez hasonló módon jutunk a mondott második egyenletre, mely így hangzik

$$N_r - N_t + R\frac{dN_r}{d\sigma} = 0$$

ill.

$$(74)\qquad (r+\varrho)\frac{dN_r}{dr} + (N_r - N_t)\left[(1+\dot{\varrho})^2 + (\dot{u}+\dot{\zeta})^2\right]^{\frac{1}{2}} = 0\,.$$ [9]

Ez ϱ- és ζ-ra a második egyenlet. (72) és (74)-ből álló rendszert kell megoldanunk a következő feltételek mellett (befogott lemez esete, vízszintes befogás, a lemez sugara a):

$$\varrho(0) = \varrho(a) = \dot{\varrho}(0) = 0$$

$$\zeta(a) = 0,\ \left.\frac{dw}{dR}\right|_{(R=0)} = \frac{\dot{u}(0)+\dot{\zeta}(0)}{1+\dot{\varrho}(0)} = 0,\ \left.\frac{dw}{dR}\right|_{(R=a)} = \frac{\dot{u}(a)+\dot{\zeta}(a)}{1+\dot{\varrho}(a)} = 0\,,$$

Az utóbbi kettőből

$$\dot{\zeta}(0) = \dot{\zeta}(a) = 0\,.$$

Persze esetleg egy ekvivalens egyenletrendszert oldunk meg (72) és (74) rendszer helyett. Ilyet pl. a következőképpen kaphatunk. Az M_r, M_t, N_r, N_t képletei így írhatók

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{D}M_r &= A + \nu a \\ \frac{1}{D}M_t &= \nu A + a \\ \frac{1}{D}N_r &= -Ab + \nu ac \\ \frac{1}{D}N_t &= -\nu Ab + ac \end{aligned}\right\} \quad A = \frac{1}{r_n'} - \frac{1}{r_n},\quad a = \frac{1}{r_t'} - \frac{1}{r_t},\quad b = \frac{1}{r_n},\quad c = \frac{1}{r_t}$$

melyből

$$A = \frac{1}{D}M_r - \nu a$$

[9] Q_2 képlete és (74) némi korrekcióra szorul. Ez a II. részben fog megtörténni.

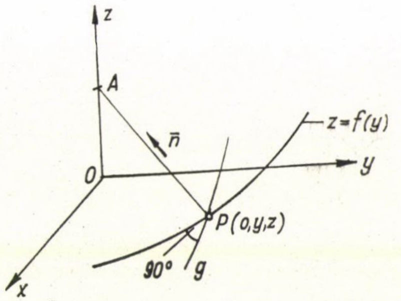
$$\frac{1}{D} M_t = \frac{\nu}{D} M_r + (1 - \nu^2)\, a$$

$$\frac{1}{D} N_r = -\frac{b}{D} M_r + \nu a(b + c)$$

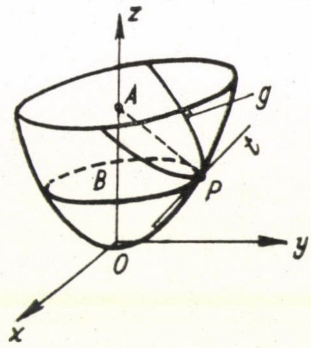
$$\frac{1}{D} N_t = -\frac{\nu b}{D} M_r + \nu^2 ab + ac\,.$$

Az M_t és N_t kiküszöbölhető ezek segítségével a (72) és (74)-ből és így M_r, N_r, ϱ, ζ (ϱ, ζ helyett R, Z is vehető) ismeretlen függvényekre két *elsőrendű* egyenletet kapunk. Ezekhez hozzávéve M_r és N_r definiáló egyenletét, melyek másodrendűek, 4 egyenletből álló egyenletrendszert nyerünk. A peremfeltételeket megfelelően át kell fogalmazni. A megoldást hatványsorok alakjában kereshetjük.[10]

4. *Függelék.* A 2.1-ben felhasználtuk azt a tényt, hogy a forgásfelület (forgástengely a z tengely) egy P pontjában a meridiángörbére merőleges



16. ábra



17. ábra

síkú *normálmetszet* görbületi középpontja a forgástengelyen van, vagyis a görbületi sugara $\overline{AP}$ (lásd 16. és 17. ábrát).

Ennek bizonyítására legyen a meridiángörbe egyenlete $z = f(y)$, tehát a forgásfelület egyenlete $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$. A mondott másik normálmetszet legyen a g görbe. A P pontot az (yz) síkban vettük fel tekintettel arra, hogy ennek a helyzete közömbös. A felület $\bar{n}$ normálvektora

$$\bar{n} = \left[-f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\; -f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},\; 1 \right]$$

és ez a P pontban

$$\bar{n} = [0, -f'(y), 1]$$

Igy az $\overline{AP}$-n átfektetett és az (yz) síkra merőleges sík egyenlete (ξ, η, ζ a futókoordináták)

$$\frac{\eta - y}{-f'(y)} = \frac{\zeta - f(y)}{1}$$

[10] A megoldás részletei — más módon — a II. részben következnek.

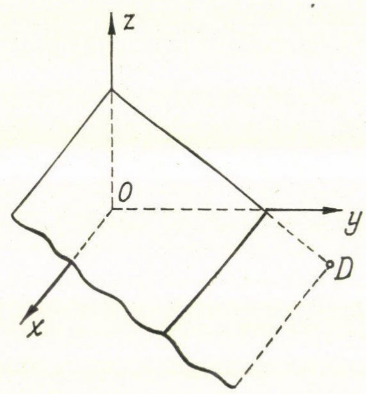
vagyis

$$(1) \qquad \zeta = f(y) - \frac{\eta - y}{f'(y)}$$

és a forgástesté

$$(2) \qquad \zeta = f(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

A g metszetgörbe egyenlete (1) és (2)-ből áll. Állítsuk elő azonban a térgörbe egyenletét paraméteres formában is. Legyen ζ a paraméter és jelöljük ezt



18. ábra

megkülönböztetésül t-vel. Ekkor η-t implicite a következő egyenlet határozza meg:

$$(3) \qquad f(\sqrt{t^2 + \eta^2}) = f(y) - \frac{\eta - y}{f'(y)}$$

és

$$(4) \qquad \zeta = f(\sqrt{t^2 + \eta^2}).$$

Legyen a térgörbe $\bar{r} = [\xi(t), \eta(t), \zeta(t)]$. Ekkor $\frac{d\xi}{dt} = \dot{\xi} = 1$ és $\dot{\eta}$-ra (3)-ból

$$(5) \qquad f'(\sqrt{t^2 + \eta^2}) \frac{t + \eta\dot{\eta}}{\sqrt{t^2 + \eta^2}} = -\frac{\dot{\eta}}{f'(y)}.$$

De P-ben $\xi = t = 0$, $\eta = y$, tehát itt

$$(6) \qquad f'(y)\dot{\eta} = -\frac{\dot{\eta}}{f'(y)}$$

mely csak úgy állhat fenn, ha $\dot{\eta} = 0$ (különben $f'^2(y) = -1$ lenne). Ekkor $\dot{\zeta}$ egyenlő (6) baloldalával, vagyis $\dot{\zeta} = 0$. Tehát

$$\dot{\bar{r}}(P) = [1, 0, 0]$$

ami szemléletesen is világos. — Továbbá $\ddot{\xi} = 0$ és (5)-ből

$$f''(\sqrt{t^2+\eta^2})\left(\frac{t+\eta\dot{\eta}}{\sqrt{t^2+\eta^2}}\right)^2 +$$

$$+ f'(\sqrt{t^2+\eta^2})\,\frac{(1+\dot{\eta}^2+\eta\ddot{\eta})\sqrt{t^2+\eta^2}-(t+\eta\dot{\eta})\dfrac{t+\eta\eta}{\sqrt{t^2+\eta^2}}}{t^2+\eta^2} = -\frac{\ddot{\eta}}{f'(y)}.$$

Itt $t = 0$, $\eta = y$, $\dot{\eta} = 0$-t téve

$$f'(y)\,\frac{1+y\ddot{\eta}}{y} = -\frac{\ddot{\eta}}{f'(y)}$$

ahonnan

$$\ddot{\eta} = -\frac{f'^2(y)}{y[1+f'^2(y)]} \quad \text{és} \quad \ddot{\zeta} = \frac{f'(y)}{y[1+f'^2(y)]}.$$

Tehát P-ben

$$\dot{\mathfrak{r}} = [1, 0, 0]$$

$$\ddot{\mathfrak{r}} = \left[0, -\frac{f'^2}{y(1+f'^2)}, \frac{f'}{y(1+f'^2)}\right]$$

$$\dot{\mathfrak{r}}\times\ddot{\mathfrak{r}} = \left[0, \frac{f'}{y(1+f'^2)}, -\frac{f'}{y(1+f'^2)}\right]$$

$$|\dot{\mathfrak{r}}\times\ddot{\mathfrak{r}}| = \frac{f'}{y(1+f'^2)}\sqrt{1+f'^2} = \frac{f'}{y\sqrt{1+f'^2}}, \quad |\dot{\mathfrak{r}}| = 1$$

és így a görbületi sugár

$$R = \frac{|\dot{\mathfrak{r}}|^3}{|\dot{\mathfrak{r}}\times\ddot{\mathfrak{r}}|} = \frac{y}{f'}\sqrt{1+f'^2}.$$

Ez éppen $\overline{AP}$-vel egyenlő, mert P koordinátái $0, y, f(y)$, az A koordinátái $0, 0, f(y) + \dfrac{y}{f'(y)}$ [l. (1)] és így távolságuk

$$\overline{AP} = \sqrt{y^2 + \frac{y^2}{f'^2(y)}} = \frac{y}{f'}\sqrt{1+f'^2}.$$

Ugyanez a tény rendkívül egyszerűen belátható Meusnier-tétele alapján is. Ti. a g görbe (l. 16. és 17. ábra) P pontbeli t érintőjén átmenő metszetgörbe görbületi középpontját a normálmetszet A görbületi középpontjának az illető metsző síkra való vetülete adja meg. De a szimmetria tengelyre merőleges metszet kör és középpontja a szimmetriatengelyen van, tehát A-nak is ott kell lennie.

ДЕФОРМАЦИЯ ВОЛНИСТОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ ЗАДАННОЙ НАГРУЗКЕ, I

I. BIHARI

Резюме

Волнистые пластинки часто применяются в приборах для измерения давления и в регистрирующих приборах. В настоящей статье определяется изгиб таких пластинок в случае равномерно распределенного давления, однако применяемый метод подходит также к решению многих подобных задач. Автор рассматривает малый цилиндрический изгиб прямоугольных пластинок, а также малый изгиб пластинок ограниченных окружностью имеющих любую толщину и у которых боковые и радиальные сдвиги пренебрежимо малы. Полученный результат дает возможность определить также напряжения. Автор дает оценку сверху для деформации при заданной начальной форме (волнистости), а также определяет ту начальную форму, которая при заданной нагрузке даёт наименьшее отклонение. Он дает также решение задачи, как надо осуществить волнистость пластинки для того, чтобы отклонение его центра было заданной функцией давления на неё. Он показывает на одном примере как в явном виде определить верхнюю границу отклонения, а также показывает, что отклонение центра пластинки растёт при увеличении числа волн впрессованных в пластинку. Для уточнения решения и для оценки расчётных ошибок даются несколько методов. Наконец рассматривается задача о большом изгибе волнистой пластинки ограниченной окружностью с учётом радиальных отклонений. Эта задача ведёт к системе уравнений, которая записывается в нескольких возможных вариантах, с указанием на их решение.

DEFORMATION OF CORRUGATED PLATES, I

I. BIHARI

Summary

Corrugated plates will often be applied in various instruments measuring and registering pressure, or in apparatus regulating by means of pressure.

The present paper after generalizing some basic relations treates the deflection of such plates for uniformly distributed lateral load. However, the approach given suites for a number of analogous problems. — Small cylindrical bending of rectangular plates and small deflection of circular plates has been discussed, where the thickness is small in comparison with the radius of curvature of the initial form. Furthermore radial and lateral displacements may be neglected, what will be satisfied provided that waves pressed on the plate are flat enough. It will be obtained upper bounds for the displacements at given initial shape and determined the initial form affording the smallest deflection for given load. The inverse problem will also be settled, viz. problem of finding the corrugation involving prescribed displacement of the center in function of the pressure. An example shows the evaluation of the upper bound for the

bending and the increase of the center's displacement with the number of the waves pressed on the plate. The solution will be determined by successive approximations completed with an error estimate. These results make possible the computation of the strains too. Lastly, large deflection has been dealt with taking also the radial displacement into account. This problem leads to a system of third order differential equations with two unknowns and six conditions at the boundary. Several alternative of the system will be presented and propositions are made with respect to the solution.

The paper of STANGE referred to in footnote [2] treated the strains only and nothing about the deflection. The well-known work of S. TIMOSHENKO: „Theory of Plates and Shells" (New York, 1940) affords on p. 326 the solution for plates with small initial curvature (rectangular corrugated plate), but only for given uniformly distributed forces acting along the edges (no lateral load). However, permitting lateral load alone the said tensile forces are not known in advance. On the contrary they raise with the bending and depend on it, as shown on p. 329 for large deflection (where these forces cannot be neglected), but only for *plain* plate.

In a planned continuation the small and large deflection of a plate with *arbitrary* waves will be discussed.

KÉTSZINTŰ TERVEZÉS: JÁTÉKELMÉLETI MODELL ÉS ITERATIV SZÁMÍTÁSI ELJÁRÁS NÉPGAZDASÁGI TÁVLATI TERVEZÉSI FELADATOK MEGOLDÁSÁRA[1]

KORNAI JÁNOS és LIPTÁK TAMÁS

Bevezetés

Az elmúlt években megkezdődött Magyarországon a matematikai módszerek alkalmazása a magasabbszintű tervező munkában. A kísérletezés két irányú. Az egyik irány: több iparágban matematikai programozást végeznek a tervek megalapozására. A részben már befejeződött vagy lezárásukhoz közeledő számítások közgazdasági optimum-kritériumok alapján határozzák meg a gazdasági tevékenységek (termelés, termelő felhasználás, export, import, beruházás stb.) legkedvezőbb programját egy-egy egész iparág számára.[2] A másik irány az input-output táblák, a statikus Leontief-modellek alkalmazása a népgazdasági tervezésben.[3] Az Országos Tervhivatal immár rendszeresen felhasználja az ágazati kapcsolatok mérlegét az éves és ötéves tervek belső összhangjának ellenőrzésére. Ez az első matematikai eszköz, amelyet Magyarországon makroökonómiai terv készítéséhez alkalmaznak. E módszer azonban, mint közismert, nem alkalmas optimalizálásra, csupán az ágazatok közötti arányosságok biztosítására hivatott.

A helyzet áttekintéséből logikusan adódik a következő lépés: olyan eljárásokat kell kidolgozni, amelyek módot adnak optimalizálásra, de most már az egész népgazdaság számára. A gyakorlati tervezők sokszor hangoztatott igénye ez, s a magyar szakirodalomban találhatunk is ilyen javaslatokat. Az eddigi elgondolások azonban nem tudtak megbirkózni a feladat megoldásának alapvető nehézségével: vagy erősen összevont programozási modellt szerkesztünk, s akkor rendkívül leszűkül a választás lehetősége, a nagyfokú aggregáció, a túlzott egyszerűsítések veszélyeztetik a számítás eredményeinek használhatóságát, vagy pedig igen nagyméretű modellt dolgozunk ki, amely mentes ezektől a hibáktól, ez esetben viszont a feladat numeri-

[1] Az alábbi dolgozatban tárgyalt módszer első változatát a szerzők 1962. májusában sokszorosított alakban tették közzé [13]. LIPTÁK T. 1962. októberében a matematikai rész egy új változatát jelentette meg [17]. A módszer közgazdasági ismertetésével és elemzésével foglalkozik KORNAI J. [14] cikke. A számítási eljárás általános részét tárgyaló „általános modell" egy korábbi változata LIPTÁK T. és NAGY A. [19] rotaprint alakban megjelent tanulmányában is megtalálható. A fenti tervezési eljárásból kiindulva LIPTÁK T. általános algoritmust dolgozott ki, amelynek segitségével bármely lineáris programozási feladatot tetszőleges kis méretű részfeladadok ismételt megoldására és koordinálására lehet visszavezetni, továbbá konvex minimalizálási vagy konkáv maximalizálási feladatokat ismételt lineáris programozásokkal lehet közelítőleg megoldani. E módszer "Two-level programming" címen került előadásra a MATEMATIKA KÖZGAZDASÁGI ALKALMAZÁSAI címmel 1963 júniusában, Budapesten tartott kollokviumon [18].

[2] Lásd pl. KORNAI J. [12] könyvét.

[3] Az input-output táblák magyarországi felhasználásáról részletes tájékoztatást nyújt a Budapesten 1961-ben tartott tudományos konferencia anyaga. Lásd: [6].

kus megoldása még nagyteljesítményű elektronikus számológépek igénybevételével sem biztosítható.

Kutatásunkban éppen ezt a nehézséget igyekeztünk áthidalni. Világos, hogy a megoldást a nagyméretű programozási feladat felbontásának útján kell keresni. Ez a gondolat már nem egyszer felmerült a makroökonómiai tervezés irodalmában: elég L. V. KANTOROVICS [10] könyvére, R. FRISCH [5] munkájára, továbbá W. TRZECIAKOWSKI [24] tanulmányára utalni. Ismeretesek matematikai módszerek is speciális alakú lineáris programozások dekompozíciójára, így G. B. DANTZIG és PH. WOLFE [3], [4] dolgozataiban. Úgy láttuk azonban, hogy az ismert eljárások nem oldják meg a problémát. Így a Dantzig—Wolfe-féle felbontási eljárást konkrét makroökonómiai modellünkre alkalmazva az ott szereplő „koordináló program" még mindig olyan nagyméretű lenne, hogy a szokásos eljárásokkal (pl. szimplex-módszerrel) számítástechnikailag kezelhetetlenné válna. Ezért a megoldásra más utat választottunk.

Az alapötletet a szocialista gazdaságban folyó tényleges tervezési gyakorlatból merítettük. Az Országos Tervhivatal mint központi szerv gazdaságpolitikai követelmények és a népgazdasági ágazatokra vonatkozó általános ismeretek alapján felosztja a népgazdaság számára rendelkezésre álló erőforrásokat, anyagokat, munkaerőt stb. az ágazatok között, és egyben kijelöli kibocsájtási feladataikat. Az ágazatok ezután saját részletes információk felhasználásával kitöltik a kapott kereteket, konkretizálják a központi tervelőirányzatokat. Eközben módosításokat javasolnak a Tervhivatalnak: a központi szerv a különböző ágazatokból kapott módosításokat összevetve új tervszámokat készít és így tovább. Operatív módszerünk lényegében ennek az „oda-visszatervezésnek" objektív optimum-kritériumokkal és kvantitatív módszerekkel kombinált, szisztematizált alakja.

Cikkünk 1. részében először egy *általános modellt* ismertetünk; ennek keretében a jelölések és definíciók megadása, valamint a tételek bizonyítása könnyebben keresztülvihető. Az 1.1 szakaszban az eredeti, ún. „teljes központi információs" feladatnak kétszintű feladattá, az 1.2 szakaszban pedig ennek poliedrikus játékká való átalakítását és iteratív megoldását tárgyaljuk. Az 1.3 szakaszban az általános és a konkrét modell kapcsolatával foglalkozunk. Dolgozatunk 2. részében a *konkrét modell*re: a hosszúlejáratú makroökonómiai tervezés feladatára alkalmazzuk az 1. rész eredményeit. A 2.1 szakasz a modell leírását adja, a 2.2 szakaszban az iteráció menetét részletezzük, a 2.3 szakaszban pedig néhány, a modellel és a számítási eljárással kapcsolatos közgazdasági problémát tárgyalunk. A dolgozatunkat a kétszintű tervezés módszerének továbbfejlesztésével, más területen való alkalmazásával és egyéb általánosítási lehetőségekkel kapcsolatos megjegyzésekkel zárjuk.

1. AZ ÁLTALÁNOS MODELL

1.1. A teljes központi információs feladat átalakítása kétszintű feladattá

Legyen

(1.1) $\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \mathbf{c}'\mathbf{x} \to \max!$ illetőleg $\mathbf{y}'\mathbf{A} \geqq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geqq \mathbf{0}, \mathbf{y}'\mathbf{b} \to \min!$

az általános modell „eredeti", „teljes központi információs" (röviden: TKI) feladatában a primál, illetve a duál változat kanonikus alakja.[4] A TKI feladat primál változóját (az $\mathbf{x}$ vektort) *TKI program*nak, duál változóját (az $\mathbf{y}$ vektort) *TKI árnyékárrendszer*nek nevezzük. Jelölje X a *megengedett TKI program*ok, X^* pedig az *optimális TKI program*ok halmazát, továbbá Y a *megengedett TKI árnyékárrendszer*ek, Y^* pedig az *optimális TKI árnyékárrendszer*ek halmazát:[5]

$$(1.2)\qquad X = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \leqq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\} \quad X^* = \{\mathbf{x}^* : \mathbf{x}^* \in X, \mathbf{c}'\mathbf{x}^* = \max_{\mathbf{x}\in X} \mathbf{c}'\mathbf{x}\}$$

$$(1.3)\qquad Y = \{\mathbf{y} : \mathbf{y}'\mathbf{A} \geqq \mathbf{c}', \mathbf{y} \geqq \mathbf{0}\} \quad Y^* = \{\mathbf{y}^* : \mathbf{y}^* \in Y, \mathbf{y}^{*\prime}\mathbf{b} = \min_{\mathbf{y}\in Y} \mathbf{y}'\mathbf{b}\}$$

Feltételezzük, hogy a TKI feladat *megoldható*, azaz létezik optimális TKI program: $X^* \neq \emptyset$.[6] Ismeretes[7], hogy ekkor létezik optimális TKI árnyékárrendszer is: $Y^* \neq \emptyset$, továbbá a primál változat maximális és a duál változat minimális célfüggvényértéke megegyezik; közös értékük a TKI feladat Φ *optimuma*:

$$(1.4)\qquad \Phi = \max_{\mathbf{x}\in X} \mathbf{c}'\mathbf{x} = \min_{\mathbf{y}\in Y} \mathbf{y}'\mathbf{b} = \mathbf{c}'\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^{*\prime}\mathbf{b}, \text{ ha } \mathbf{x}^* \in X^*, \mathbf{y}^* \in Y^*.$$

A TKI feladat megoldhatósága egyébként ekvivalens azzal a feltételezéssel, hogy megengedett TKI program és megengedett TKI árnyékárrendszer is létezik[8]:

$$(1.5)\qquad X \neq \emptyset \quad \text{és} \quad Y \neq \emptyset.$$

Legyen

$$(1.6)\qquad \mathbf{A} = [\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n], \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}' = [\mathbf{c}_1', \ldots, \mathbf{c}_n']$$

a TKI feladat primál változatában az $\mathbf{A}$ mátrix, az $\mathbf{x}$ TKI program és a $\mathbf{c}'$ TKI célfüggvény-vektor egymásnak megfelelő particionálása. (1.1) helyett ekkor a vele ekvivalens

$$(1.7)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{A}_n\mathbf{x}_n & \leqq \mathbf{b} \\ \mathbf{x}_1 & \geqq \mathbf{0} \\ \quad\ddots & \\ \qquad\quad \mathbf{x}_n & \geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_1'\mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{c}_n'\mathbf{x}_n & \to \max! \end{array}\right\}, \text{ illetőleg } \left\{\begin{array}{ll} \mathbf{y}'\mathbf{A}_1 & \geqq \mathbf{c}_1' \\ \quad\ddots & \\ \mathbf{y}'\mathbf{A}_n & \geqq \mathbf{c}_n' \\ \mathbf{y} & \geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{y}'\mathbf{b} & \to \min! \end{array}\right\}$$

alakot használhatjuk.

---

[4] Minden lineáris programozási feladat primál-duál változata az (1.1) szimmetrikus alakra transzformálható.

[5] Tetszőleges természetű z elemek esetén $\{z: \ \}$ azon z elemekből álló halmazt jelenti, amelyek a : utáni feltételeknek eleget tesznek.

[6] $\emptyset$ az üres halmaz jele.

[7] A. J. Goldman és A. W. Tucker [8], 60. oldal, Corollary 1A.

[8] A. J. Goldman és A. W. Tucker [8], 61. oldal, Theorem 2.

Ha a $\mathbf{b}$ korlátvektorral egyező méretű $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ vektorok összege $\mathbf{b}$, tehát ezek kielégítik az

$$\mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_n = \mathbf{b} \tag{1.8}$$

korlátfelosztási feltételt, akkor a belőlük összeállított

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

vektort *központi programnak*, az $\mathbf{u}_i$ vektort az $\mathbf{u}$ központi program *i-edik szektorkomponensének* nevezzük, *az* $\mathbf{u}$ *központi program* (vagy az $\mathbf{u}_i$ szektorkomponens) *melletti i-edik szektorfeladaton* pedig az

$$\mathbf{A}_i\mathbf{x}_i \leqq \mathbf{u}_i,\ \mathbf{x}_i \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{c}_i'\mathbf{x}_i \to \text{max! illetőleg } \mathbf{y}_i'\mathbf{A}_i \geqq \mathbf{c}_i',\ \mathbf{y}_i \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{y}_i'\mathbf{u}_i \to \text{min!} \tag{1.10}$$

lineáris programozási feladatot fogjuk érteni ($i = 1, \ldots, n$). (1.10)-ben $\mathbf{x}_i$ az *i-edik szektorprogram*, $\mathbf{y}_i$ az *i-edik szektorárnyékárrendszer*. Az $\mathbf{u}_i$ szektorkomponens melletti i-edik szektorfeladatban jelölje $X_i(\mathbf{u}_i)$ a *megengedett szektorprogramok*, $X_i^*(\mathbf{u}_i)$ pedig az *optimális szektorprogramok* halmazát, továbbá Y_i a *megengedett szektorárnyékárrendszerek*, $Y_i^*(\mathbf{u}_i)$ pedig az *optimális szektorárnyékárrendszerek* halmazát:

$$X_i(\mathbf{u}_i) = \{\mathbf{x}_i : \mathbf{A}_i\mathbf{x}_i \leqq \mathbf{u}_i,\ \mathbf{x}_i \geqq \mathbf{0}\},\quad X_i^*(\mathbf{u}_i) = \{\mathbf{x}_i^* : \mathbf{x}_i^* \in X_i(\mathbf{u}_i),\ \mathbf{c}_i'\mathbf{x}_i^* = \max_{\mathbf{x}_i \in X_i(\mathbf{u}_i)} \mathbf{c}_i'\mathbf{x}_i\} \tag{1.11}$$

$$Y_i = \{\mathbf{y}_i : \mathbf{y}_i'\mathbf{A}_i \geqq \mathbf{c}_i',\ \mathbf{y}_i \geqq \mathbf{0}\},\quad Y_i^*(\mathbf{u}_i) = \{\mathbf{y}_i^* : \mathbf{y}_i^* \in Y_i,\ \mathbf{y}_i^{*\prime}\mathbf{u}_i = \min_{\mathbf{y}_i \in Y_i} \mathbf{y}_i'\mathbf{u}_i\}. \tag{1.12}$$

Abból, hogy a TKI feladat megoldható, még nem következik, hogy a szektorfeladatok minden központi program — azaz az (1.8) alatti feltételnek megfelelő (1.9) alakú vektor — esetén megoldhatók. Nevezzük *értékelhető központi programoknak* azokat a központi programokat, amelyek mellett valamennyi szektorfeladat megoldható. Megmutatjuk, hogy az értékelhető központi programok egy $\dot{U}$ nemüres konvex poliedrikus halmazt[9] alkotnak. (1.3) és (1.12) összevetéséből ugyanis

$$Y = Y_1 \cap \cdots \cap Y_n. \tag{1.13}$$

Az (1.5) feltételből tehát következik, hogy

$$Y_i \neq \emptyset \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1.14}$$

Ebből egyrészt a [8] lábjegyzetben idézett tétel szerint azonnal következik hogy $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1', \ldots, \mathbf{u}_n']'$ akkor és csak akkor értékelhető központi program ha (1.8) mellett

$$X_i(\mathbf{u}_i) \neq \emptyset \qquad i = 1, \ldots, n \tag{1.15}$$

is teljesül. E közvetlen kritérium mellett egy másikat is levezethetünk: (1.14)

[9] *Konvex poliedrikus halmazon* véges sok lineáris egyenlőtlenségből és egyenletből álló feltételrendszer megoldásaiból álló zárt halmazt értünk. Lásd pl.: A. J. GOLDMAN [7].

miatt ugyanis az $\mathbf{u}_i$ melletti i-edik szektorprogramozás akkor és csak akkor oldható meg, ha $\mathbf{y}'_i\,\mathbf{u}_i$ alulról korlátos az Y_i halmazon.[10] Legyen most

$$\text{(1.16)}\quad \mathsf{Y}_i = \mathbf{Y}_i^{\triangle} + \overline{\mathbf{Y}}_i^{<} = \{\mathbf{Y}_i\mathbf{q}_i + \mu_i\overline{\mathbf{Y}}_i\overline{\mathbf{q}}_i : \mathbf{1}'\mathbf{q}_i = \mathbf{1}'\overline{\mathbf{q}}_i = 1,\ \mathbf{q}_i \geqq \mathbf{0},\ \overline{\mathbf{q}}_i \geqq 0,\ \mu_i \geqq 0\}$$

az Y_i nemüres konvex poliedrikus halmaz kanonikus felbontása.[11] Az $\mathbf{y}'_i\,\mathbf{u}_i$ lineáris függvénynek az Y_i halmazon való korlátossága ebből ekvivalens az $\overline{\mathbf{Y}}'_i\,\mathbf{u}_i \geqq \mathbf{0}$ feltétellel. Ezért az értékelhető központi programok $\dot{\mathsf{U}}$ halmazát az alábbi alakba írhatjuk:

$$\text{(1.17)}\quad \dot{\mathsf{U}} = \{\mathbf{u} = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1\\ \vdots \\ \mathbf{u}_n\end{bmatrix} : \mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_n = \mathbf{b},\ \overline{\mathbf{Y}}'_1\mathbf{u}_1 \geqq \mathbf{0}, \ldots, \overline{\mathbf{Y}}'_n\mathbf{u}_n \geqq \mathbf{0}\}\,.$$

$\dot{\mathsf{U}}$ tehát valóban konvex poliedrikus halmaz.

Jelölje $\mathsf{X}(\mathbf{u})$ azokat a TKI programokat, amelyek az $\mathbf{u} = [\mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_n]'$ értékelhető központi program melletti megengedett szektorprogramokból állíthatók össze:

$$\text{(1.18)}\quad \mathsf{X}(\mathbf{u}) = \mathsf{X}_1(\mathbf{u}_1) \times \ldots \times \mathsf{X}_n(\mathbf{u}_n) = \{\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1\\ \vdots \\ \mathbf{x}_n\end{bmatrix} : \mathbf{x}_1 \in \mathsf{X}_1(\mathbf{u}_1), \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathsf{X}_n(\mathbf{u}_n)\}\,.$$

Az összes értékelhető központi programokból álló $\dot{\mathsf{U}}$ halmaz egy (valódi vagy nem-valódi) U részhalmazáról azt mondjuk, hogy *generálja* X-et, vagy hogy U az X *generátorhalmaza*, ha

$$\text{(1.19)}\quad \mathsf{X} = \bigcup_{\mathbf{u} \in \mathsf{U}} \mathsf{X}(\mathbf{u})\,.$$

$\mathsf{U} = \dot{\mathsf{U}}$ esetén fennáll (1.19), azaz az összes értékelhető központi programból álló nemüres konvex poliedrikus $\dot{\mathsf{U}}$ halmaz generálja a megengedett TKI programokból álló X halmazt. Ezt két lépésben láthatjuk be.

1. (1.5) miatt $\mathsf{X} \neq \varnothing$. Legyen $\mathbf{x} = [\mathbf{x}'_1, \ldots, \mathbf{x}'_n]'$, és definiáljuk az $\mathbf{u}_1 = \mathbf{A}_1\,\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1} = \mathbf{A}_{n-1}\,\mathbf{x}_{n-1}$, $\mathbf{u}_n = \mathbf{b} - (\mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_{n-1})$ komponenseket. Világos, hogy $\mathbf{x}_i \in \mathsf{X}_i(\mathbf{u}_i)$, tehát $\mathsf{X}_i(\mathbf{u}_i) \neq \varnothing$, $i = 1, \ldots, n$, s ezért (1.15) miatt $\mathbf{u} = [\mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_n]'$ értékelhető központi program, $\dot{\mathsf{U}} \neq \varnothing$. Ezenfelül $\mathbf{x} \in \mathsf{X}(\mathbf{u})$ és, mivel minden $\mathbf{x} \in \mathsf{X}$ TKI programhoz a fenti konstrukció szolgáltat egy ilyen $\mathbf{u} \in \dot{\mathsf{U}}$ központi programot, $\mathsf{X} \subset \bigcup_{\mathbf{u} \in \dot{\mathsf{U}}} \mathsf{X}(\mathbf{u})$.

---

[10] A. J. GOLDMAN és A. W. TUCKER [8], 60. oldal, Corollary 1B.

[11] A. J. GOLDMAN [7], 44—49. oldalak, Theorem 1, Corollary 1A. Ha $\mathbf{y}_{i1}, \ldots, \mathbf{y}_{iN_i}$ az Y_i halmaz extrém pontjai, akkor $\mathbf{Y}_i = [\mathbf{y}_{i1}, \ldots, \mathbf{y}_{iN_i}]$. Korlátos Y_i halmaz esetén definíciószerűen $\overline{\mathbf{Y}}_i = \mathbf{0}$. Egyébként tekinthetjük az Y_i-t definiáló $\mathbf{y}'_i\,\mathbf{A}_i \geqq \mathbf{c}'_i$, $\mathbf{y}_i \geqq \mathbf{0}$ egyenlőtlenségrendszerből nyert $\overline{\mathbf{y}}'_i\,\mathbf{A}_i \geqq \mathbf{0}$, $\overline{\mathbf{y}}_i \geqq \mathbf{0}$, $\overline{\mathbf{y}}'_i\,\mathbf{1} = 1$ *redukált és normált* egyenlőtlenségrendszer megoldásaiból álló nem üres korlátos konvex poliedrikus $\overline{\mathsf{Y}}_i$ halmazt. Ha $\overline{\mathbf{y}}_{i1}, \ldots, \overline{\mathbf{y}}_{i\overline{N}_i}$ ennek extrém pontjai, akkor $\overline{\mathbf{Y}}_i = [\overline{\mathbf{y}}_{i1}, \ldots, \mathbf{y}_{i\overline{N}_i}]$. ($\mathbf{1}$ csupa 1 komponensű vektort jelent: így $\mathbf{q}_i$ és $\overline{\mathbf{q}}_i$ nemnegatív, 1 komponens-összegű, ún. *valószínűségi vektorok*. $\mathbf{Y}_i^{\triangle}$ tehát az $\mathbf{y}_{i1}, \ldots, \mathbf{y}_{iN_i}$ pontok konvex burka, $\overline{\mathbf{Y}}_i$ pedig korlátos Y_i esetén a $\mathbf{0}$ vektor, egyébként az $\overline{\mathbf{y}}_{i1}, \ldots, \overline{\mathbf{y}}_{i\overline{N}_i}$ *extrém irányok* által meghatározott konvex gúla. Y_i az idézett tétel szerint e két halmaz vektoriális összege.

2. Ha $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1', \ldots, \mathbf{u}_n']' \in \dot{\mathsf{U}}$ és $\mathbf{x}_i \in \mathsf{X}_i(\mathbf{u}_i)$, azaz $\mathbf{A}_i\,\mathbf{x}_i \leqq \mathbf{u}_i$, $\mathbf{x}_i \geqq \mathbf{0}$ $(i = 1, \ldots, n)$, akkor az (1.8) korlátfelosztási feltétel miatt $\mathbf{A}_1\,\mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{A}_n\,\mathbf{x}_n \leqq \mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_n = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1', \ldots, \mathbf{x}_n']' \geqq \mathbf{0}$, tehát $\mathbf{x} \in \mathsf{X}$. Ezért $\mathsf{X}(\mathbf{u}) \subset \mathsf{X}$, $\bigcup\limits_{\mathbf{u}\in\dot{\mathsf{U}}} \mathsf{X}(\mathbf{u}) \subset \mathsf{X}$.

Az (1.19) alatti generáló tulajdonsággal az összes értékelhető központi programok egy nemüres konvex poliedrikus halmazt alkotó *valódi* részhalmaza is rendelkezhet. A konkrét modellben felhasználandó példaként tekintsük az alábbit: speciális alakú $\mathbf{A}$ mátrix esetén (1.7) az

$$\mathbf{A}_1^{\#}\mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{A}_n^{\#}\mathbf{x}_n \leqq \mathbf{b}^{\#} \tag{1.20}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathbf{A}_1^{\circ}\mathbf{x}_1 & \leqq \mathbf{b}_1^{\circ} \\ \quad\ddots & \\ \quad\quad \mathbf{A}_n^{\circ}\mathbf{x}_n & \leqq \mathbf{b}_n^{\circ} \end{array}\right. \tag{1.21}$$

$$\mathbf{x}_1 \geqq \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{x}_n \geqq \mathbf{0} \tag{1.22}$$

$$\mathbf{c}_1'\mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{c}_n'\mathbf{x}_n \to \max! \tag{1.23}$$

alakot öltheti (itt $\mathbf{A}_i^{\circ}\,\mathbf{x}_i \leqq \mathbf{b}_i^{\circ}$ a TKI feladat olyan feltételeit foglalja össze, amelyek csak az i-edik szektorra vonatkoznak: e feltételeket az i-edik szektor *speciális szektorfeltételei*nek nevezhetjük). Célszerű itt a központi programot is

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i^{\#} \\ \mathbf{u}_{i1}^{\circ} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{in}^{\circ} \end{bmatrix} \qquad i = 1, \ldots, n \tag{1.24}$$

alakban felvenni, és ebben az esetben a korlátfelosztási feltételt az

$$\mathbf{u}_1^{\#} + \ldots + \mathbf{u}_n^{\#} = \mathbf{b}^{\#} \tag{1.25}$$

$$\mathbf{u}_{1i}^{\circ} + \ldots + \mathbf{u}_{ni}^{\circ} = \mathbf{b}_i^{\circ} \qquad i = 1, \ldots, n \tag{1.26}$$

egyenletek fejezik ki. Jelölje itt is $\dot{\mathsf{U}}$ az összes értékelhető központi programok halmazát, U pedig $\dot{\mathsf{U}}$ azon részhalmazát, amelyben minden szektor teljes egészében „megkapja" a speciális szektorfeltételeiben szereplő korlátokat:

$$\mathsf{U} = \left\{\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} : \ \mathbf{u} \in \dot{\mathsf{U}}, \ \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^{\#} \\ \mathbf{b}_1^{\circ} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \ldots, \ \mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_n^{\#} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_n^{\circ} \end{bmatrix}\right\}. \tag{1.27}$$

Világos, hogy U nemüres konvex poliedrikus részhalmaza $\dot{\mathsf{U}}$-nak, amelyre érvényes (1.19), de nem tartalmaz szükségképpen minden értékelhető központi programot: ha pl. $\mathbf{b}^{\#} \geqq \mathbf{0}$ és $\mathbf{b}_i^{\circ} > \mathbf{0}$, $i = 1, \ldots, n$, akkor $\mathsf{U} \subset \dot{\mathsf{U}}$, de $\mathsf{U} \neq \dot{\mathsf{U}}$.

Legyen most U olyan nemüres konvex poliedrikus részhalmaza $\dot{\mathsf{U}}$-nak, amely generálja X-et. Rögzítsük U-t és nevezzük elemeit *megengedett központi program*oknak. Tetszőleges $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1', \ldots, \mathbf{u}_n']'$ megengedett központi programra értelmezve vannak az $\mathbf{u}$-hoz tartozó

$$\varphi_i(\mathbf{u}_i) = \max_{\mathbf{x}_i \in X_i(\mathbf{u}_i)} \mathbf{c}'_i \mathbf{x}_i = \min_{\mathbf{y}_i \in Y_i} \mathbf{y}'_i \mathbf{u}_i \qquad i = 1, \ldots, n$$

*szektoroptimum*ok, és ezek összege, a $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi_i(\mathbf{u}_i) + \ldots + \varphi_n(\mathbf{u}_n)$ *összoptimum*. Ezek $\mathbf{u}$-nak tartományonként lineáris és folytonos konkáv függvényei. Ha ugyanis $\mathbf{y}_{i1}, \ldots, \mathbf{y}_{iN_i}$ jelölik Y_i extrém pontjait, tehát (1.16)-ban $\mathbf{Y}_i = [\mathbf{y}_{i1}, \ldots, \mathbf{y}_{iN_i}]$ írható,

$$\varphi_i(\mathbf{u}_i) = \min_{\mathbf{y}_i \in Y_i} \mathbf{y}'_i \mathbf{u}_i = \min \{\mathbf{y}'_{i1} \mathbf{u}_i, \ldots, \mathbf{y}'_{iN_i} \mathbf{u}_i\}.$$

$\mathbf{u}$ értékelhető volta miatt tehát $\varphi_i(\mathbf{u}_i)$ véges sok lineáris függvény alsó burkolója, $i = 1, \ldots, n$. Így $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi_1(\mathbf{u}_1) + \ldots + \varphi_n(\mathbf{u}_n)$ is ilyen tulajdonságú.

A TKI feladatból az (1.6) szektorbontással és a megengedett központi programhalmaz fenti módon rögzített megválasztásával származó *kétszintű feladat*on az alábbiakban részletezett feladatot értjük.

(1) ,,Központi szinten": meghatározandó(k) a maximális összoptimumot biztosító megengedett központi program(ok), más szóval: megoldandó az $\mathbf{u} \in U$, $\varphi(\mathbf{u}) \to \max$! konkáv programozási feladat, meghatározandó az *optimális központi program*okból álló

$$U^* = \{\mathbf{u}^* : \mathbf{u}^* \in U, \varphi(\mathbf{u}^*) = \max_{\mathbf{u} \in U} \varphi(\mathbf{u})\} \tag{1.28}$$

halmaz.

(2) ,,Szektori szinten": minden szektorban meghatározandó(k) az optimális központi programkomponens(ek)hez tartozó optimális szektorprogram(ok), más szóval: minden $\mathbf{u}^* = [\mathbf{u}_1^{*\prime}, \ldots, \mathbf{u}_n^*]' \in U^*$ mellett megoldandók az $\mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \leqq \mathbf{u}_i^*$, $\mathbf{x}_i \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{c}'\mathbf{x}'_i \to \max$! szektorfeladatok, tehát meghatározandók az (1.11) alatti definiált $X_i^*(\mathbf{u}_i^*)$ halmazok, $i = 1, \ldots, n$.

(3) Összeállítandó(k) az optimális központi program(ok) mellett optimális szektorprogramokból nyerhető TKI program(ok), más szóval: meghatározandó az

$$X^*(\mathbf{u}^*) = X_1^*(\mathbf{u}_1^*) \times \ldots \times X_n^*(\mathbf{u}_n^*) = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^* \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^* \end{bmatrix} : \mathbf{x}_1^* \in X_1^*(\mathbf{u}_1^*), \ldots, \mathbf{x}_n^* \in X_n^*(\mathbf{u}_n^*) \right\} \tag{1.29}$$

halmazok $\bigcup_{\mathbf{u}^* \in U^*} X^*(\mathbf{u}^*)$ alakú egyesítése.

1. TÉTEL. *Megoldható TKI feladatból származó tetszőleges kétszintű feladat is megoldható, és megoldása ekvivalens a TKI feladat megoldásával:*

$$U^* \neq \emptyset \quad \text{és} \quad X^* = \bigcup_{\mathbf{u}^* \in U^*} X^*(\mathbf{u}^*). \tag{1.30}$$

Az összoptimum maximális értéke a TKI feladat optimumával egyenlő:

$$\max_{\mathbf{u} \in U} \varphi(\mathbf{u}) = \max_{\mathbf{x} \in X} \mathbf{c}'\mathbf{x} = \Phi. \tag{1.31}$$

Bizonyítás. A tétel állításai leolvashatók az alábbi egyenlőségsorozatból:

$$\Phi = \max_{\mathbf{x} \in X} \mathbf{c}'\mathbf{x} = \max_{\mathbf{x} \in \bigcup_{\mathbf{u} \in U} X(\mathbf{u})} \mathbf{c}'\mathbf{x} = \max_{\mathbf{u} \in U} \{ \max_{\mathbf{x} \in X(\mathbf{u})} \mathbf{c}'\mathbf{x}\} =$$

$$= \max_{\mathbf{u} \in U} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \max_{\mathbf{x}_i \in X_i(\mathbf{u}_i)} \mathbf{c}'_i \mathbf{x}_i \right\} = \max_{\mathbf{u} \in U} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \min_{\mathbf{y}_i \in Y_i} \mathbf{y}'_i \mathbf{u}_i \right\} = \max_{\mathbf{u} \in U} \varphi(\mathbf{u}).$$

1.2. A kétszintű feladat átalakítása poliedrikus játékká és ennek fiktív lejátszással való iteratív megoldása

A kétszintű feladat „központi szintjén” megoldandó konkáv programozási feladat célfüggvénye a $\varphi(\mathbf{u})$ összoptimum: ez a függvény a TKI feladat adatai és a szektorbontás alapján ugyan meghatározható, de ez számítástechnikailag az eredetinél nehezebb feladat. Ezért a kétszintű feladatot célszerűen átalakítjuk. Jelölje V az (1.12) szerinti *megengedett szektorárnyékárrendszer-együttesek* halmazát:

$$\mathsf{V} = \mathsf{Y}_1 \times \ldots \times \mathsf{Y}_n = \{\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n \end{bmatrix} : \mathbf{y}_1 \in \mathsf{Y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n \in \mathsf{Y}_n\}. \tag{1.32}$$

Az összoptimumra az alábbi előállítást nyerjük:

$$\varphi(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\mathbf{u}_i) = \sum_{i=1}^{n} \min_{\mathbf{y}_i \in \mathsf{Y}_i} \mathbf{y}_i' \mathbf{u}_i = \min_{\substack{\mathbf{y}_i \in \mathsf{Y}_i \\ i=1,\ldots,n}} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{y}_i' \mathbf{u}_i = \min_{\mathbf{v} \in \mathsf{V}} \mathbf{v}' \mathbf{u} \,. \tag{1.33}$$

Ebből a TKI optimumra (1.31) alapján a következőt írhatjuk:

$$\Phi = \max_{\mathbf{u} \in \mathsf{U}} \min_{\mathbf{v} \in \mathsf{V}} \mathbf{v}' \mathbf{u} \,. \tag{1.34}$$

Definiáljunk egy *poliedrikus játék*ot[12] a következőképpen: legyen U a maximalizáló, V pedig a minimalizáló fél stratégiahalmaza, a $\mathbf{v}'\mathbf{u}$ homogén bilineáris függvény ($\mathbf{u} \in \mathsf{U}$, $\mathbf{v} \in \mathsf{V}$) pedig a játék kifizetési függvénye. A maximalizáló felet a „központtal”, a minimalizáló felet a „szektor-együttessel”[13] lehet azonosítani; ennek megfelelően megengedett központi program helyett *központi stratégiát*, megengedett szektorárnyékárrendszer-együttes helyett *szektorstratégiát* mondhatunk és mindkét stratégia esetén beszélhetünk a stratégiának az egyes szektorokra eső *komponens*eiről. Az így definiált játékot a megfelelő *kétszintű feladatból* vagy a *TKI feladatból* (adott szektorbontással és a megengedett központi programhalmaz adott megválasztásával) *származó poliedrikus játék*nak nevezzük és röviden (U, V)-vel jelöljük. Az (1.34) reláció azt fejezi ki, hogy a TKI feladat optimuma a belőle származó poliedrikus játék max-min (alsó) értéke. A TKI feladat, a belőle származó kétszintű feladat és poliedrikus játék közti kapcsolattal foglalkozik az alábbi

2. TÉTEL. *Megoldható TKI feladatból származó poliedrikus játék is megoldható, és értéke a TKI optimummal egyenlő. A „központi fél” optimális stratégiái a megfelelő kétszintű feladatban fellépő optimális központi programok. A „szektor-együttes fél” optimális stratégiái között mindig van olyan stratégia, amelynek szektorkomponensei megegyeznek; annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy szektoronként megegyező komponensű szektorstratégia optimális legyen, az, hogy egy tetszőleges központi stratégiával szemben optimális ellenstratégia legyen; megegyező szektorkomponensű optimális szektorstratégiában a közös szektorkomponens optimális TKI árnyékárrendszert alkot és viszont.*

---

[12] Vö. PH. WOLFE [25]. Jelöléseinkkel: $m = n$, $X = \mathsf{U}$, $Y = \mathsf{V}$, $A = \mathbf{E}$ = egységmátrix.

[13] Lásd a „person” definícióját pl. J. C. C. MCKINSEY [20] könyvében, 4. oldal, 3. bekezdés.

Bizonyítás. 1. Megoldható TKI feladat esetén a Φ TKI-optimum létezik és véges, másrészt (1.34) szerint az (U, V) poliedrikus játék max-min értékével egyenlő. Ebből PH. WOLFE [25] tétele szerint következik, hogy Φ egyben e játék min-max (felső) értéke is, tehát (U, V) megoldható, értéke Φ, és mindkét félnek van optimális stratégiája.

2. Mivel (1.33) szerint $\varphi(\mathbf{u})$ a $\mathbf{v}'\mathbf{u}$ kifizetési függvény minimuma a V halmazon, a központi fél optimális stratégiáiból álló halmaz megegyezik az (1.28) alatti U^* halmazzal.

3. Az (1.3)—(1.12) jelölések felhasználásával először megmutatjuk, hogy

$$
(1.35) \qquad \mathsf{Y}_1^*(\mathbf{u}_1) \cap \ldots \cap \mathsf{Y}_n^*(\mathbf{u}_n) = \begin{cases} \mathsf{Y}^*, & \text{ha } \mathbf{u} = [\mathbf{u}_1', \ldots, \mathbf{u}_n']' \in \mathsf{U}^* \\ \varnothing, & \text{ha } \mathbf{u} = [\mathbf{u}_1', \ldots, \mathbf{u}_n']' \notin \mathsf{U}^*, \end{cases}
$$

azaz: csak az optimális központi stratégiákkal szemben van — de itt mindig van — szektoronként megegyező komponensű optimális ellenstratégia, s a közös komponens optimális TKI-árnyékárrendszer. (1.35) bizonyításának első feleként megmutatjuk, hogy $\mathbf{y}^* \in \mathsf{Y}^*$, $\mathbf{u}^* = [\mathbf{u}_1^{*\prime}, \ldots, \mathbf{u}_n^{*\prime}]' \in \mathsf{U}^*$ esetén $\mathbf{y}^* \in \mathsf{Y}_1^*(\mathbf{u}_1^*), \ldots, \mathbf{y}^* \in \mathsf{Y}_n^*(\mathbf{u}_n^*)$ áll fenn. Ellenkező esetben ui.

$$
\Phi = \varphi(\mathbf{u}^*) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\mathbf{u}_i^*) = \sum_{i=1}^{n} \min_{\mathbf{y}_i \in \mathsf{Y}_i} \mathbf{y}_i' \mathbf{u}_i^* < \sum_{i=1}^{n} \mathbf{y}^{*\prime} \mathbf{u}_i^* = \mathbf{y}^{*\prime} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i^* = \mathbf{y}^{*\prime} \mathbf{b} = \Phi
$$

lenne, ami lehetetlen. (1.35) bizonyításának második felében megmutatjuk, hogy fordítva: $\hat{\mathbf{y}} \in \mathsf{Y}_1^*(\hat{\mathbf{u}}_1), \ldots, \hat{\mathbf{y}} \in \mathsf{Y}_n^*(\hat{\mathbf{u}}_n)$ esetén $\hat{\mathbf{y}} \in \mathsf{Y}^*$ és $\hat{\mathbf{u}} = [\hat{\mathbf{u}}_1', \ldots, \hat{\mathbf{u}}_n']' \in \mathsf{U}^*$ áll fenn. Legyen ui. $\mathbf{y} \in \mathsf{Y}$ tetszőleges; ekkor

$$
\mathbf{y}'\mathbf{b} = \mathbf{y}' \sum_{i=1}^{n} \hat{\mathbf{u}}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{y}'\hat{\mathbf{u}}_i \geqq \sum_{i=1}^{n} \min_{\mathbf{y}_i \in \mathsf{Y}_i} \mathbf{y}_i' \hat{\mathbf{u}}_i = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\hat{\mathbf{u}}_i) = \varphi(\hat{\mathbf{u}}) =
$$

$$
= \sum_{i=1}^{n} \hat{\mathbf{y}}' \hat{\mathbf{u}}_i = \hat{\mathbf{y}}' \sum_{i=1}^{n} \hat{\mathbf{u}}_i = \hat{\mathbf{y}}' \mathbf{b},
$$

tehát $\mathbf{y}'\mathbf{b} \geqq \hat{\mathbf{y}}'\mathbf{b}$, azaz $\hat{\mathbf{y}} \in \mathsf{Y}^*$. Következik még ebből, hogy $\varphi(\hat{\mathbf{y}}) = \hat{\mathbf{u}}'\mathbf{b} = \Phi$, tehát $\hat{\mathbf{u}} \in \mathsf{U}^*$. Ezzel (1.35)-öt bebizonyítottuk. A 2. tétel bizonyításának teljessé tételéhez most már csak azt kell igazolnunk, hogy tetszőleges $\mathbf{y}^*$ optimális TKI árnyékárrendszer esetén a szektoronként megegyező $\mathbf{y}^*$-komponensű $\mathbf{v}_{y^*} = [\mathbf{y}^{*\prime}, \ldots, \mathbf{y}^{*\prime}]'$ szektorstratégia optimális. Ehhez elegendő kimutatni, hogy tetszőleges $\mathbf{u}^* \in \mathsf{U}^*$ optimális központi stratégiával együtt $\mathbf{v}_{y^*}$ a $\mathbf{v}'\mathbf{u}$ függvény (U, V)-beli nyeregpontját alkotja. Legyen tehát $\mathbf{u}^* = [\mathbf{u}_1^{*\prime}, \ldots, \mathbf{u}_n^{*\prime}]'$ a választott optimális központi stratégia, $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1', \ldots, \mathbf{u}_n']' \in \mathsf{U}$, illetve $\mathbf{v} = [\mathbf{y}_1', \ldots, \mathbf{y}_n']' \in \mathsf{V}$ tetszőlegesek. Ekkor

$$
\mathbf{v}_{y^*}' \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{y}^{*\prime} \mathbf{u}_i = \mathbf{y}^{*\prime} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i = \mathbf{y}^{*\prime}\mathbf{b} = \Phi =
$$

$$
= \mathbf{y}^{*\prime} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i^* = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{y}_i^{*\prime} \mathbf{u}_i^* = \mathbf{v}_{y^*}' \mathbf{u}^* \leqq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{y}_i' \mathbf{u}_i^* = \mathbf{v}'\mathbf{u}^*,
$$

azaz $\mathbf{v}_{y^*}' \mathbf{u} \leqq \mathbf{v}_{y^*}' \mathbf{u}^* \leqq \mathbf{v}'\mathbf{u}^*$, ha $\mathbf{u} \in \mathsf{U}$ és $\mathbf{v} \in \mathsf{V}$. Ezzel a 2. tétel bizonyítását befejeztük.

A TKI feladatot tehát visszavezettük a belőle származó poliedrikus játék megoldására. A megoldásra olyan módszert keresünk, amely kihasználja a feladat felbontottságát, és a központban, illetve a szektorokban külön-külön elvégezhető részletszámításokból épül fel. Értelmezzük ehhez az *értékelhető szektorstratégia*, azaz *értékelhető szektorárnyékárrendszer-együttes* fogalmát: ezen olyan $\mathbf{v} \in V$ szektorstratégiát értünk, amellyel szemben létezik optimális központi ellenstratégia, más szóval: amelynél az $\mathbf{u} \in U$, $\mathbf{v}'\mathbf{u} \to \max !$ lineáris programozás megoldható. Nevezzünk *regulárisnak* egy (U, V) poliedrikus játékot, ha valamennyi szektorstratégiája értékelhető. Vegyük tekintetbe, hogy a kétszíntű feladat definíciója szerint U minden eleme értékelhető központi stratégiából, tehát olyan $\mathbf{u}$ központi programból áll, amelyre a $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v}'\mathbf{u} \to \min !$ lineáris programozás megoldható. Reguláris poliedrikus játék esetén tehát mindkét fél mindegyik stratégiájával szemben létezik optimális ellenstratégia. Ebből következik, hogy minden reguláris poliedrikus játék stratégiailag redukálható[14] egy véges játékra.[15] Legyen ugyanis $U = \mathbf{U}^{\triangle} + \overline{\mathbf{U}}^{<}$, illetve $V = \mathbf{V}^{\triangle} + \overline{\mathbf{V}}^{<}$ a szereplő stratégiahalmazok — mindkettő nemüres, konvex poliedrikus halmaz — kanonikus felbontása. (Vö.: [11] lábjegyzet, 581. oldal.) A kétféle értékelhetőségi feltételezésből azonnal következik, hogy $\mathbf{V}'\overline{\mathbf{U}} \leq \mathbf{O}$, $\overline{\mathbf{V}}'\overline{\mathbf{U}} = \mathbf{O}$ és $\overline{\mathbf{V}}'\mathbf{U} \geq \mathbf{O}$, továbbá az $\mathbf{u} = \mathbf{U}\mathbf{p} + \lambda\overline{\mathbf{U}}\overline{\mathbf{p}} \in U$ stratégiát az $\mathbf{u}^{\triangle} = \mathbf{U}\mathbf{p} \in \mathbf{U}^{\triangle}$, a $\mathbf{v} = \mathbf{V}\mathbf{q} + \mu\overline{\mathbf{V}}\overline{\mathbf{q}} \in V$ stratégiát pedig a $\mathbf{v}^{\triangle} = \mathbf{V}\mathbf{q} \in \mathbf{V}^{\triangle}$ stratégiával lehet (tágabb értelemben) dominálni: minden $\hat{\mathbf{v}} \in V$ mellett $\hat{\mathbf{v}}'\mathbf{u} \leq \hat{\mathbf{v}}'\mathbf{u}^{\triangle}$ és minden $\hat{\mathbf{u}} \in U$ mellett $\mathbf{v}'\hat{\mathbf{u}} \geq \mathbf{v}^{\triangle\prime}\hat{\mathbf{u}}$ ($\mathbf{p}, \overline{\mathbf{p}}, \mathbf{q}$ és $\overline{\mathbf{q}}$ valószínűségi vektorok, λ és μ nemnegatív számok). Ezért az (U, V) reguláris poliedrikus játék stratégiailag redukálható az $(\mathbf{U}^{\triangle}, \mathbf{V}^{\triangle})$ poliedrikus játékra: ez pedig izomorf a $\mathbf{V}'\mathbf{U}$ kifizetési mátrixú véges játékkal.

Rá kell mutatnunk arra, hogy e véges játék csak implicit formában van megadva, hiszen a $\mathbf{V}'\mathbf{U}$ mátrixot nem ismerjük közvetlenül, csak azt tudjuk, hogy $\mathbf{U}$ a központi, $\mathbf{V}$ pedig a szektorokban szereplő egyenlőtlenségrendszerekkel meghatározott U, illetve V poliedrikus halmazok extrém pontjaiból összeállított mátrixok, a kifizetési mátrix pedig ezek szorzata. Ha tehát az (U, V) reguláris poliedrikus játék egy megoldását e $\mathbf{V}'\mathbf{U}$ mátrixú véges játék megoldása útján akarjuk meghatározni, a direkt számítási eljárásokat — az eredeti TKI feladat méreteivel legalábbis azonos méretű számítás nehézségeitől eltekintve — már csak ezért sem lehet alkalmazni. Felhasználható azonban a Brown—Robinson-féle *fiktív lejátszási* módszer[16]. Az előbbiekből következik, hogy reguláris poliedrikus játék minden $\mathbf{u} \in U$ központi stratégiájával szemben megadható egy $\mathbf{v}^*(\mathbf{u}) \in \mathbf{V}^{\triangle}$ optimális ellenstratégia és minden $\mathbf{v} \in V$ szektorstratégiával szemben megadható egy $\mathbf{u}^*(\mathbf{v}) \in \mathbf{U}^{\triangle}$ optimális ellenstratégia, amelyekre tehát

$$(1.36)\qquad \mathbf{v}^*(\mathbf{u})'\mathbf{u} = \min_{\mathbf{v} \in V} \mathbf{v}'\mathbf{u} = \min_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}^{\triangle}} \mathbf{v}'\mathbf{u}\,; \quad \mathbf{v}'\mathbf{u}^*(\mathbf{v}) = \max_{\mathbf{u} \in U} \mathbf{v}'\mathbf{u} = \max_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}^{\triangle}} \mathbf{v}'\mathbf{u}$$

[14] Akkor mondjuk, hogy egy játék *stratégiailag redukálható* egy másik játékra, ha ez utóbbi megoldható és minden megoldása (optimális stratégia-párja) egyben az eredeti játéknak is megoldása.

[15] A *véges játék* vagy, más néven, *mátrixjáték* definícióját lásd pl. S. Karlin [9] könyvében, a 17. oldalon.

[16] G. W. Brown [1], [2]; J. Robinson [21]. Részletes referálásra: S. Karlin [9], 179—189 oldalak.

áll fenn. $\mathbf{v}^*(\mathbf{u})$ meghatározását az $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}^*(\mathbf{v})$ meghatározását pedig a $\mathbf{v}$ *reguláris értékelésének* nevezzük. Az (U, V) reguláris poliedrikus játék *reguláris fiktív lejátszásán* az $\mathbf{U}^{\triangle}$-ba eső $\mathbf{u}^*\langle 1\rangle, \mathbf{u}^*\langle 2\rangle, \ldots, \mathbf{u}^*\langle N\rangle, \ldots$, illetve a $\mathbf{V}^{\triangle}$-ba eső $\mathbf{v}^*\langle 1\rangle, \mathbf{v}^*\langle 2\rangle, \ldots, \mathbf{v}^*\langle N\rangle, \ldots$ stratégiasorozatok alábbi szabály szerint történő megkonstruálását értjük:

1. *szakasz*. I. lépés: választunk egy tetszőleges $\mathbf{u}^{(1)} \in \mathbf{U}^{\triangle}$ központi stratégiát. II. lépés: definíciószerűen $\mathbf{u}^*\langle 1\rangle = \mathbf{u}^{(1)}$. III. lépés ($\mathbf{u}^*\langle 1\rangle$ reguláris értékelése): $\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}^*(\mathbf{u}^*\langle 1\rangle)$ meghatározása. IV. lépés: definíciószerűen $\mathbf{v}^*\langle 1\rangle = \mathbf{v}^{(1)}$.

Ezután rátérünk a 2., 3., ... szakaszra.

N-edik szakasz ($N = 2, 3, \ldots$). I. lépés ($\mathbf{v}^*\langle N-1\rangle$ reguláris értékelése): $\mathbf{u}^{(N)} = \mathbf{u}^*(\mathbf{v}^*\langle N-1\rangle)$ meghatározása. II. lépés („keverés" az előző szakaszbeli taggal):

$$\mathbf{u}^*\langle N\rangle = \frac{N-1}{N}\,\mathbf{u}^*\langle N-1\rangle + \frac{1}{N}\,\mathbf{u}^{(N)}$$

kiszámítása. III. lépés ($\mathbf{u}^*\langle N\rangle$ reguláris értékelése): $\mathbf{v}^{(N)} = \mathbf{v}^*(\mathbf{u}^*\langle N\rangle)$ meghatározása. IV. lépés („keverés" az előző szakaszbeli taggal):

$$\mathbf{v}^*\langle N\rangle = \frac{N-1}{N}\,\mathbf{v}^*\langle N-1\rangle + \frac{1}{N}\,\mathbf{v}^{(N)}$$

kiszámítása.

Mivel

$$\Phi = \max_{\mathbf{u}\in\mathsf{U}} \min_{\mathbf{v}\in\mathsf{V}} \mathbf{v}'\mathbf{u} = \min_{\mathbf{v}\in\mathsf{V}} \max_{\mathbf{u}\in\mathsf{U}} \mathbf{v}'\mathbf{u},$$

az értékelések definíciójából könnyen levezethető, hogy az N-edik szakaszbeli

$$\Phi^*\langle N\rangle = \max_{\mathbf{u}\in\mathsf{U}} \mathbf{v}^*\langle N-1\rangle'\mathbf{u} = \max_{\mathbf{u}\in\mathbf{U}^{\triangle}} \mathbf{v}^*\langle N-1\rangle'\mathbf{u} = \mathbf{v}^*\langle N-1\rangle'\mathbf{u}^{(N)}$$

felső optimum ($N = 2, 3, \ldots$) felső becslést, a

$$\varphi^*\langle N\rangle = \min_{\mathbf{v}\in\mathsf{V}} \mathbf{v}'\mathbf{u}^*\langle N\rangle = \min_{\mathbf{v}\in\mathbf{V}^{\triangle}} \mathbf{v}'\mathbf{u}^*\langle N\rangle = \mathbf{v}^{(N)\prime}\mathbf{u}^*\langle N\rangle$$

alsó optimum ($N = 1, 2, \ldots$) pedig alsó becslést ad a Φ TKI optimumra:

$$(1.37)\qquad \Phi^*\langle N\rangle \geqq \Phi \quad (N = 2, 3, \ldots); \quad \varphi^*\langle N\rangle \leqq \Phi \quad (N = 1, 2, \ldots).$$

Mivel továbbá a sorozatok konstrukciójuk miatt a $\mathbf{V}'\mathbf{U}$ mátrixú véges játék fiktív lejátszását is jelentik, érvényes a Brown—Robinson-tétel, tehát

$$(1.38)\qquad \lim_{N\to\infty} \Phi^*\langle N\rangle = \lim_{N\to\infty} \varphi^*\langle N\rangle = \Phi,$$

és az $\{\mathbf{u}^*\langle N\rangle\}$, illetve $\{\mathbf{v}^*\langle N\rangle\}$ sorozatok limeszpontjai optimális központi, illetve szektorstratégiák.

A reguláris fiktív lejátszás iterációjának *δ-leállításán* (δ tetszőlegesen kicsiny pozitív szám) értsük a fenti konstrukció alábbi befejezését:

Legyen

$$(1.39)\qquad \Phi^{**}\langle N\rangle = \min\{\Phi^*\langle 2\rangle, \ldots, \Phi^*\langle N\rangle\}, \quad N = 2, 3, \ldots$$

és legyen N_δ az a legkisebb pozitív egész szám, amelyre

$$(1.40)\qquad \Phi^{**}\langle N_\delta\rangle - \varphi^*\langle N_\delta\rangle \leqq \delta \quad \text{vagy} \quad \Phi^{**}\langle N_\delta + 1\rangle - \varphi^*\langle N_\delta\rangle \leqq \delta$$

teljesül: (1.37) és (1.38) alapján tetszőlegesen kicsiny pozitív δ szám esetén N_δ értelmezve van. Ekkor: 1. Az iterációt az vagy N_δ-adik szakasz III., vagy az $(N_\delta+1)$-edik szakasz I. lépésénél abbahagyjuk [aszerint, hogy (1.40)-ben az első vagy a második egyenlőtlenség teljesült]. 2. A szektorokban megoldjuk az

$$(1.41) \qquad \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \leqq \mathbf{u}_i^* \langle N_\delta \rangle, \quad \mathbf{x}_i \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{c}_i' \mathbf{x}_i \rightarrow \max! \qquad i = 1, \ldots, n$$

lineáris programozásokat. 3. Az így nyert $\mathbf{x}_i^{\delta *}$ szektorprogramokból összeállítjuk az $\mathbf{x}^{\delta *} = [\mathbf{x}_1^{\delta *\prime}, \ldots, \mathbf{x}_n^{\delta *\prime}]'$ megengedett TKI programot. Mivel

$$\mathbf{c}'\mathbf{x}^{\delta *} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{c}_i' \mathbf{x}_i^{\delta *} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{y}_i^*(\mathbf{u}_i^*\langle N_\delta \rangle)' \, \mathbf{u}_i^*\langle N_\delta \rangle = \mathbf{v}^*(\mathbf{u}^*\langle N_\delta \rangle)' \, \mathbf{u}^*\langle N_\delta \rangle = \varphi^*\langle N_\delta \rangle,$$

(1.40) és (1.37) alapján

$$(1.42) \qquad \Phi - \delta \leqq \mathbf{c}'\mathbf{x}^{\delta *} \leqq \Phi$$

Az (1.42) fennállását röviden úgy jellemezzük, hogy $\mathbf{x}^{\delta *}$ *δ-optimális* TKI program.

Kiegészítésül foglalkozunk azzal az esettel, amelyben az (U, V) reguláris poliedrikus játék a szektor-együttes fél számára egyértelműen oldható meg. Ebből következik, hogy redukáltja, a $\mathbf{V}'\mathbf{U}$ mátrixú véges játék is ilyen tulajdonságú, s így az idézett Brown—Robinson-tétel szerint a $\{\mathbf{v}^*\langle N \rangle\}$ sorozat konvergens, és határértéke az egyértelmű optimális szektorstratégia. A 2. tétel 3. része alapján ez nem más, mint az a szektorárnyékárrendszer-együttes, amelynek minden szektorkomponense a (fenti feltételekből következően) egyértelmű optimális TKI árnyékárrendszer.

A TKI feladatból származó reguláris poliedrikus játék fiktív lejátszásával kapcsolatos és fentiekben bizonyított eredményeinket az alábbiakban foglalhatjuk össze:

3. TÉTEL. *Ha egy megoldható TKI feladatból származó poliedrikus játék reguláris, akkor fiktív lejátszásával a TKI feladat tetszőleges pontossággal megoldható abban az értelemben, hogy tetszőlegesen kicsiny pozitív δ mellett a reguláris fiktív lejátszás δ-leállítása δ-optimális TKI programra vezet. Ha e reguláris poliedrikus játék emellett a szektor-együttes fél számára egyértelműen oldható meg, a reguláris fiktív lejátszása során nyert kevert szektorstratégia-sorozatban az egyes szektorokra jutó komponensek „egalizálódnak", azaz közös határértékhez : az optimális TKI árnyékárrendszerhez konvergálnak.*

1.3. Kiegészítő megjegyzések

A TKI feladatot *reguláris* poliedrikus játékká kell átalakítani: ennek módja a szektorokra bontás és értékelhető központi programokból álló alkalmas generátorhalmaz megválasztása. Nem foglalkoztunk itt azzal a kérdéssel, hogy minden — TKI feladatnak tekintett — lineáris programozási feladatra ez az átalakítás elvégezhető-e, és ha igen, hogyan kell elvégezni: tételeket vezettünk le, amelyek minden megoldható és reguláris poliedrikus játékká átalakítható lineáris programozási feladatra érvényesek. Nem vizsgáltuk azt a problémát sem, hogy az iterációs szakaszok I. lépésében felmerülő központi lineáris programozás nem számításigényesebb-e az eredetinél: ne felejtsük el, hogy a központi program komponenseinek száma a TKI feltételek számának és a szektorok számának szorzatával egyenlő.

Arra volt ugyanis mindössze szükségünk e dolgozat keretében, hogy az általános módszert egy konkrét modell: a hosszúlejáratú makroökonómiai tervezés feladatára alkalmazzuk. Az itteni TKI feladat szektorokra való felbontása adottság, amely a probléma közgazdasági természetéből folyik. A szektorfeltételek egy része „speciális" jellegű az (1.20)—(1.27) alatti értelemben. A megmaradt „közös" feltételek korlátainak felosztását végző központi programra adott feltételek egyfelől biztosítják, hogy a megengedett központi programok halmaza az (1.19) értelemben generátorhalmaz legyen, másfelől e halmazt korlátossá teszik. Ebből következik, hogy a keletkező poliedrikus játék reguláris lesz (hiszen korlátos alaphalmazon a lineáris programozási feladat minden célfüggvényvektor mellett megoldható), tehát alkalmazható lesz rá az 1. részben levezetett általános módszer. Ugyanakkor kiderül, hogy a központi programozás több független, egyszerű rangsorolással megoldható részprogramozássá bomlik szét: szimplex-eljárásra csak a szektorprogramozásokban lesz szükség.

2. A KONKRÉT MODELL: HOSSZÚLEJÁRATÚ MAKROÖKONÓMIAI TERVEZÉSI FELADAT

2.1. A modell leírása

A népgazdaságot n számú ágazatra, szektorra bontva képzeljük. Minden szektor egy termékcsoportért felelős. A továbbiakban egyszerűen *termék*ről fogunk beszélni: ez egyszerűen aggregáció kérdése. (Egyébként nem okozna nehézséget olyan modell felállítása, amelyben minden szektor több termék előállításáért lenne felelős.) A szektor tevékenységéhez nemcsak a szóban forgó termék hazai termelése és a termeléshez szükséges beruházás tartozik, hanem e termék exportja és importja is. Távlati tervet dolgozunk ki egy tervperiódusra, amely összesen T időszakból áll.

Nem kívánjuk modellünk segítségével meghatározni a népgazdasági terv minden előirányzatát. Kiindulópontunk: egy már kidolgozott („hagyományos", nem matematikai módszerekkel meghatározott, az input—output-táblával ellenőrzött) népgazdasági terv. Ennek bizonyos előirányzatait konstansként átvesszük programozási modellünkbe. Modellünkben ezeket *gazdaságpolitikai adat*oknak nevezzük, s jelölésükre mindig nagybetűket használunk. Az alábbi adatokról van szó:

A) Az i-edik termékből a t-edik időszakban szükséges *extern fogyasztás* :

$$R_{it} > 0 \qquad i = 1, \ldots n\,; \quad t = 1, \ldots, T. \tag{2.1}$$

Magában foglalja a személyes és közületi fogyasztást, beleértve az improduktív beruházást is. Nem tartalmazza ezzel szemben sem az exportot, sem (bizonyos kivételtől eltekintve, amelyre később még visszatérünk) a produktív beruházást.

B) Az i-edik termékből a t-edik időszakban a népgazdaságban bennmaradt mennyiség *felső korlátja* :

$$R_{it} \ (> Q_{it}) \qquad i = 1, \ldots, n; \quad t = 1, \ldots, T. \tag{2.2}$$

Világos, hogy ilyen korlátot könnyű megadni: mindamellett célszerű minél kisebb, de reális értéket elfogadni, mert a felső korlát túl magas értéke lassítja a későbbi iteráció konvergenciáját.

C) A népgazdaságban a t-edik időszakban produktív munkára rendelkezésre álló munkaerőkeret:

$$(2.3)\qquad W_t > 0 \qquad t = 1, \ldots, T.$$

Az egyes szektorok lehetséges tevékenységeit négy csoportra: *reprodukáló, export-, import-* és *beruházási* tevékenységekre oszthatjuk. Az első három csoportbeli tevékenységek terjedelmét minden időszakra külön-külön kell meghatároznunk, a beruházási tevékenységet viszont időben adott módon lezajló folyamatnak tekintjük, amelynek terjedelmét az egész tervperiódusra egyszerre kell kialakítani. Foglalkozzunk részletesebben az i-edik szektor tevékenységeivel ($i = 1, \ldots, n$).

1. *Reprodukáló tevékenységek.* Ezeken a tervperiódus kezdetén már fennálló, az i-edik terméket kibocsátó kapacitások változatlan továbbműködtetését értjük. Technikai jellemzők alapján (például elmaradottabb vagy fejlettebb üzem) több ilyen tevékenység építhető be a modellbe. Jelölje n_i^{repr} a reprodukáló tevékenységek számát, x_{ikt}^{repr} pedig a k-adik reprodukáló tevékenység terjedelmét a t-edik időszakban ($k = 1, \ldots, n_i^{\text{repr}}$; $t = 1, \ldots, T$).

2. *Export tevékenységek.* Gazdasági jellemzők alapján (pl. piacok, relációk stb. szerint) többféle export-tevékenységet szerepeltethetünk a modellben. Jelölje n_i^{exp} az exporttevékenységek számát, x_{ikt}^{exp} pedig a k-adik exporttevékenység terjedelmét a t-edik időszakban ($k = 1, \ldots, n_i^{\text{exp}}$; $t = 1, \ldots, T$).

3. *Import-tevékenységek.* Mindenekelőtt két típusú tevékenységet szerepeltetünk. *Korlátos import*-tevékenységen olyan behozatalt értünk, amely a hazai termelőtevékenységekkel versenyezhet, azokat pótolni képes (kompetitív import), s amelynek terjedelmét valamilyen külső piaci tényező korlátozza. Gazdasági jellemzők (pl. piacok stb.) alapján többféle ilyen korlátos import-tevékenység beépíthető a modellbe. Jelölje n_i^{imp} ezek számát, x_{ikt}^{imp} pedig a k-adik korlátos import-tevékenység terjedelmét a t-edik időszakban ($k = 1, \ldots, n_i^{\text{imp}}$; $t = 1, \ldots, T$). A korlátos import mellett minden szektorban szerepeltetünk egy *szabad import*-tevékenységet is. Ez az előző import-tevékenységekhez hasonlóan kompetitív jellegű, de terjedelmét sem külső piaci körülmények, sem egyéb adottságok eleve nem korlátozzák. Egyes szektorokban joggal feltételezhetjük ilyen tevékenység létezését, másokban valóságban ilyen lehetőség nem áll fenn. Ez utóbbi esetben a szerepeltetett tevékenység „fiktív” jellegű: pönálészerűen magas árral biztosítjuk, hogy a modellben ugyan szerepel a megfelelő változó, de az optimális (vagy „közelítőleg” optimális) programba nem kerül bele. Jelölje x_{i0t}^{imp} az i-edik szektorbeli szabad import-tevékenység terjedelmét a t-edik időszakban ($t = 1, \ldots, T$).

Az 1—3. pontokban felsorolt tevékenységek terjedelmének egységét természetes mértékegységben vagy Ft-ban állapíthatjuk meg. Az alább következő beruházási tevékenységeknél némileg másképpen kell eljárnunk.

4. *Beruházási tevékenységek.* Egy beruházási tevékenységet három adattal jellemzünk: a létrehozandó létesítmény jellegével, a létrehozás és üzemeltetés technológiával, továbbá a beruházás megkezdésének időpontjával. Eszerint adott létesítmény adott technológiájú létrehozásán és üzemeltetésén (úgy mondhatnánk: egy adott beruházási tevékenység-*típus*on) belül külön alternatív beruházási tevékenységek építhetők be a modellbe aszerint, hogy a beruházást melyik időszakba kezdjük el. Feltételezzük, hogy csak olyan beruházási tevékenységeket szerepeltetünk, amelyek legkésőbb az utolsó, T-edik időszakban már teljes kapacitással dolgoznak. Egy beruházási tevékenység terjedelmét ezért az utolsó, T-edik időszakban elért kapacitás mellett termelt termékmennyiség természetes vagy Ft-ban számított mennyiségével

mérjük. Jelölje n_i^{inv} a beruházási tevékenységek számát, x_{ik}^{inv} pedig a k-adik beruházási tevékenység terjedelmét ($k = 1, \ldots, n_i^{\text{inv}}$).

A TKI feladat felírásához még szükségünk van a termékek előállításával, exportálásával, importálásával és a beruházásokkal kapcsolatos input—output együtthatók, munkaerőigény-együtthatók és célfüggvény-együtthatók értelmezésére.

a) Jelölje f_{ikt}^{inv} az i-edik szektor k-adik beruházási tevékenységének egysége által a t-edik időszakban létrehozott i-edik termék mennyiségét (természetes, illetve Ft-egységekben; $k = 1, \ldots, n_i^{\text{inv}}$; $t = 1, \ldots, T$; $i = 1, \ldots, n$). Világos, hogy $f_{ikt}^{\text{inv}} \geqq 0$, mégpedig: az üzemeltetés előtt $f_{ikt}^{\text{inv}} = 0$, a felfutás időszakában f_{ikt}^{inv} (mint t függvénye) monoton nő, végül a teljes üzemeltetés időpontjától kezdve $f_{ikt}^{\text{inv}} = 1$. (Azonos beruházási tevékenységtípuson belül f_{ikt}^{inv} hasonló, de a kezdőidőszak szerint eltolt függvénye t-nek.) Mivel feltettük, hogy a létesítmény az utolsó, T-edik időszakban teljes kapacitással üzemel, írhatjuk:

$$(2.4)\quad f_{ikt}^{\text{inv}} \geqq 0, \quad t = 1, \ldots, T; \quad f_{ikT}^{\text{inv}} = 1; \quad k = 1, \ldots, n_i^{\text{inv}}; \quad i = 1, \ldots, n.$$

b) Jelölje g_{jikt}^{repr}, illetve g_{jikt}^{inv} a j-edik szektor k-adik reprodukáló, illetve beruházási tevékenységének egysége által a t-edik időszakban igényelt i-edik termékmennyiséget ($k = 1, \ldots, n_j^{\text{repr}}$, illetve $k = 1, \ldots, n_j^{\text{inv}}$; $t = 1, \ldots, T$; $j = 1, \ldots, i-1, i+1\ i+1, \ldots, n$; $i = 1, \ldots, n$). Világos, hogy

$$\begin{array}{lll} (2.5) & g_{jikt}^{\text{repr}} \geqq 0, \quad k = 1, \ldots, n_j^{\text{repr}} & \left.\begin{array}{l} t = 1, \ldots, T \\ j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n \\ i = 1, \ldots, n; \end{array}\right. \\ (2.6) & g_{jikt}^{\text{inv}} \geqq 0, \quad k = 1, \ldots, n_j^{\text{inv}} & \end{array}$$

a j-edik termék k-adik reprodukáló, illetve beruházási tevékenysége a termelés, illetve a beruházás technológiai jellege szerint vagy igényli, vagy nem igényli az i-edik termék felhasználását. A termelés anyagigénye magában foglalja mind a folyó üzemeltetés anyagigényét, mind pedig a régi kapacitás fenntartásához, egyszerű újratermeléséhez szükséges nagyjavítási és pótlási, felújítási akciók anyagigényét. A beruházás anyagigénye magában foglalja az új kapacitás megteremtésének éveiben a beruházás által igényelt termékeket (pl. gépek), az üzemeltetés éveiben pedig mind a folyó termeléshez, mind pedig a már megteremtett kapacitás fenntartásához, pótlásához szükséges termékeket. Hasonlóképpen a termékkibocsátáshoz, itt is feltételezzük, hogy az egyes beruházási tevékenység-típusokra az anyagigények meghatározott időbeni tagozódása jellemző.

c) Jelölje h_{ikt}^{repr}, illetve h_{ikt}^{inv} az i-edik szektor k-adik reprodukáló, illetve beruházási tevékenységének egysége által a t-edik időszakban igényelt munkaerőkeretet ($k = 1, \ldots, n_i^{\text{repr}}$, illetve $k = 1, \ldots, n_i^{\text{inv}}$; $t = 1, \ldots, T$; $i = 1, \ldots, n$). Míg a reprodukáló tevékenységeknél ez a létszám-együttható mindig pozitív, hiszen munkaerő nélkül nincs termelés, addig a beruházási tevékenységekre ez csak az üzemelés megkezdése után érvényes. Mindenesetre

$$(2.7)\quad h_{ikt}^{\text{repr}} > 0, \quad k = 1, \ldots, n_i^{\text{repr}}; \quad t = 1, \ldots, T; \quad i = 1, \ldots, n$$

$$(2.8)\quad h_{ikt}^{\text{inv}} \geqq 0, \quad t = 1, \ldots, T; \quad h_{ikT}^{\text{inv}} > 0; \quad k = 1, \ldots, n_i^{\text{inv}}; \quad i = 1, \ldots, n.$$

d) Az egyes tevékenységek hasznosságát az általuk elért *devizahozam*mal mérjük. Jelölje c_{ikt}^{exp}, illetve c_{ikt}^{imp} az i-edik szektor k-adik export-, illetve import-tevékenységének egysége által a t-edik időszakban elért devizahozamot ($k = 1, \ldots, n_i^{\text{exp}}$, illetve $k = 0, 1, \ldots, n_i^{\text{imp}}$; $t = 1, \ldots, T$; $i = 1, \ldots, n$), c_{ik}^{inv} pedig a k-adik beruházási tevékenységének egysége által elért devizahozamot ($k = 1, \ldots, n_i^{\text{inv}}$; $i = 1, \ldots, n$). Az export-tevékenységek devizahozama természetesen pozitív, az import-tevékenységeké negatív, a beruházási tevékenységeké pedig nempozitív (negatív abban az esetben, ha hazai termelés által nem pótolható, nem-kompetitív importot is igényel). A beruházási tevékenységek devizahozama természetesen az egész tervperiódusban felmerült nem-kompetitív import költségével egyenlő. Feltételezzük ezenkívül, hogy a legkedvezőbb export-ár sem haladhatja meg a legkedvezőbb import-árat. Ezeket foglalják magukban az alábbiak:

$$\text{(2.9)}\qquad \left.\begin{cases} c_{ikt}^{\text{exp}} > 0 & k = 1, \ldots, n_i^{\text{exp}} \\ c_{ikt}^{\text{imp}} < 0 & k = 0, 1, \ldots, n_i^{\text{imp}} \end{cases}\right\} t = 1, \ldots, T; \quad i = 1, \ldots, n;$$

$$\text{(2.10)}\qquad c_{ik}^{\text{inv}} \leqq 0 \quad k = 1, \ldots, n_i^{\text{inv}}; \quad i = 1, \ldots, n;$$

$$\text{(2.11)}\qquad \max_{1 \leqq k \leqq n_i^{\text{exp}}} c_{ikt}^{\text{exp}} \leqq \min_{0 \leqq k \leqq n_i^{\text{imp}}} (-c_{ikt}^{\text{imp}}) \quad t = 1, \ldots, T; \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ezek után felírhatjuk a hosszúlejáratú makroökonómiai tervezési feladatot TKI alakban az alábbi lineáris programozási feladatként:

$$\text{(2.12)}\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n_i^{\text{repr}}} x_{ikt}^{\text{repr}} - \sum_{k=1}^{n_i^{\text{exp}}} x_{ikt}^{\text{exp}} + \sum_{k=0}^{n_i^{\text{imp}}} x_{ikt}^{\text{imp}} + \sum_{k=1}^{n_i^{\text{inv}}} f_{ikt}^{\text{inv}} x_{ik}^{\text{inv}} - \\ &- \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n_j^{\text{repr}}} g_{jikt}^{\text{repr}} x_{jkt}^{\text{repr}} + \sum_{k=1}^{n_j^{\text{inv}}} g_{jikt}^{\text{inv}} x_{jk}^{\text{inv}} \right) \geqq Q_{it} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &t = 1, \ldots, T \\ &i = 1, \ldots, n; \end{aligned}$$

$$\text{(2.13)}\qquad \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n_i^{\text{repr}}} h_{ikt}^{\text{repr}} x_{ikt}^{\text{repr}} + \sum_{k=1}^{n_i^{\text{inv}}} h_{ikt}^{\text{inv}} x_{ik}^{\text{inv}} \right) \leqq W_t, \qquad t = 1, \ldots, T;$$

$$\text{(2.14)}\qquad \left[\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n_i^{\text{repr}}} x_{ikt}^{\text{repr}} - \sum_{k=1}^{n_i^{\text{exp}}} x_{ikt}^{\text{exp}} + \sum_{k=0}^{n_i^{\text{imp}}} x_{ikt}^{\text{imp}} + \sum_{k=1}^{n_i^{\text{inv}}} f_{ikt}^{\text{inv}} x_{ik}^{\text{inv}} \leqq R_{it} \\ &\qquad t = 1, \ldots, T; \quad i = 1, \ldots, n \end{aligned}\right]$$

$$\text{(2.15)}\left\{\begin{aligned} &\sum_{t=1}^{T} \left(\sum_{k=1}^{n_i^{\text{repr}}} a_{iskt}^{\text{repr}} x_{ikt}^{\text{repr}} + \sum_{k=1}^{n_i^{\text{exp}}} a_{iskt}^{\text{exp}} x_{ikt}^{\text{exp}} + \sum_{k=1}^{n_i^{\text{imp}}} a_{iskt}^{\text{imp}} x_{ikt}^{\text{imp}} \right) + \sum_{k=1}^{n_i^{\text{inv}}} a_{isk}^{\text{inv}} x_{ik}^{\text{inv}} \leqq b_{is} \\ &\qquad s = 1, \ldots, m_i; \quad i = 1, \ldots, n \end{aligned}\right\}$$

$$\text{(2.16)}\qquad \left|\begin{array}{c} \underbrace{\begin{array}{ccc} x_{ikt}^{\text{repr}} \geqq 0 & x_{ikt}^{\text{exp}} \geqq 0 & x_{ikt}^{\text{imp}} \geqq 0 \\ k = 1, \ldots, n_i^{\text{repr}}; & k = 1, \ldots, n_i^{\text{exp}}; & k = 0, 1, \ldots, n_i^{\text{imp}} \end{array}}_{t = 1, \ldots, T} \\ \\ x_{ik}^{\text{inv}} \geqq 0 \\ k = 1, \ldots, n_i^{\text{inv}} \end{array}\right| \; i = 1, \ldots, n$$

$$\text{(2.17)}\qquad \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{t=1}^{T} \left(\sum_{k=1}^{n_i^{\text{exp}}} c_{ikt}^{\text{exp}} x_{ikt}^{\text{exp}} + \sum_{k=0}^{n_i^{\text{imp}}} c_{ikt}^{\text{imp}} x_{ikt}^{\text{imp}} \right) + \sum_{k=1}^{n_i^{\text{inv}}} c_{ik}^{\text{inv}} x_{ik}^{\text{inv}} \right\} \to \max!$$

A (2.12) alatti feltételek azt fejezik ki, hogy minden termékből minden időszakra legalább az extern fogyasztást kell biztosítani. A (2.13) alatti feltételek biztosítják, hogy egyetlen időszakban se keletkezzék munkaerőhiány. E feltételek valamennyi szektort érintő, *közös* feltételek, míg a (2.14)—(2.15) feltételek csak egy-egy szektor változóira vonatkozó *speciális szektorfeltételek*. A (2.14) alatti feltételek minden termékre és minden időszakra vonatkozólag korlátozzák a népgazdaságon belül maradt termékmennyiséget: e feltételeket az illető szektor *extern korlátozó feltételei*nek nevezhetjük. A (2.15) alatti feltételek a szektorok termelési, behozatali, kiviteli és beruházási tevékenységével kapcsolatos további speciális feltételeket fejeznek ki. Feltételezzük, hogy egyikük sem vonatkozik az illető szektor szabad import-tevékenységeire: ezért e feltételeket *kötött speciális szektorfeltételek*nek mondjuk.[17] (2.16) a tevékenységek terjedelmének nemnegativitását fejezi ki, (2.17) pedig azt, hogy a népgazdasági optimalizálási kritériumnak az összes devizahozam maximalizálását tekintjük. (Vö.: [22] lábjegyzet, 609. oldal.)

A modell szektorokra bontása adva van. Kihasználva az (1.20)—(1.27) alatti egyszerűsítő megjegyzést, a központi program változóiként csak a közös feltételeknek megfelelő korlátok felosztásait tekintjük. Vezessük be ezek jelölésére az általános modell jelöléseivel összhangban az alábbiakat:

$$(2.18)\qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^{\#} \\ \mathbf{b}_1^{\circ} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \ldots, \quad \mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_n^{\#} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_n^{\circ} \end{bmatrix},$$

ahol

$$(2.19)\qquad \mathbf{u}_i^{\#} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{i1}^{\#} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{iT}^{\#} \end{bmatrix} \quad i = 1, \ldots, n$$

$$(2.20)\qquad \left\{ \begin{matrix} \mathbf{u}_{it}^{\#} = [p_{i1}, \ldots, \; p_{i,i-1,t}, \; -p_{iit}, \; p_{i,i+1,t}, \ldots, \; p_{int}, \; w_{it}]' \\ t = 1, \ldots, T; \quad i = 1, \ldots, n \end{matrix} \right\}$$

$$(2.21)\qquad \mathbf{b}_i^{\circ} = [R_{i1}, \ldots, R_{iT}, \; b_{i1}, \ldots, \; b_{im_i}]' \quad i = 1, \ldots, n.$$

A korlátfelosztási feltételek ekkor a következők:

$$\left.\begin{aligned} &(2.22)\qquad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} p_{ijt} - p_{jjt} = -Q_{jt} \quad j = 1, \ldots, n \\ &(2.23)\qquad \sum_{i=1}^{n} w_{it} = W_t \end{aligned}\right\} t = 1, \ldots, T.$$

[17] Feltételezzük, hogy a kötött speciális feltételeket a bennük szereplő változókkal azonosan 0-val ki lehet elégíteni, más szóval: a szektoroknak meg van engedve, hogy az ellátási feladatot kizárólag szabad importból fedezzék.

Egészítsük ki a fentieket a $p_{jjt} \leqq R_{jt}$ $(t = 1, \ldots, T;\ j = 1, \ldots, n)$ feltételekkel, továbbá a (2.20)-ban szereplő összes központi változókra vonatkozó nemnegativitási feltétellel. Legyenek megengedettek azok a központi programok, amelyek az így nyert

$$\left.\begin{array}{lll}
(2.24) & p_{iit} = \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} p_{jit} + Q_{it} \leqq R_{it}, & i = 1, \ldots, n \\
(2.25) & \sum\limits_{i=1}^{n} w_{it} = W_t & \\
(2.26) & p_{1it} \geqq 0, \ldots, \quad p_{nit}, \geqq 0, \quad w_{it} \geqq 0, & i = 1, \ldots, n
\end{array}\right| \quad t = 1, \ldots, T,$$

központi feltételrendszernek eleget tesznek.

Jelöljük röviden a (p_{ijt}, w_{it}) szimbólummal a (2.18)—(2.21) alakú központi programot. Adott (p_{ijt}, w_{it}) esetén az i-edik szektorfeladat primál alakja (1.10), illetve (2.12)—(2.17) alapján a következő:

$$\left.\begin{array}{ll}
(2.27) & \sum\limits_{k=1}^{n_i^{\mathrm{repr}}} x_{ikt}^{\mathrm{repr}} - \sum\limits_{k=1}^{n_i^{\mathrm{exp}}} x_{ikt}^{\mathrm{exp}} + \sum\limits_{k=0}^{n_i^{\mathrm{imp}}} x_{ikt}^{\mathrm{imp}} + \sum\limits_{k=1}^{n_i^{\mathrm{inv}}} f_{ikt}^{\mathrm{inv}}\, x_{ik}^{\mathrm{inv}} \geqq p_{iit}; \\
(2.28) & \sum\limits_{k=1}^{n_i^{\mathrm{repr}}} g_{ijkt}^{\mathrm{repr}}\, x_{ikt}^{\mathrm{repr}} + \sum\limits_{k=1}^{n_i^{\mathrm{inv}}} g_{ijkt}^{\mathrm{inv}}\, x_{ik}^{\mathrm{inv}} \leqq p_{ijt}, \\
 & \qquad j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n; \\
(2.29) & \sum\limits_{k=1}^{n_i^{\mathrm{repr}}} h_{ikt}^{\mathrm{repr}}\, x_{ikt}^{\mathrm{repr}} + \sum\limits_{k=1}^{n_i^{\mathrm{inv}}} h_{ikt}^{\mathrm{inv}}\, x_{ik}^{\mathrm{inv}} \leqq w_{it};
\end{array}\right\} \quad t = 1, \ldots, T;$$

$$(2.30) \qquad \sum_{k=1}^{n_i^{\mathrm{repr}}} x_{ikt}^{\mathrm{repr}} - \sum_{k=1}^{n_i^{\mathrm{exp}}} x_{ikt}^{\mathrm{exp}} + \sum_{k=0}^{n_i^{\mathrm{imp}}} x_{ikt}^{\mathrm{imp}} + \sum_{k=1}^{n_i^{\mathrm{inv}}} f_{ikt}^{\mathrm{inv}}\, x_{ik}^{\mathrm{inv}} \leqq R_{it}, \quad t = 1, \ldots, T$$

$$(2.31) \left\{\begin{array}{c}
\sum\limits_{t=1}^{T} \left(\sum\limits_{k=1}^{n_i^{\mathrm{repr}}} a_{iskt}^{\mathrm{repr}}\, x_{ikt}^{\mathrm{repr}} + \sum\limits_{k=1}^{n_i^{\mathrm{exp}}} a_{iskt}^{\mathrm{exp}}\, x_{ikt}^{\mathrm{exp}} + \sum\limits_{k=1}^{n_i^{\mathrm{imp}}} a_{iskt}^{\mathrm{imp}}\, x_{ikt}^{\mathrm{imp}} \right) + \sum\limits_{k=1}^{n_i^{\mathrm{inv}}} a_{isk}^{\mathrm{inv}}\, x_{ik}^{\mathrm{inv}} \leqq b_{is} \\
s = 1, \ldots, m_i
\end{array}\right\}$$

$$(2.32) \left\{\begin{array}{c}
\underbrace{\begin{array}{ccc}
x_{ikt}^{\mathrm{repr}} \geqq 0 & x_{ikt}^{\mathrm{exp}} \geqq 0 & x_{ikt}^{\mathrm{imp}} \geqq 0 \\
k = 1, \ldots, n_i^{\mathrm{repr}}; & k = 1, \ldots, n_i^{\mathrm{exp}}; & k = 0, 1, \ldots, n_i^{\mathrm{imp}}
\end{array}}_{t = 1, \ldots, T}
\begin{array}{c}
x_{ik}^{\mathrm{inv}} \geqq 0 \\
k = 1, \ldots, n_i^{\mathrm{inv}}
\end{array}
\end{array}\right.$$

$$(2.33) \qquad \sum_{t=1}^{T} \left(\sum_{k=1}^{n_i^{\mathrm{exp}}} c_{ikt}^{\mathrm{exp}}\, x_{ikt}^{\mathrm{exp}} + \sum_{k=0}^{n_i^{\mathrm{imp}}} c_{ikt}^{\mathrm{imp}}\, x_{ikt}^{\mathrm{imp}} \right) + \sum_{k=1}^{n_i^{\mathrm{inv}}} c_{ik}^{\mathrm{inv}}\, x_{ik}^{\mathrm{inv}} \rightarrow \max!$$

A feltételek közgazdasági tartalmuk szerint *központi* és *speciális szektorfeltételek*re oszthatók. A (2.27) alatti központi feltételek azt fejezik ki, hogy az i-edik szektornak minden időszakra meg kell oldania a központ által kitűzött *ellátási feladatot*: a t-edik időszakban legalább p_{iit} mennyiségű i-edik terméket kell előteremtenie. A (2.28) alatti központi feltételek megadják minden időszakra és minden termékre az i-edik termék előállításához felhasználható *anyagkeretet*: a t-edik időszakban a j-edik termékből legfeljebb p_{ijt} mennyiséget használhat fel az i-edik szektor. Végül a (2.29) alatti központi feltételek megszabják az i-edik szektor *munkaerőkeretét* minden időszakra: a t-edik időszakban legfeljebb w_{it} munkaerő áll az i-edik szektor rendelkezésére. A (2.30) alatti feltételek az i-edik szektor extern korlátozó feltételei, a (2.31) alatti feltételek pedig a kötött speciális szektorfeltételek.

Jelölje π_{iit} a (2.27) alatti, π_{ijt} a (2.28) alatti ω_{it} a (2.29) alatti, ϱ_{it} a (2.30) alatti, σ_{is} pedig a (2.31) alatti feltételeknek megfelelő árnyékárat. Ekkor a (p_{ijt}, w_{it}) központi program melletti i-edik szektorfeladat duál alakját az alábbiak szerint írhatjuk fel:

$$(2.34)\quad \begin{cases} \varrho_{it} - \pi_{iit} + \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} g_{ijkt}^{\mathrm{repr}}\pi_{ijt} + h_{ikt}^{\mathrm{repr}}\omega_{it} + \sum\limits_{s=1}^{m_i} a_{iskt}^{\mathrm{repr}}\sigma_{is} \geqq 0 \\ k = 1, \ldots, n_i^{\mathrm{repr}}; \quad t = 1, \ldots, T \end{cases}$$

$$(2.35)\quad \begin{cases} -\varrho_{it} + \pi_{iit} + \sum\limits_{s=1}^{m_i} a_{iskt}^{\mathrm{exp}}\sigma_{is} \geqq c_{ikt}^{\mathrm{exp}} \\ k = 1, \ldots, n_i^{\mathrm{exp}}; \quad t = 1, \ldots, T \end{cases}$$

$$(2.36)\quad \varrho_{it} - \pi_{iit} \geqq c_{i0t}^{\mathrm{imp}}; \quad t = 1, \ldots, T$$

$$(2.37)\quad \begin{cases} \varrho_{it} - \pi_{iit} + \sum\limits_{s=1}^{m_i} a_{iskt}^{\mathrm{imp}}\sigma_{is} \geqq c_{ikt}^{\mathrm{imp}} \\ k = 1, \ldots, n_i^{\mathrm{imp}}; \ t = 1, \ldots, T \end{cases}$$

$$(2.38)\quad \begin{cases} f_{ikt}^{\mathrm{inv}}(\varrho_{it} - \pi_{iit}) + \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} g_{ijkt}^{\mathrm{inv}}\pi_{ijt} + h_{ikt}^{\mathrm{inv}}\omega_{it} + \sum\limits_{s=1}^{m_i} a_{isk}^{\mathrm{inv}}\sigma_{is} \geqq c_{ik}^{\mathrm{inv}} \\ k = 1, \ldots, n_i^{\mathrm{inv}}; \quad t = 1, \ldots, T \end{cases}$$

$$(2.39)\quad \left.\begin{cases} \varrho_{it} \geqq 0 \\ \pi_{ijt} \geqq 0 \quad j = 1, \ldots, n \end{cases}\right\} t = 1, \ldots, T; \quad \sigma_{is} \geqq 0, \quad s = 1, \ldots, m_i$$

$$(2.40)\quad \sum_{t=1}^{T}\left(R_{it}\varrho_{it} - p_{iit}\pi_{iit} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} p_{ijt}\pi_{ijt} + w_{it}\omega_{it}\right) + \sum_{s=1}^{m_i} b_{is}\sigma_{is} \to \min!$$

A primál-duál alakot együtt tüntettük fel az i-edik szektorfeladat *kanonikus elrendezés*ében. Egy $\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{c}'\,\mathbf{x} \to \max!$ (primál), $\mathbf{y}'\mathbf{A} \geqq \mathbf{c}'$, $\mathbf{y}' \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{y}'\,\mathbf{b} \to \min!$ (duál) alakú lineáris programozási feladat kanonikus elrendezésén a

$$(2.41)\qquad \begin{array}{c|c|c} & \mathbf{x}' & \leqq \\ \hline \mathbf{y} & \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \hline \geqq & \mathbf{c}' & \end{array}$$

táblázatot értjük. Az i-edik szektorfeladat kanonikus elrendezését

$$(2.42)\qquad \begin{array}{c|c|c} & \mathbf{x}_i' & \leqq \\ \hline \mathbf{y}_i^{\#} & \mathbf{A}_i^{\#} & \mathbf{u}_i^{\#} \\ \mathbf{y}_i^{\circ} & \mathbf{A}_i^{\circ} & \mathbf{b}_i^{\circ} \\ \hline \geqq & \mathbf{c}_i' & \end{array}$$

alakban hozzuk. A TKI feladat kanonikus elrendezését ebből

$$(2.43)\qquad \begin{array}{c|ccc|c} & \mathbf{x}_1' & \dots & \mathbf{x}_n' & \leqq \\ \hline \mathbf{y}^{\#} & \mathbf{A}_1^{\#} & \dots & \mathbf{A}_n^{\#} & \mathbf{b}^{\#} \\ \mathbf{y}_1^{\circ} & \mathbf{A}_1^{\circ} & & \mathbf{O} & \mathbf{b}_1^{\circ} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{y}_n^{\circ} & \mathbf{O} & & \mathbf{A}_n^{\circ} & \mathbf{b}_n^{\circ} \\ \hline \geqq & \mathbf{c}_1' & \dots & \mathbf{c}_n' & \end{array}$$

alakban állíthatjuk elő.

A fent leírt modellben érvényesek az alábbiak (részletes bizonyításukat az olvasóra bízzuk).

I. A (2.12)—(2.17) alatti konkrét TKI feladat a (2.1)—(2.11) feltételezések mellett megoldható. (Létezik megengedett TKI program, pl. $x_{i0t}^{\text{imp}} = Q_{it}$, $t = 1, \dots, T$; $i = 1, \dots, n$, a többi változó értéke 0; a TKI célfüggvény korlátos; ebből az 581. oldalon szereplő [10] lábjegyzet alatt idézett tétel alapján a fenti állítás következik.)

II. A megengedett központi programok értékelhetők és a megengedett TKI programok halmazának nemüres konvex poliedrikus generátorhalmazát alkotják. (Az $x_{i0t}^{\text{imp}} = p_{iit}$, $t = 1, \dots, T$; többi i-edik szektorváltozó értéke 0, $i = 1, \dots, n$ választással minden megengedett központi program mellett létezik minden szektorban megengedett program. (1.15) alapján ebből a megengedett központi programok értékelhetősége következik. A többi triviális, illetve az (1.19) utáni konstrukció egyszerű módosításával igazolható.)

III. A megengedett szektorárnyékárrendszer-együttesek értékelhetők. (A megengedett központi programok halmaza korlátos: ebből a [10] lábjegyzet alatt idézett tétel alapján az értékelhetőség következik.)

A fenti tulajdonságok együttesen azt jelentik, hogy a konkrét TKI feladatból származó poliedrikus játék reguláris és így alkalmazható a konkrét modellre az 1. részben kidolgozott iteratív eljárás. Ebben az esetben az iterációs szakaszok I. lépésében fellépő központi programozás igen egyszerűen, szimplex-algoritmus alkalmazása nélkül végrehajtható. Adott $(\pi_{ijt}, \omega_{it}, \varrho_{it}, \sigma_{is})$ árnyékárrendszer-együttes (1.36) alatt értelmezett reguláris értékelése, tehát a vele szemben optimális (p^*_{ijt}, w^*_{it}) központi program meghatározása ugyanis a

$$(2.44)\qquad \begin{cases} \left.\begin{array}{l} p_{iit} = \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} p_{jit} + Q_{it} \leqq R_{it} \quad i = 1, \ldots, n \\ \sum\limits_{i=1}^{n} w_{it} = W_t \\ p_{ijt} \geqq 0\,;\ i, j = 1 \ldots, n\,;\ w_{it} \geqq 0,\ i = 1, \ldots, n \end{array}\right\} t = 1, \ldots, T \\ \sum\limits_{t=1}^{T} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \pi_{jit}\, p_{jit} - \pi_{iit}\, p_{jit} + \omega_{it} w_{it} \right) \to \max! \end{cases}$$

lineáris programozás megoldását jelenti. A feladat $(n + 1)\cdot T$ számú független „mikroprogramozássá" bomlik, mégpedig:

A) az i-edik termék t-edik időszakra vonatkozó „optimális" eloszlását megadó

$$(2.45)\qquad \begin{cases} p_{iit} = \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} p_{jit} + Q_{it} \leqq R_{it} \\ p_{jit} \geqq 0, \quad j = 1, \ldots, n \\ \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \pi_{jit}\, p_{jit} - \pi_{iit}\, p_{iit} \to \max! \end{cases}$$

programozásokra ($i = 1, \ldots, n$; $t = 1, \ldots, T$), továbbá a munkaerőkeretnek a t-edik időszakra vonatkozó „optimális" elosztását megadó

$$(2.46)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} w_{it} = W_t \\ w_{it} \geqq 0, \quad i = 1, \ldots, n \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_{it} w_{it} \to \max! \end{cases}$$

programozásokra ($t = 1, \ldots, T$). Triviálisan belátható, hogy (2.45) egy megoldása a következő: ha $j_0(\neq i)$ jelöli azt a (legkisebb) indexet, amelyre

$$(2.47)\qquad \pi_{j_0 it} = \bar{\pi}_{\cdot it} = \max\{\pi_{1it}, \ldots, \pi_{i-1,i,t}, \pi_{i+1,i,t}, \ldots, \pi_{nit}\}$$

teljesül, más szóval a j_0-adik szektor i-termékre vonatkozó anyagkeretárnyékára a legnagyobb a t-edik időszakban, akkor

$$(2.48)\qquad p^*_{iit} = \begin{cases} Q_{it}, & \text{ha} \quad \bar{\pi}_{\cdot it} < \pi_{iit} \\ R_{it}, & \text{ha} \quad \bar{\pi}_{\cdot it} \geqq \pi_{iit} \end{cases}$$

és

$$p^*_{j_0it} = \begin{cases} 0, & \text{ha } \bar{\pi}_{\cdot it} < \pi_{iit} \\ R_{it} - Q_{it} & \text{ha } \bar{\pi}_{\cdot it} \geqq \pi_{iit} \end{cases} \tag{2.49}$$

$$p^*_{jit} = 0, \quad \text{ha} \quad j \neq j_0, \quad j \neq i, \quad 1 \leqq j \leqq n. \tag{2.50}$$

(2.46) egy megoldása pedig az alábbi: ha i_0 jelöli azt a (legkisebb) indexet, amelyre

$$\omega_{i_0t} = \bar{\omega}_{\cdot t} = \max\{\omega_{1t}, \ldots, \omega_{nt}\} \tag{2.51}$$

teljesül, más szóval az i_0-adik szektor munkaerőkeret-árnyékára a legnagyobb a t-edik időszakban, akkor

$$w^*_{it} = \begin{cases} W_t, & \text{ha } i = i_0 \\ 0 & \text{ha } i \neq i_0, \quad 1 \leqq i \leqq n. \end{cases} \tag{2.52}$$

Az így nyert megoldásokhoz tartozó maximális célfüggvények összege, tehát a (2.44) alatti lineáris programozás maximális célfüggvényértéke a következő:

$$\sum_{t=1}^{T} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[(\bar{\pi}_{\cdot it} - \pi_{iit})^+ \cdot (R_{it} - Q_{it}) - \pi_{ii} Q_{it} \right] + \bar{\omega}_{\cdot t} W_t \right\}. \tag{2.53}$$

(Itt és a továbbiakban is tetszőleges α valós számnál $\alpha^+ = \max\{\alpha, 0\}$.)

A fentiek előrebocsátása után rátérünk a konkrét modell: a hosszúlejáratú makroökonómiai tervezési feladat 1. részben adott iteratív módszerrel való megoldásának leírására. Az alábbi pontban a számítások részletes menetét adjuk meg abban a formában, ahogyan azt számítógépekre lehet programozni.

2.2 A δ-optimális programot szolgáltató iteráció menete

Az iteráció kezdete előtt

A KÖZPONTI MEMÓRIÁBAN TÁROLT ADATOK

(2.54)
- δ . . . a közelítés választott pozitív hibakorlátja
- n . . . a szektorok száma
- T . . . az időszakok száma
- Q_{it} . . . az i-edik termék extern fogyasztása a t-edik időszakban; $i = 1, \ldots, n$; $t = 1, \ldots, T$
- R_{it} . . . az i-edik termék extern korlátja a t-edik időszakban; $i = 1, \ldots, n$; $t = 1, \ldots, T$
- W_t . . . a t-edik időszakban rendelkezésre álló munkaerőkeret; $t = 1, \ldots, T$.

AZ i-EDIK SZEKTORMEMÓRIÁBAN TÁROLT ADATOK $(i = 1, \ldots, n)$

$$(2.55)\quad \left.\begin{cases} \mathbf{A}_i \ldots \text{ a szektorprogramozás mátrixa} \\ \mathbf{b}_i^{\circ} \ldots \text{ a speciális szektorfeltételek korlátjaiból álló vektor} \\ \mathbf{c}_i' \ldots \text{ a szektor-tevékenységek devizahozamaiból álló vektor} \end{cases}\right\} \text{az } i\text{-edik szektorprogramozás mellékelt kanonikus elrendezéséből leolvasható konstansok}$$

*

1\. SZAKASZ

I. lépés (központ). Tetszőleges[18] (p_{ijt}, w_{it}) megengedett központi program kiválasztása. Megfelel például az alábbi:

$$(2.56)\quad \left.\begin{cases} p_{iit}^{(1)} = R_{it} \\ p_{1it}^{(1)} = \ldots = p_{i-1,i,t}^{(1)} = p_{i+1,i,t}^{(1)} = \ldots = p_{nit}^{(1)} = \dfrac{R_{it} - Q_{it}}{n-1} \\ w_{it}^{(1)} = \dfrac{W_t}{n} \end{cases}\right\} \begin{aligned} i &= 1,\ldots, n \\ t &= 1,\ldots, T. \end{aligned}$$

Memóriában: (2.54) és (2.56).

II. lépés (központ). Az 1. szakaszban definíciószerűen

$$(2.57)\quad \left.\begin{cases} p_{ijt}^*\langle 1\rangle = p_{ijt}^{(1)}, & j = 1,\ldots, n \\ w_{it}^*\langle 1\rangle\, w_{it}^{(1)} \end{cases}\right\} \begin{aligned} i &= 1,\ldots, n \\ t &= 1,\ldots, T. \end{aligned}$$

Az i-edik szektornak $(i = 1, \ldots, n)$ leküldi a

$$(2.58)\quad \left.\begin{cases} p_{ijt}^*\langle 1\rangle, & j = 1,\ldots, n \\ w_{it}^*\langle 1\rangle \end{cases}\right\} t = 1,\ldots, T$$

központi tervszámokat. Memóriában: (2.54) és (2.56) [=(2.57)].

III. lépés (szektorok). Az i-edik szektor $(i = 1, \ldots, n)$ kitölti a (2.58) adatokkal standard elrendezésének megfelelő rovatait és szimplex-eljárással megoldja a duális szektorfeladatot. Ennek során meghatározza a (2.58) adatok melletti optimális

$$(2.59)\quad \pi_{i1t}^{(1)}, \ldots, \pi_{int}^{(1)}, \omega_{it}^{(1)}, \qquad t = 1, \ldots, T$$

$$(2.60)\quad \begin{cases} \varrho_{it}^{(1)}, & t = 1, \ldots, T \\ \sigma_{is}^{(1)}, & s = 1, \ldots, m_i \end{cases}$$

árnyékárakat, a duális célfüggvény minimális értékét, a

$$(2.61)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi_i^{(1)} = \\ &= \sum_{t=1}^{T} \left(R_{it}\varrho_{it}^{(1)} - p_{iit}^*\langle 1\rangle \pi_{iit}^{(1)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} p_{ijt}^*\langle 1\rangle \pi_{ijt}^{(1)} + w_{it}^*\langle 1\rangle \omega_{it}^{(1)} \right) + \sum_{s=1}^{m_i} b_{is}\sigma_{is}^{(1)} \end{aligned}\right\}$$

[18] Mivel itt a megengedett központi programok halmaza korlátos, $\mathbf{U}^{\triangle} = \mathrm{U}$. (Vö.: (1.36)).

szektoroptimumot, továbbá ennek „speciális komponensét", a

$$\Phi_i^{\circ\,(1)} = \sum_{t=1}^{T} R_{it}\,\varrho_{it}^{(1)} + \sum_{s=1}^{m_i} b_{is}\,\sigma_{is}^{(1)} \tag{2.62}$$

mennyiséget. A (2.59), (2.61) és (2.62) alatti mennyiségeket felküldi a központnak. Memóriában: (2.55), illetve a fenti számításnál használt szimplex-tábla, továbbá a kapott optimális bázis.

IV. lépés (központ). Az 1. szakaszbeli alsó optimum, azaz

$$\varphi^*\langle 1\rangle = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^{(1)} \tag{2.63}$$

számítása után az 1. szakaszban definíciószerűen a „kevert" árnyékárak:

$$\pi_{ijt}^*\langle 1\rangle = \pi_{ijt}^{(1)} \qquad i, j = 1, \ldots, n; \quad t = 1, \ldots, T; \tag{2.64}$$

$$\omega_{it}^*\langle 1\rangle = \omega_{it}^{(1)} \qquad i = 1, \ldots, n; \quad t = 1, \ldots, T; \tag{2.65}$$

továbbá a „kevert" speciális szektoroptimum-komponensek:

$$\Phi_i^{\circ}\langle 1\rangle = \Phi_i^{\circ\,(1)} \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2.66}$$

Memóriában: (2.54), (2.57), továbbá (2.63), (2.64), (2.65) és (2.66).

* * *

2. SZAKASZ

I. lépés (központ).

I/1. Minden i-re és t-re ($i = 1, \ldots, n$; $t = 1, \ldots, T$) (2.64)-ből a $\pi_{1it}^*\langle 1\rangle, \ldots, \pi_{nit}^*\langle 1\rangle$ árnyékárak kiválasztása. A

$$\pi_{j_0 it}^*\langle 1\rangle = \bar{\pi}_{\cdot it}^*\langle 1\rangle = \max_{j\neq i} \pi_{jit}^*\langle 1\rangle \tag{2.67}$$

feltételnek eleget tevő (legkisebb) $j_0(\neq i)$ index kiválasztása. A

$$p_{iit}^{(2)} = \begin{cases} Q_{it}, & \text{ha} \quad \bar{\pi}_{\cdot it}^*\langle 1\rangle < \pi_{iit}^*\langle 1\rangle \\ R_{it}, & \text{ha} \quad \bar{\pi}_{\cdot it}^*\langle 1\rangle \geq \pi_{iit}^*\langle 1\rangle \end{cases} \tag{2.68}$$

$$p_{j_0 it}^{(2)} = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad \bar{\pi}_{\cdot it}^*\langle 1\rangle < \pi_{iit}^*\langle 1\rangle \\ R_{it} - Q_{it}, & \text{ha} \quad \bar{\pi}_{\cdot it}^*\langle 1\rangle \geq \pi_{iit}^*\langle 1\rangle \end{cases} \tag{2.69}$$

$$p_{jit}^{(2)} = 0, \quad \text{ha} \quad j \neq j_0, \quad j \neq i, \quad 1 \leq j \leq n \tag{2.70}$$

mennyiségek kiszámítása.

I/2. Minden t-re ($t = 1, \ldots, T$) (2.65)-ből az $\omega_{1t}^*\langle 1\rangle, \ldots, \omega_{nt}^*\langle 1\rangle$ árnyékárak kiválasztása. Az

$$\omega_{i_0 t}^*\langle 1\rangle = \bar{\omega}_{\cdot t}^*\langle 1\rangle = \max\{\omega_{1t}^*\langle 1\rangle, \ldots, \omega_{nt}^*\langle 1\rangle\} \tag{2.71}$$

feltételnek eleget tevő (legkisebb) i_0 index kiválasztása. A

$$(2.72)\qquad w_{it}^{(2)} = \begin{cases} W_t, & \text{ha } i = i_0 \\ 0, & \text{ha } i \neq i_0, \quad 1 \leqq i \leqq n \end{cases}$$

mennyiségek kiszámítása.

I/3. (2.67), (2.71) és (2.66) alapján a 2. szakaszbeli felső optimum kiszámítása:

$$(2.73)\qquad \begin{cases} \Phi^* \langle 2 \rangle = \\ = \sum_{t=1}^{T} \left\{ \sum_{i=1}^{n} [(\bar{\pi}^*_{it} \langle 1 \rangle - \pi^*_{iit} \langle 1 \rangle)^+ \cdot (R_{it} - Q_{it}) - \pi^*_{iit} \langle 1 \rangle Q_{it}] + \bar{\omega}^*_t \langle 1 \rangle W_t \right\} + \\ + \sum_{i=1}^{n} \Phi_i^\circ \langle 1 \rangle . \end{cases}$$

I/4. Az eddigi legkisebb felső optimum kiszámítása: itt definíciószerűen

$$(2.74)\qquad \Phi^{**} \langle 2 \rangle = \Phi^* \langle 2 \rangle .$$

I/5. Kontroll: a (2.63) alatti alsó értékkel összehasonlítva a

$$(2.75)\qquad \varphi^* \langle 1 \rangle \leqq \Phi^{**} \langle 2 \rangle$$

egyenlőtlenségnek kell fennállnia.

I/6 : 1. eset: $\Phi^{**}\langle 2 \rangle - \varphi^*\langle 1 \rangle \leqq \delta$ esetén az iteráció leállítása. Utasítás a szektoroknak: a memóriájukban őrzött szimplex-tábla és optimális bázis felhasználásával számítsák ki a (2.59)—(2.60) alatti duál optimális változóknak megfelelő primál optimális szektorprogramokat.[19] Ezek együttese a feladat δ-optimális megoldása.

I/6 : 2. eset: $\Phi^{**}\langle 2 \rangle - \varphi^*\langle 1 \rangle > \delta$ esetén következik a II. lépés. Memóriában: (2.54), (2.57), (2.63), (2.64), (2.65), (2.66), (2.68), (2.69), (2.70), (2.72) és (2.74).

II. lépés (központ). A „kevert" központi program elkészítése:

$$(2.76)\qquad \left. \begin{array}{ll} p^*_{ijt} \langle 2 \rangle = \frac{1}{2} p^*_{ijt} \langle 1 \rangle + \frac{1}{2} p^{(2)}_{ijt} & j = 1, \ldots, n \\ w^*_{it} \langle 2 \rangle = \frac{1}{2} w^*_{it} \langle 1 \rangle + \frac{1}{2} w^{(2)}_{it} & \end{array} \right\} \begin{array}{l} i = 1, \ldots, n \\ t = 1, \ldots, T. \end{array}$$

Az i-edik szektornak ($i = 1, \ldots, n$) a

$$(2.77)\qquad \left. \begin{array}{ll} p^*_{ijt}\langle 2 \rangle & j = 1, \ldots, n \\ w^*_{it} \langle 2 \rangle & \end{array} \right\} t = 1, \ldots, T$$

[19] A szimplex-tábla „z-rovatából" a kitöltő változóknak megfelelő helyeken az optimális szektorprogram komponensei megtalálhatók. Lásd pl. S. KARLIN [9], 169—170. oldalak.

központi tervszámok leküldése. Memóriában: (2.54), (2.63), (2.64), (2.65), (2.74) és (2.76).

III. lépés (szektorok). Az i-edik szektor ($i = 1, \dots, n$) módosítja a (2.77) alatti új tervszámokkal szimplex-tábláját, esetleg szükséges vektorcserékkel[20] előállítja az új optimális bázist és az új optimális

$$\pi_{i1t}^{(2)}, \dots, \pi_{int}^{(2)}, \omega_{it}^{(2)}, \; t = 1, \dots, T \tag{2.78}$$

$$\begin{Bmatrix} \varrho_{it}^{(2)} & t = 1, \dots, T \\ \sigma_{is}^{(2)} & s = 1, \dots, m_i \end{Bmatrix} \tag{2.79}$$

árnyékárakat, az új

$$\begin{Bmatrix} \varphi_i^{(2)} = \\ = \sum_{t=1}^{T} \left(R_{it} \varrho_{it}^{(2)} - p_{iit}^* \langle 2 \rangle \pi_{iit}^{(2)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} p_{ijt}^* \langle 2 \rangle \pi_{ijt}^{(2)} + w_{it}^* \langle 2 \rangle \omega_{it}^{(2)} \right) + \sum_{s=1}^{m_i} b_{is} \sigma_{is}^{(2)} \end{Bmatrix} \tag{2.80}$$

szektoroptimumot és az új

$$\Phi_i^{\circ(2)} = \sum_{t=1}^{T} R_{it} \varrho_{it}^{(2)} + \sum_{s=1}^{m_i} b_{is} \sigma_{is}^{(2)} \tag{2.81}$$

speciális szektoroptimum-komponenst. A (2.78), (2.80) és (2.81) alatti mennyiségeket felküldi a központnak. Memóriában: (2.55), továbbá a fent használt szimplex-tábla és optimális bázis.

IV. lépés (központ).

IV/1. A 2. szakaszbeli alsó optimum,

$$\varphi^* \langle 2 \rangle = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^{(2)} \tag{2.82}$$

kiszámítása.

IV/2. Kontroll: a (2.74) alatti minimális felső értékkel összehasonlítva a

$$\varphi^* \langle 2 \rangle \leqq \Phi^{**} \langle 2 \rangle \tag{2.83}$$

egyenlőtlenségnek kell fennállnia.

IV/3 : 1. eset: $\Phi^{**}\langle 2 \rangle - \varphi^*\langle 2 \rangle \leqq \delta$ esetén az iteráció leállítása. Utasítás a szektoroknak: a memóriájukban őrzött szimplex-tábla és optimális bázis felhasználásával számítsák ki a (2.78)—(2.79) alatti duál optimális változóknak megfelelő primál optimális szektorprogramokat. Ezek együttese a feladat δ-optimális megoldása.

[20] Lásd pl. Y. Suzuki [23], 95—96. oldalak.

IV/3 : 2. eset: $\Phi^{**}\langle 2\rangle - \varphi^{*}\langle 2\rangle > \delta$ esetén a

$$\pi^{*}_{ijt}\langle 2\rangle = \frac{1}{2}\pi^{*}_{ijt}\langle 1\rangle + \frac{1}{2}\pi^{(2)}_{ijt} \qquad i,j = 1,\ldots,n;\; t = 1,\ldots,T \tag{2.84}$$

$$\omega^{*}_{it}\langle 2\rangle = \frac{1}{2}\omega^{*}_{it}\langle 1\rangle + \frac{1}{2}\omega^{(2)}_{it} \qquad i = 1,\ldots,n;\; t = 1,\ldots,T \tag{2.85}$$

„kevert" árnyékárak és a

$$\Phi^{\circ}_{i}\langle 2\rangle = \frac{1}{2}\Phi^{\circ}_{i}\langle 1\rangle + \frac{1}{2}\Phi^{\circ(2)}_{i} \qquad i = 1,\ldots,n \tag{2.86}$$

„kevert" speciális szektoroptimum-komponensek kiszámítása. Memóriában: (2.54), (2.74), (2.76), (2.82), (2.84), (2.85) és (2.86).

* * *

Tegyük fel, hogy az iterációt még nem állítottuk le az $(N-1)$-edik szakasz befejezéséig, tehát az iterációs szakaszok I/6, illetve IV/3 pontjában mindig a 2. eset állt fenn:

$$\Phi^{**}\langle k\rangle - \varphi^{*}\langle k-1\rangle > \delta \text{ és } \Phi^{**}\langle k\rangle - \varphi^{*}\langle k\rangle > \delta,\; k = 2,\ldots,N-1. \tag{2.87}$$

Itt $\Phi^{**}\langle k\rangle$ a k-adik szakaszig elért minimális felső optimum:

$$\Phi^{**}\langle k\rangle = \min\{\Phi^{*}\langle 2\rangle,\ldots,\Phi^{*}\langle k\rangle\} \qquad k = 2,3,\ldots \tag{2.88}$$

Az $(N-1)$-edik szakasz befejezése után

A KÖZPONTI MEMÓRIÁBAN TÁROLT ADATOK: (2.54), továbbá

$$\Phi^{**}\langle N-1\rangle \tag{2.89}$$

$$p^{*}_{ijt}\langle N-1\rangle \qquad i,j = 1,\ldots,n;\; t = 1,\ldots,T \tag{2.90}$$

$$w^{*}_{it}\langle N-1\rangle \qquad i = 1,\ldots,n;\; t = 1,\ldots,T \tag{2.91}$$

$$\varphi^{*}\langle N-1\rangle \tag{2.92}$$

$$\pi^{*}_{ijt}\langle N-1\rangle \qquad i,j = 1,\ldots,n;\; t = 1,\ldots,T \tag{2.93}$$

$$\omega^{*}_{it}\langle N-1\rangle \qquad i = 1,\ldots,n;\; t = 1,\ldots,T \tag{2.94}$$

$$\Phi^{0}_{i}\langle N-1\rangle \qquad i = 1,\ldots,n. \tag{2.95}$$

AZ i-EDIK SZEKTOR MEMÓRIÁJÁBAN TÁROLT ADATOK ($i = 1,\ldots,n$):

(2.55), továbbá az $(N-1)$-edik szakasz III. lépése során használt szimplextábla és optimális bázis.

N-EDIK SZAKASZ

I. lépés (központ).

I/1. Minden i-re és t-re ($i = 1,\ldots,n$; $t = 1,\ldots,T$) (2.93)-ból a $\pi^{*}_{1it}\langle N-1\rangle,\ldots,\pi^{*}_{nit}\langle N-1\rangle$ árnyékárak kiválasztása. A

$$\pi^{*}_{j_0 it}\langle N-1\rangle = \overline{\pi}^{*}_{\cdot it}\langle N-1\rangle = \max_{j\neq i}\pi^{*}_{jit}\langle N-1\rangle \tag{2.96}$$

feltételnek eleget tevő (legkisebb) $j_0(\neq i)$ index kiválasztása. A

$$(2.97)\qquad p_{iit}^{(N)}=\begin{cases}Q_{it}, & \text{ha } \bar{\pi}^*_{\cdot it}\langle N-1\rangle<\pi^*_{iit}\langle N-1\rangle\\ R_{it}, & \text{ha } \bar{\pi}^*_{\cdot it}\langle N-1\rangle\geqq\pi^*_{iit}\langle N-1\rangle\end{cases}$$

$$(2.98)\qquad p_{j_0it}^{(N)}=\begin{cases}0, & \text{ha } \bar{\pi}^*_{\cdot it}\langle N-1\rangle<\pi^*_{iit}\langle N-1\rangle\\ R_{it}-Q_{it}, & \text{ha } \bar{\pi}^*_{\cdot it}\langle N-1\rangle\geqq\pi^*_{iit}\langle N-1\rangle\end{cases}$$

$$(2.99)\qquad p_{jit}^{(N)}=0,\quad \text{ha}\quad j\neq j_0,\quad j\neq i,\quad l\leqq j\leqq n$$

mennyiségek kiszámítása.

I/2. Minden t-re ($t=1,\ldots,T$) (2.94)-ből az $\omega^*_{1t}\langle N-1\rangle,\ldots,\omega^*_{nt}\langle N-1\rangle$ árnyékárak kiválasztása. Az

$$(2.100)\qquad \omega^*_{i_0t}\langle N-1\rangle=\bar{\omega}^*_{\cdot t}\langle N-1\rangle=\max_i \omega^*_{it}\langle N-1\rangle$$

feltételnek eleget tevő (legkisebb) i_0 index kiválasztása. A

$$(2.101)\qquad w_{it}^{(N)}=\begin{cases}W_t, & \text{ha}\quad i=i_0\\ 0, & \text{ha}\quad i\neq i_0,\quad 1\leqq i\leqq n\end{cases}$$

mennyiségek kiszámítása.

I/3. (2.96), (2.100) és (2.95) alapján az N-edik szakaszbeli felső optimum kiszámítása:

$$(2.102)\qquad \begin{cases}\Phi^*\langle N\rangle= \\ =\sum\limits_{t=1}^{T}\Bigg\{\sum\limits_{i=1}^{n}[(\bar{\pi}^*_{\cdot it}\langle N-1\rangle-\pi^*_{iit}\langle N-1\rangle)^+\cdot(R_{it}-Q_{it})-\\ \quad -\pi^*_{\cdot it}\langle N-1\rangle Q_{it}]+\bar{\omega}^*_{\cdot t}\langle N-1\rangle W_t\Bigg\}+\sum\limits_{i=1}^{n}\Phi_i^\circ\langle N-1\rangle\,.\end{cases}$$

I/4. Az eddigi legkisebb felső optimum számítása:

$$(2.103)\qquad \Phi^{**}\langle N\rangle=\min\{\Phi^{**}\langle N-1\rangle,\Phi^*\langle N\rangle\}\,.$$

I/5. Kontroll: A (2.92) alatti alsó értékkel összehasonlítva a

$$(2.104)\qquad \varphi^*\langle N-1\rangle\leqq\Phi^{**}\langle N\rangle$$

egyenlőtlenségnek kell fennálnia.

I/6 : 1. eset: $\Phi^{**}\langle N\rangle-\varphi^*\langle N-1\rangle\leqq\delta$ esetén az iteráció leállítása. Utasítás a szektoroknak: a memóriájukban őrzött szimplex-tábla és optimális bázis felhasználásával számítsák ki az előzőleg kapott duál optimális változóknak megfelelő primál optimális szektorprogramokat. Ezek együttese a feladat δ-optimális megoldása.

I/6 : 2. eset: $\Phi^{**}\langle N\rangle-\varphi^*\langle N-1\rangle>\delta$ esetén következik a II. lépés. Memóriában: (2.54), (2.90), (2.91), (2.92), (2.93), (2.94), (2.97), (2.98), (2.99), (2.101) és (2.103).

II. lépés (központ). A „kevert” központi program elkészítése:

$$(2.105)\quad \left\{\begin{array}{ll} p^*_{ijt}\langle N\rangle = \dfrac{N-1}{N} p^*_{ijt}\langle N-1\rangle + \dfrac{1}{N} p^{(N)}_{ijt}\; j=1,\dots,n & i=1,\dots,n \\ w^*_{it}\langle N\rangle = \dfrac{N-1}{N} w^*_{it}\langle N-1\rangle + \dfrac{1}{N} w^{(N)}_{it} & t=1,\dots,T. \end{array}\right.$$

Az i-edik szektornak ($i = 1, \dots, n$) a

$$(2.106)\quad \left.\begin{array}{ll} p^*_{ijt}\langle N\rangle & j=1,\dots,T \\ w^*_{it}\langle N\rangle & \end{array}\right\} t=1,\dots,T$$

központi tervszámok leküldése. Memóriában: (2.54), (2.92), (2.93), (2.94), (2.103) és (2.105).

III. lépés (szektorok). Az i-edik szektor ($i = 1, \dots, n$) módosítja a (2.106) alatti új tervszámokkal szimplex-tábláját, esetleg szükséges vektorcserékkel előállítja az új optimális bázist és az új optimális

$$(2.107)\quad \pi^{(N)}_{i1t}, \dots, \pi^{(N)}_{int}, \omega^{(N)}_{it} \qquad t=1,\dots,T$$

$$(2.108)\quad \left\{\begin{array}{ll} \varrho^{(N)}_{it} & t=1,\dots,T \\ \sigma^{(N)}_{is} & s=1,\dots,m_i \end{array}\right.$$

árnyékárakat, az új

$$(2.109)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi^{(N)}_i = \sum_{t=1}^{T} \Bigg(& R_{it}\varrho^{(N)}_{it} - p^*_{iit}\langle N\rangle \pi^{(N)}_{iit} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} p^*_{ijt}\langle N\rangle \pi^{(N)}_{ijt} + \\ & + w^*_{it}\langle N\rangle \omega^{(N)}_{it}\Bigg) + \sum_{s=1}^{m_i} b_{is}\sigma^{(N)}_{is}, \end{aligned}\right.$$

szektoroptimumot és az új

$$(2.110)\quad \Phi^{\circ\,(N)}_i = \sum_{t=1}^{T} R_{it}\varrho^{(N)}_{it} + \sum_{s=1}^{m_i} b_{is}\sigma^{(N)}_{is}$$

speciális szektoroptimum-komponenst. A (2.107), (2.109) és (2.110) alatti értékeket felküldi a központnak. Memóriában: (2.55), továbbá a fenti számításban használt szimplex-tábla és optimális bázis.

IV. lépés (központ).

IV/1. Az N-edik szakaszbeli alsó optimum,

$$(2.111)\quad \varphi^*\langle N\rangle = \sum_{i=1}^{n} \varphi^{(N)}_i$$

kiszámítása.

IV/2. Kontroll: a (2.103) alatti minimális felső optimummal összehasonlítva a

$$(2.112)\quad \varphi^*\langle N\rangle \leq \Phi^{**}\langle N\rangle$$

egyenlőtlenségnek kell fennállnia.

IV/3 : 1. eset. $\Phi^{**}\langle N\rangle - \varphi^{*}\langle N\rangle \leq \delta$ esetén az iteráció leállítása. Utasítás a szektoroknak: a memóriájukban őrzött szimplex-tábla és optimális bázis felhasználásával számítsák ki a (2.107)—(2.108) alatti duál optimális változóknak megfelelő primál optimális szektorprogramokat. Ezek együttese a feladat δ-optimális megoldása.

IV/3 : 2. eset: $\Phi^{**}\langle N\rangle - \varphi^{*}\langle N\rangle > \delta$ esetén a

$$\pi^{*}_{ijt}\langle N\rangle = \frac{N-1}{N}\pi^{*}_{ijt}\langle N-1\rangle + \frac{1}{N}\pi^{(N)}_{ijt} \quad i,j=1,\ldots,n;\; t=1,\ldots,T \tag{2.113}$$

$$\omega^{*}_{it}\langle N\rangle = \frac{N-1}{N}\omega^{*}_{it}\langle N-1\rangle + \frac{1}{N}\omega^{(N)}_{it} \quad i=1,\ldots,n;\; t=1,\ldots,T \tag{2.114}$$

,,kevert'' árnyékárak és a

$$\Phi^{\circ}_{i}\langle N\rangle = \frac{N-1}{N}\Phi^{\circ}_{i}\langle N-1\rangle + \frac{1}{N}\Phi^{\circ\,(N)}_{i} \qquad i=1,\ldots,n \tag{2.115}$$

,,kevert'' speciális szektoroptimum-komponensek kiszámítása.

Memóriában: (2.54), (2.103), (2.105), (2.111), (2.113), (2.114) és (2.115).

Ezután következik az $(N+1)$-edik szakasz, és így tovább.

2.3. A modell és a számítási eljárás közgazdasági tartalmáról

Az alábbiakban közgazdasági szempontból kommentáljuk modellünket. Egyrészt megkíséreljük közgazdaságilag interpretálni a modell néhány vonását, tulajdonságát. Másrészt felvetünk néhány problémát, amely a modellben szereplő paraméterek meghatározásával kapcsolatos.

1. Mint a bevezetésben már említettük, a kétszintű tervezés fenti módszerének kidolgozására a szocialista gazdasági gyakorlatban ténylegesen fennálló *oda-visszatervezés* adta az alapötletet. Eljárásunk még egy szempontból imitálja a tervezés szokásos gyakorlatát. Rendszeresen megtörténik, hogy a központ bizonyos direktívákat ad az ágazatoknak és kéri annak közlését: milyen gazdasági hatékonysággal oldható meg a feladat. Az ágazatok különböző — központilag előírt szerkezetű — ,,gazdaságossági mutatószámokkal'' fejezik ki tevékenységük hatékonyságát. Módszerünk egységes rendszerbe foglalja ezt a ,,visszajelentést'': az ágazatok az eljárás minden lépésében egyfajta gazdaságossági mutatószámokat — a programozásból nyert árnyékárakat — jelentenek vissza a központnak az onnét kapott direktívák értékelésére. Ugyanakkor egyes iparágakban már matematikai programozási módszereket is használnak az ágazati méretű tervek kidolgozásához. E programozási modellekben a korlátozó feltételek jobboldalán levő konstansként szerepelnek egyes, az Országos Tervhivataltól kapott direktívák: a kibocsátási tervfeladat, erőforrás-korlátok stb. E programozások valósággal sugallják a gondolatot: az ágazati programozások eredményeit érdemes lenne összehasonlítani és felhasználni a népgazdasági tervből átvett direktívák, keretszámok javítására. Eljárásunk hivatása: szervezett formát adni az ilyen összehasonlításoknak és az ezek alapján történő mikroökonómiai tervkorrekcióknak; szervesen összekapcsolni az iparági szinten végzett programozásokat.

2. Mit fejez ki közgazdaságilag a szektormodellek duális feladatának célfüggvénye? Tegyük fel egy pillanatra a következőket: a központ valóban olyan „áron" adja a szektornak az erőforrásokat, amilyen árnyékárat a szektor visszajelent s ugyanakkor megköveteli a szektortól, hogy ne legyen veszteséges. Ha a szektor túl magas, „rózsaszínű" árnyékárat jelentett vissza (például azt állította, hogy a létszámkeret emelése nagyobb többlet-hozamot biztosít, mint amennyire az optimális program szerint valóban képes), akkor a szektor veszteségessé válna. A korlátok árnyékárakra történő értékelésének minimalizálása, mint a modell optimalizálási követelménye, azt fejezi ki: óvakodni kell a szektor feltételekben korlátként szereplő központi direktívák módosításának, a módosítás révén a célfüggvényben mutatkozó hatásnak a *túlértékelésétől.* A duális célfüggvény minimalizálása az óvatosság, a felelősségteljes mértéktartás attitüdjét fejezi ki a visszajelentés keretében adott gazdaságossági mutatószámok meghatározásánál.

3. Figyelemreméltó, hogy közgazdaságilag reálisan interpretálható a modell *játékelméleti* jellege is. A helyzet ugyanis eredetileg is mutat bizonyos analógiát a stratégiás játékokkal. Mindkét fél rendelkezik bizonyos információkkal, de nem hozhat egymaga teljesen megnyugtató döntést, mert ehhez ismernie kellene a másik fél információit is. A központnak nagy az áttekintése, de nincs részletekbe menő ismerete azokról a sajátos problémákról (például az egyes szektorokra jellemző műszaki és költségadatokról, a szektorbeli választást korlátozó speciális feltételekről stb.), amelyeket a szektorok összessége ismer, s megfordítva: a szektorok sok részletet látnak, de nincs áttekintésük azokról a nagy összefüggésekről, amelyek csak a központ előtt lehetnek világosak. Akárcsak a stratégiás játékban, a kialakuló szituáció mindkét félen múlik. Mind a központ, mind a szektorok tisztában vannak azzal, hogy a másik „fél" intézkedései is nagy hatást gyakorolnak a helyzetre. Ilyen körülmények között mindkét fél a számára viszonylag leginkább megnyugtató stratégiát keresi. Ez a stratégia a játék minimax-megoldása.

Modellünkben a játékelméleti megoldásként alkalmazott minimax-stratégia elfogadása a következőket jelenti: Tegyük fel, hogy a központ „mindenttudó"; rendelkezik mindazokkal a speciális részlet információkkal is, amelyeket rendszerint csak a szektorok ismernek pontosan. Ebben az esetben (eszményi számítástechnikai lehetőségek mellett) egymaga, központilag kidolgozhatná az optimális népgazdasági programot (az optimális TKI programot). Az így meghatározott programhoz meghatározott célfüggvényérték, optimális népgazdasági hozam (TKI optimum) tartozik.

Ha azonban a központ (modellünkben csakúgy, mint a valóságban) hiányos információ miatt képtelen egymaga, a szektorok közreműködése nélkül meghatározni az optimális népgazdasági programot, akkor a népgazdasági hozam kevesebb az optimálisnál. A szektoroktól „függetlenül" hozott döntés következtében tehát relatív veszteség lép fel; a központ a veszteség csökkentésére törekszik.

A másik oldalon: a szektorok képtelenek önmaguk, a központ irányító, összehangoló tevékenysége nélkül eljutni az optimális népgazdasági programhoz. A központtól „függetlenül" hozott döntés esetén szükségképpen hibás értékelést adnak a nekik juttatott erőforrásokról, keretekről. Tegyük fel ismét egy pillanatra (mint már korábban a duális célfüggvény értelmezésekor feltételeztük), hogy a szektorokkal „büntetésképpen" megfizettetik a nekik juttatott erőforrások, keretek túlértékeléséből származó többletet. A hibás értékelés, azaz a hibás árnyékrendszer ilyen körülmények között súlyos veszteséget jelentene a szektoroknak. A szektorok ezesetben nyilván arra törekszenek, hogy ez a veszteség minél kisebb legyen.

Amint látjuk, mindkét oldalon egyfajta relatív veszteség csökkentésére törekszenek: a központ arra, hogy minél kevésbé maradjon el az optimális népgazdasági hozamtól, a szektorok pedig arra, hogy minél kevésbé lépjék túl az optimális értékeléseket. A minimax megoldáshoz akkor jutnak el, ha mindkét félnek sikerült ezt a relatív veszteséget kiküszöbölnie.

4. A cikkünkben szereplő 3. tételnek megfelelően a konkrét modellben az árnyékárak meghatározott *egalizálódási tendenciája* lép fel. Először: egalizálódik ugyanazon termék azonos időszakra vonatkozó ,,keresleti'' árnyékára a különböző szektoroknál, valamint a termék ,,keresleti'' és ,,kínálati'' árnyékára is (tehát a $\pi_{1it}, \ldots, \pi_{i-1,i,t}, \pi_{i+1,i,t}, \ldots, \pi_{nit}$ és a π_{iit} árnyékárak). Másodszor: egalizálódik a különböző szektoroknak ugyanazon időszakban juttatott munkaerőkeret árnyékára (tehát az $\omega_{1t}, \ldots, \omega_{nt}$ árnyékárak).

Ez a tendencia teljesen megfelel a ,,welfare-economics'' ismert optimumfeltételének, amely szerint azonos erőforrás marginális hozadékának felhasználása különböző területein egyenlőnek kell lennie.[21]

Az egalizálódási tendencia az azonos időszakra vonatkozó árnyékárakra érvényesül. Érdemes lesz tanulmányozni az egymást követő időszakok árnyékárainak arányait is, mert ezekből meghatározható a termékenként különböző és időszakról-időszakra változó ,,diszkontráták'' együttese.

Hasznos lesz tanulmányozni az egalizálódás folyamatát, az árnyékárrendszerhullámzását az iteráció során. E megfigyelés sok mindent feltárhat a népgazdasági terv biztosabb, más tervelőirányzattól viszonylag függetlenebb, s a más tervelőirányzatoktól erősebben függő részeire vonatkozóan.

5. Mint említettük, modellünk gazdaságpolitikai adatait a ,,hagyományos módon'' kidolgozott eredeti tervből vesszük át. Ezen túlmenően, ezt az eredeti tervet választhatjuk az iteráció kiinduló programjaként. Az iteráció első lépéseiből kitűnik majd, hogy az eredeti terv *reális-e?* Amennyiben a szektorprogramokban megjelennek fiktív (nem reális szabad import) változók is, úgy az eredeti terv nem volt egyensúlyban — s a ,,kétszintű tervezés'' további lépései hozzák egyensúlyba. Amennyiben azonban a kétszintű tervezés során a későbbi lépésekben nem sikerül a fiktív változókat kiküszöbölni, úgy ez arra figyelmeztet: a gazdaságpolitikai adatokban ellentmondás van.

A ,,kétszintű tervezés'' ilymódon módot ad az eredeti terv kritikus felülvizsgálatára, esetleges ellentmondásainak felismerésére, kijavítására. Ahogy közeledünk a központi direktívák árnyékárainak egalizálódásához (tehát pl. a Q_{it} extern fogyasztás TKI árnyékárainak megközelítően pontos ismeretéhez) úgy nyerünk további információkat az eredeti tervből átvett gazdaságpolitikai adatok kritikai értékeléséhez. (Pl. annak eldöntéséhez, nem lenne-e célszerű az extern fogyasztás más szerkezetéből kiindulni.)

6. Egy másik súlyos probléma, amelyet szintén csak megemlíthetünk: a társadalom *időbeli preferenciái*nak kifejezésre juttatása a modellben. Ezt részben megkerüljük azzal, hogy minden időszakra előírjuk az extern fogyasztást (természetesen úgy, hogy az időszakról-időszakra növekedjék, a szerkezetében a szükséges módon változzék). Nem közömbös azonban, hogy a programozás eredményeképpen jelentkező többlet-hozam mikor merül fel, korábban-e vagy

[21] Lásd erről pl. P. A. SAMUELSON [22] és A. P. LERNER [16] művét.

későbben. Célszerű lehet tehát nem egyszerűen az összes hozamok összegét maximalizálni az egész tervperiódusra, hanem azok valamilyen diszkontált összegét.

A másik nehéz kérdés *a tervperiódus véges voltá*val függ össze. Modellünk fent leírt szerkezete azzal a veszéllyel járhat, hogy csupán olyan beruházásokat irányoz majd elő a program, amelyek hozama még a tervperiódusban jelentkezik, s nem biztosítjuk az átmenetet a tervperiódus utáni időszakra. A kérdést ebből a szempontból csak a végtelen időszakra vonatkozó tervezés oldaná meg, amelyre azonban más meggondolások — főképpen a numerikus adatmeghatározással kapcsolatos nehézségek — miatt egyelőre nem akartunk rátérni. Éppen ezért, megközelítésként, úgy is mondhatnánk: kompromisszumként, a következő megoldást választottuk:

Az extern fogyasztás, Q_{it}, szükségletei közé bevesszük az úgynevezett „átmenő beruházások", a tervperiódus utáni időre áthúzódó beruházási tevékenységek igényeit is. Az erre vonatkozó becsléseket, más támpont híján, ugyancsak az eredeti tervből vesszük át. Tisztában vagyunk e megoldás problematikus vonásaival, s ezért a kérdést tovább vizsgáljuk.

7. Konkrét modellünk egyik legproblematikusabb vonása: a *célfüggvény* közgazdasági tartalma. Inkább csak példaképpen szerepel az itteni leírásban a külkereskedelmi mérleg optimalizálása mint optimum-kritérium. A problémáról tartott magyarországi vitákban felmerültek más elgondolások is. Pl. az összmunkaráfordítás minimalizálása. Vagy: az adott szerkezetű extern fogyasztás maximalizálása.[22] Mindkét esetben a kereskedelmi mérleggel kapcsolatos gazdaságpolitikai előirányzatokat a feltételi rendszerbe kell beépíteni.

Cikkünkben nem kívánunk ebben a kérdésben határozottan állást foglalni; ez még sokoldalú elméleti és gyakorlati vizsgálatot igényel. Mindenesetre az első, kísérleti számításoknál célszerű lesz párhuzamosan többféle célfüggvénnyel számolni, s az eredményeket együttesen elemezni.

Befejezés

Mint az 1.3 szakaszban már említettük, e dolgozat keretében nem foglalkoztunk azzal a kérdéssel, hogyan lehet alkalmazni az általános modellben kidolgozott felbontási és iteratív megoldási algoritmust általános lineáris programozási feladatokra. Evvel a kérdéssel Lipták T. sajtó alatt levő [18] dolgozata foglalkozik. Ugyanitt található a módszer általánosítása nemlineáris esetekre is.

Világos, hogy ha valamilyen konkrét modell adott felbontása megfelel az 1. részben szereplő feltételezéseknek, tehát az eredeti lineáris programozási feladat megoldható, a belőle származó poliedrikus játék pedig reguláris, minden további nélkül alkalmazhatóvá válik az eljárás. Ez a helyzet például akkor, ha az eredeti feladat (1.1) alakú kanonikus formájában az $\mathbf{A}$ mátrix és a $\mathbf{b}$ vektor nemnegatívak. Tetszőleges felbontás után az összes értékelhető központi programok halmaza egy pozitív ortánsban fekvő korlátos halmaz,

[22] Ezt a célfüggvénytípust javasolja [10] könyvében L. V. Kantorovics. Ha a q_{it} arányok fejezik ki az extern fogyasztás szerkezetét a t időszakaszban ($q_{it} \geqq 0$, $i = 1, \ldots, n$; $q_{1t} + \ldots + q_{nt} = 1$; $t = 1, \ldots, T$), akkor konkrét modellünk TKI alakját, majd ennek megfelelően a többi alakot is úgy kellene módosítani, hogy (2.12)-ben Q_{it} helyett $q_{it}J_t$ szerepelne ($i = 1, \ldots, n; t = 1, \ldots, T$), (2.17) helyett pedig $\lambda_1 J_1 + \ldots + \lambda_T J_T \to \max!$ ahol λ_t alkalmas diszkontáló tényező ($t = 1, \ldots, T$).

a keletkező poliedrikus játék tehát reguláris. A központi programozás (2.46) alakú független részprogramozásokra esik szét, amelyek mind (a maximális szektorárnyékár kiválasztásával) triviálisan megoldhatók. Lényegében ezt az észrevételt használták fel a [19] dolgozatban, amelyben az általános iteratív eljárást a magyar pamutszövet-kivitel rövidlejáratú optimumszámítására alkalmazták. Hasonló alkalmazási területként kínálkozik a regionális tervezés problémája: itt a szektoroknak egy-egy földrajzi régió felelne meg.[23]

Befejezésül röviden összefoglaljuk a kétszintű tervezés módszerével kapcsolatos kutatásaink további irányait:

1. Matematikai, számítástechnikai vonatkozású kutatásaink elsősorban annak tisztázására irányulnak: hogyan lehetne a ,,kétszintű tervezés'' során a konvergenciát gyorsítani. Ezzel kapcsolatban numerikus kísérleteket végzünk. Külön tanulmányozásra szorul, vajon a konkrét modell esetében nem használhatók-e fel a konvergencia gyorsítására egyébként rendelkezésre álló közgazdasági információk.

2. A numerikus kísérletek közben megkezdődött a konkrét modell gyakorlati alkalmazásának előkészítése. Az Országos Tervhivatal ezt a módszert is fel akarja használni a távlati makroökonómiai tervek jobb megalapozására. Természetesen hangsúlyozni kell, hogy e számítások ma még csak kísérleti jellegűek; a tudományos kutatás stádiumában vannak, s csak fokozatosan válhatnak a tervezés állandóan alkalmazott eszközeivé.

Bízunk abban, hogy a számítástechnikai problémák megoldása után a módszer széles körben kerülhet alkalmazásra.

(Beérkezett: 1963. II. 27.)

IRODALOM

[1] Brown, G. W.: ,,Some notes on computation of games solutions''. *RAND Corporation* D-436, 1949.
[2] Brown, G. W.: ,,Iterative solution of games by fictitious play''. Lásd: [11], 374—376.
[3] Dantzig, G. B. and Wolfe, Ph.: ,,Decomposition principle for linear programs''. *Operations Research* **8** (1960) 101—111.
[4] Dantzig, G. B. and Wolfe, Ph: ,,The decomposition algorithm for linear programs''. *Econometrica* **29** (1961) 767—778.
[5] Frisch, R.: *A survey of types of economic forecasting and programming, and a brief description of the Oslo Channel Model.* Memorandum from the Institute of Economics, University of Oslo, 1961.
[6] Gerő M.: ,,Az 1965. évi sakktáblamérleg''. *Közgazdasági Szemle* **8** (1960) 1156—1168.
[7] Goldman, A. J.: ,,Resolution and separation theorems for polyhedral convex sets''. Lásd: [15], 41—51.
[8] Goldman, A. J. and Tucker, A. W.: ,,Theory of linear programming''. Lásd: [15], 53—97.
[9] Karlin, S.: *Mathematical methods and theory in games, programming and economics. Vol. I.: Matrix games, programming, and mathematical economics.* Addison-Wesley, Reading (Mass. USA)—London, 1959.
[10] Канторович Л.В.: *Экономический расчёт наилушего использования ресурсов.* Издательство АН СССР, Москва, 1959.
[11] Koopmans, T. C. (editor): *Activity analysis of production and allocation.* Cowles Commission Monographs No. 13. Wiley-Chapman, New York—London, 1951.
[12] Kornai J.: *A beruházások matematikai programozása.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1962.

[23] Az É. M. Számítástechnikai és Ügyvitelgépesítési Vállalat munkájának keretében Lipták T. kidolgozott ilyen modellt, ,,Üzemtelepítéssel és termelési program kialakításával összekapcsolt szimultán szállítási probléma megoldása kétszintű programozással'' címmel (kéziratban).

[13] KORNAI J. és LIPTÁK T.: *Kétszintű tervezés. Matematikai programozási módszer a népgazdasági terv javítására.* A MTA Számítástechnikai Központja, Budapest, 1962 (sokszorosított).

[14] KORNAI J.: „Kétszintű" tervezés (Matematikai módszer a népgazdasági terv javítására). *Közgazdasági Szemle* **9** (1962) 1429—1443.

[15] KUHN, H. W. and TUCKER, A. W. (editors): *Linear inequalities and related systems.* Annals of Mathematics Studies No. 38. Princeton (N. J. USA), 1956.

[16] LERNER, A. P.: *The economics of controll.* MacMillan, New-York, 1949.

[17] LIPTÁK T.: *Kétszintű tervezés (Módosított matematikai rész).* A MTA Számítástechnikai Központja, Budapest, 1962 (sokszorosított).

[18] LIPTÁK T.: „Two level programming." *Proceedings of the Colloquium on the Application of Mathematics in Economics* (Budapest, 18—22 june, 1963). Publishing House of the Hungarian Academy of sciences, Budapest, 1963. (sajtó alatt).

[19] LIPTÁK T. és NAGY A.: *A magyar pamutszövet-kivitel rövidlejáratú optimumszámításának modellje.* Hungarotex Textilkiviteli Vállalat—Magyar Kereskedelmi Kamara, Budapest, 1962 (sokszorosított).

[20] MCKINSEY, J. C. C.: *Introduction to the theory of games.* The RAND series, McGraw-Hill, New York—Toronto—London, 1952.

[21] ROBINSON, J.: „An iterative method of solving a game". *Annals of Mathematics* **54** (1951) 296—301.

[22] SAMUELSON, P. A.: *Foundations of economic analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1947.

[23] SUZUKI, Y.: „Note on linear programming". *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **10** (1959) 89—105.

[24] TRZECIAKOWSKI, W.: *The modell of optimization of foreign planned economy and its applications.* Warsawa, 1961 (sokszorosított).

[25] WOLFE, PH.: „Determinateness of polyhedral games". Lásd: [15] 195—198.

ПЛАНИРОВАНИЕ НА ДВУХ УРОВНЯХ: МОДЕЛЬ ИЗ ОБЛАСТИ ТЕОРИИ ИГР И ИТЕРАТИВНЫЙ РАСЧЕТНЫЙ МЕТОД К РЕШЕНИЮ ПЕРСПЕКТИВНЫХ ЗАДАЧ НАРОДНОХОЗЯЙСТВЕННОГО ПЛАНИРОВАНИЯ*

J. KORNAI и T. LIPTÁK

Резюме

С помощью хорошо известного алгоритма симплексного метода или выработанными до нынешнего времени способами разложения (DANTZIG и WOLFE [2], [3]) задачи линейного программирования в масштабе народного хозяйства, пригодные к решению проблем перспективного планирования, были неразрешимы, по крайней мере, в отечественных условиях. Исходя из этого мы разработали новый алгоритм для решения задач такого типа, обеспечивающий в конечных шагах решение с любой точностью.

В конкретной задаче планирования мы представляем народное хозяйство как совокупность некоторого количества секторов, каждый из которых несёт ответственность за производство того или другого продукта.

* Первый вариант метода, изложенного в данной работе, авторы сообщили в мае 1962 года, в размноженной форме [13]. T. LIPTÁK в октябре 1962 г. сообщил новый вариант математической части [17]. Экономическим изложением и разбором занимается J. KORNAI [14]. Зачатки «общей модели» общей части расчётного метода находятся уже и в работе T. LIPTÁK-а и A. NAGY-а, выходившей в свет в размноженной форме. Находящаяся в печати работа T. LIPTÁK-а [18] обобщает данный метод планирования к разложению общих задач линейного программирования и к решению их путём фиктивного проигрывания, а также к задачам нелинейного характера. Эта работа была предложена на Коллоквии по Приложению Математики к Вопросам Экономии, Будапешт, 18—22, Юня, 1963. г.

Деятельность секторов охватывает не только производство и капиталовложение, но и возможный вывоз или ввоз данного продукта. Секторы в своей деятельности могут использовать и продукты других секторов в виде материальных расходов, а также известное количество рабочей силы. К тому же деятельность отдельных секторов может быть подчинена специальным секторным ограничениям по отношению производства и внешнеторгового баланса продуктов.

Деятельность секторов координируется центром. Центр задаёт для каждого сектора задачу снабжения относительно его продукта и обеспечивает для него некоторые ограниченные материальные ресурсы из продуктов, произведённых другими секторами, а также рабочую силу в известном количестве, то есть определяет рамки производства. Совокупность всех этих факторов составляет центральный план. Подходящие центральные условия обусловливают равновесие народнохозяйственного продуктового баланса в случае осуществимости центрального плана, а также заботятся о том, чтобы общее количество предоставляемой отдельным секторам рабочей силы не выходило за рамки полной мощности народного хозяйства.

Компоненты центрального плана, касающиеся одного сектора, в другом плане появляются как ограничения ресурсов в условиях той задачи линейного программирования, которая охватывает лищь деятельность данного сектора, в то время, как роль максимизируемой секторной целевой функции играет девизный доход его деятельности. На основе вышесказанного цель перспективного народнохозяйственного планирования сформулируется следующим образом: следует выработать такой осуществимый центральный план, при котором сумма максимальных целевых функций секторов принимает максимальную величину. Данная задача, в отличии от исходной *полной центральной информационной* задачи (в дальнейшем сокращённо задача ПЦИ), представляемой лишь в виде линейного программирования огромного размера, называется нами задачей на двух уровнях.

В двойственном варианте секторных задач множество допустимых систем оценок («shadow prices») не зависит от центральных директив: они появляются в максимизируемой целевой функции только коэффициентами оценок соответствующих условий. Можно определить игру двух лиц в нормальной форме, с нулевой суммой, в которой один из игроков — центре, а другой — коллектив секторов. Стратегиями центра могут быть допустимые центральные планы, а стратегией коллектива секторов — допустимые совокупности систем секторных оценок. Цена этой полиэдральной игры (Wolfe [25]) — максимальный народнохозяйственный девизный доход (оптимум задачи ПЦИ), а оптимальной стратегией (или оптимальными стратегиями) центра является (являются) тот центральный план (те центральные планы), при котором (которых) сумма секторных оптимумов принимает максимальную величину.

Мы решим вышеопределённую игру методом фиктивного проигрывания Brown-а и Robinson-а [1], [2], [21]. При этом, исходя из любого центрального плана, секторы разрешают свою двойственную задачу программирования, и оценки намеченной задачи снабжения, оценки ограничения материальных ресурсов, а также оценку ограничения ресурсов рабочей силы они докладывают центру. Из этих оценок центр составляет функцию цели, максимирует её на множестве допустимых центральных планов. Эти центральные планы при приведении оценок в порядок разлагаются на простые микропланы. Центр смешивает новый центральный план со старым в пропорции 1:1, и возвращает его секторам, они снова оценивают его, и новые оценки, смешивая со старыми в пропорции 1:1, опять докладывает центру. Итерирование подробным образом продолжается, но пропорция смешивания, в N-м ходе итерации, будет 1:(N — 1). При этом центр следит за максимальным значением функции цели в центральных планах, а также за суммой минимальных значений функции цели в секторных программах: последнее, низшее значение всегда меньше; предыдущее, верхнее значение всегда больше оптимума задачи ПЦИ. Если эти два значения попадут предписанную близость друг к другу, итерирование можно закончить, из оптимальных оценок самых последних секторных планов простым переводом получаются оптимальные секторные планы, совокупность которых является решением, оптимальным планом исходной задачи, задачи перспективного планирования народного хозяйства. В то же время оценки «спроса» и «предложения» товаров (оценка продовольственного обязательства соответствующего сектора и оценки ограничения материальных ресурсов из продуктов других секторов, используемых к производству данного продукта), а также оценки ограничения ресурсов рабочей силы в отдельных секторах нивелируются в ходе итерирования.

Вышеупомянутая конкретная модель и расчётный метод излагаются во второй части нашей статьи. Преобразование задачи ПЦИ в задачу на двух уровнях, а потом в полиэдральную игру, определение условий регулярности, необходимых к сходимости расчётного процесса, а кроме этого и доказательства оказалось целосообразным проводить на модели более общей, потому что обозначения, понятия и доказательства становились таким образом более ясными. Первая часть статьи занимается этой общей моделью.

Если каноническая форма задачи ПЦИ (в прямой и двойственной формах соответственно)

$$(1) \qquad \mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{c}'\mathbf{x} \to \max! \quad \text{и} \quad \mathbf{y}'\mathbf{A} \geqq \mathbf{c}',\ \mathbf{y} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{y}'\mathbf{b} \to \min!$$

и после разложения на секторов в форме

$$(2) \qquad \mathbf{A} = [\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n], \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}' = [\mathbf{c}_1', \ldots, \mathbf{c}_n'].$$

(1) переписывается в виде

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \leqq \mathbf{b} \\ \mathbf{x}_i \geqq \mathbf{0},\ i = 1, \ldots, n \\ \sum_{i=1}^{n} \mathbf{c}_i' \mathbf{x}_i \to \max! \end{array} \right\} \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}'\mathbf{A}_i \geqq \mathbf{c}_i',\ i = 1, \ldots, n \\ \mathbf{y} \geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{y}'\mathbf{b} \to \min! \end{array} \right\}$$

соответственно, то под *центральным планом* понимаем вектор

$$(4) \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix}$$

размера $\mathbf{b}$, состоящий из подвекторов $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$, и подлежащий условиям разложения ограничений

$$\mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_n = \mathbf{b}\,. \tag{5}$$

i-я секторная задача при (5) является задачей линейного программирования

$$\mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \leqq \mathbf{u}_i,\ \mathbf{x}_i \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{c}_i' \mathbf{x}_i \to \max! \text{ и } \mathbf{y}_i' \mathbf{A}_i \geqq \mathbf{c}_i',\ \mathbf{y}_i \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{y}_i' \mathbf{u}_i \to \min! \tag{6}$$

соответственно. Если при каком-то центральном плане каждая секторная задача разрешима, то $\mathbf{u}$ называется *оценимым центральным планом.* Доказываем, что множество $\dot{U}$, состоящие из оценимых центральных планов, многогранное выпуклое множество, которое при разрешимой задачи ПЦИ является не пустым, и в виде

$$\bigcup_{\mathbf{u} \in \dot{U}} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} : \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \leqq \mathbf{u}_i, \mathbf{x}_i \geqq \mathbf{0},\ i = 1, \ldots, n \right\} = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \leqq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\} \tag{7}$$

генерирует множество осуществимых ПЦИ планов.

Пусть будет U данным многогранным выпуклым подмножеством множества $\dot{U}$, обладающим генерирующим свойством в виде (7). *Задачей на двух уровнях* понимается

а) решение вогнутого программирования

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} \in U,\ \sum_{i=1}^{n} \max_{\substack{\mathbf{x}_i \\ \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \leqq \mathbf{u}_i \\ \mathbf{x}_i \geqq \mathbf{0}}} \mathbf{c}_i' \mathbf{x}_i \to \max! \tag{8}$$

б) относительно элементов множества U^*, состоящего из оптимальных по формуле (8) центральных планов $\mathbf{u}^*$ решение секторных задач

$$\mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \leqq \mathbf{u}_i^*,\ \mathbf{x}_i \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{c}_i' \mathbf{x}_i \to \max! \qquad i = 1, \ldots, n \tag{9}$$

и наконец

в) определение множества

$$\bigcup_{\mathbf{u}^* \in U^*} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} : \mathbf{x}_i \in X_i^*(\mathbf{u}_i^*),\ i = 1, \ldots, n \right\} \tag{10}$$

состоящего из планов ПЦИ элементов множества $X_i^*(\mathbf{u}_i^*)$ секторных планов $\mathbf{x}_i^*(\mathbf{u}_i^*)$, оптимальных по формуле (7).

ТЕОРЕМА 1. *При разрешимости задачи ПЦИ вышеопределенная задача на двух уровнях тоже разрешима, и множество (10) совпадает со множеством оптимальных ПЦИ планов. Максимальное значение целевой функции (8) равно оптимальному значению Ф задачи ПЦИ.*

Под полиэдральной задачей (U, V) *из задачи ПЦИ или из задачи на дву уровняух* понимаем игру двух лиц в нормальной форме с нулевой суммой, в которой один из игроков центр, и его множество стратегий многогранное выпуклое множество U, состоящее из осуществимых центральных планов, а другой игрок — коллектив секторов, у них множество стратегий — многогранное выпуклое множество

$$\text{(11)} \qquad \mathsf{V} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n \end{bmatrix} : \mathbf{y}_i' \mathbf{A}_i \geqq \mathbf{c}_i', \ \mathbf{y}_i \geqq \mathbf{0}, \ i = 1, \ldots, n \right\}$$

состоящее из допустимых совокупностей систем допустимых секторных оценок, и наконец платёжной функцией является билинейная функция $\mathbf{v}'\mathbf{u}$ ($\mathbf{u} \in \mathsf{U}$, $\mathbf{v} \in \mathsf{U}$), определённая на прямом произведении этих множеств. Под i-м компонентом центральной стратегии $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1', \ldots, \mathbf{u}_n']' \in \mathsf{U}$ и секторной стратегии $\mathbf{v} = [\mathbf{y}_1', \ldots, \mathbf{y}_n']' \in \mathsf{V}$ понимаем векторы $\mathbf{u}_i$ и $\mathbf{y}_i$ ($i = 1, \ldots, n$) соответственно.

ТЕОРЕМА 2. *Полиэдральная игра, происходящая из разрешимой задачи ПЦИ тоже разрешима, и значение её равно оптимуму Ф задачи ПЦИ. Оптимальные стратегии центрального игрока — оптимальные центральные планы задачи на двух уровнях. Среди оптимальных стратегий игрока-коллектива секторов всегда имеется стратегия, секторные компоненты которой совпадают. Секторная стратегия такого типа оптимальна тогда и только тогда, если она является оптимальной противной стратегией какой-то центральной стратегии. В таком случае общий компонент является системой оптимальных ПЦИ оценок, и наоборот.*

По аналогии оценимых центральных планов называем *оценимой совкупность систем секторных оценок* секторную стратегию $\mathbf{v} \in \mathsf{V}$, если имеется против неё оптимальная противная стратегия центра, то есть линейное программирование

$$\text{(12)} \qquad \mathbf{u} \in \mathsf{U}, \ \mathbf{v}'\mathbf{u} \to \max!$$

разрешимо. Мы будем называть полиэдральную игру (U, V) *регулярной* в том случае, если каждая её секторная стратегия оценима. Мы доказываем, что стратегически регулярная полиэдральная игра приводима к полиэдральной игре ($\mathbf{U}^\triangle$, $\mathbf{V}^\triangle$) где $\mathbf{U}^\triangle$ и $\mathbf{V}^\triangle$ являются (ограниченными) выпуклыми полиэдрами, происходившими выпуклой оболочкой краевых точек многогранных выпуклых множеств U и V соответственно [7]. А это изоморфно конечной игре с платёжной матрицей $\mathbf{V}'\mathbf{U}$.

Под *регулярным фиктивным проигрыванием* понимаемпоследовательное определение элементов последовательностей стратегий $\{\mathbf{u}^*\langle N\rangle\}$ и $\{\mathbf{v}^*\langle N\rangle\}$ из $\mathbf{U}^\triangle$ и $\mathbf{V}^\triangle$ соответственно последующей рекурсии. Выбираем любое $\mathbf{u}^*\langle 1\rangle \in \mathbf{u}^\triangle$. Пусть будет $\mathbf{u}^{(N)} \in \mathbf{U}^\triangle$ одним из решений разрешимого программирования

$$\text{(13)} \qquad \mathbf{u} \in \mathsf{U}, \ \mathbf{v}^*\langle N-1\rangle'\,\mathbf{u} \to \max!$$

и

$$\mathbf{u}^*\langle N\rangle = \frac{N-1}{N}\mathbf{u}^*\langle N-1\rangle + \frac{1}{N}\mathbf{u}^{(N)}$$

если $N = 2, 3, \ldots$. Соответственно $\mathbf{v}^{(N)} \in \mathbf{V}^{\triangle}$ будет решением разрешимого линейного программирования

$$\text{(14)} \qquad \mathbf{v} \in \mathsf{V}, \ \mathbf{v}'\mathbf{u}^*\langle N\rangle \to \min!$$

и

$$\mathbf{v}^*\langle N\rangle = \frac{N-1}{N}\mathbf{v}^*\langle N-1\rangle + \frac{1}{N}\mathbf{v}^{(N)},$$

где $N = 2, 3, \ldots$, и $\mathbf{v}^*\langle 1\rangle = \mathbf{v}^{(1)}$. Максимальное значение $\Phi^*\langle N\rangle$ целевой функции (13) получается как *верхнее значение в период* N $(N = 2, 3, \ldots)$, а минимальное значение $\varphi^*\langle N\rangle$ целевой функции (14) как низшее значение в период N $(N = 1, 2, \ldots)$. Показываем, что

$$\text{(15)} \qquad \Phi^*\langle N\rangle \geqq \Phi, \quad N = 2, 3, \ldots \quad \text{и} \quad \varphi^*\langle N\rangle \leqq \Phi, \quad N = 1, 2, \ldots$$

и при регулярной полиэдральной игре (U, V)

$$\text{(16)} \qquad \lim_{N\to\infty} \Phi^*\langle N\rangle = \lim_{N\to\infty} \varphi^*\langle N\rangle = \Phi,$$

где Φ оптимум задачи ПЦИ. К тому же предельные точки последовательностей $\{u^*\langle N\rangle\}$ и $\{v^*\langle N\rangle\}$ являются оптимальными стратегиями.

Положим

$$\text{(17)} \qquad \Phi^{**}\langle N\rangle = \min\{\Phi^*\langle 2\rangle, \ldots, \Phi^*\langle N\rangle\} \qquad N = 2, 3, \ldots$$

и N_δ наименьшее целое число, при котором $\Phi^{**}\langle N_\delta\rangle - \varphi^*\langle N_\delta\rangle \leqq \delta$ (или $\Phi^{**}\langle N_\delta + 1\rangle - \varphi^*\langle N_\delta\rangle \leqq \delta$). Под *$\delta$-остановкой* регулярного фиктивного проигрывания понимается остановка итерирования после шага N_δ (или $N_\delta + 1$) и определение оптимальных секторных планов при центральном плане $\mathbf{u}^*\langle N_\delta\rangle$. Осуществимый ПЦИ план $\mathbf{x}^{\delta *}$ называется *δ-оптимальным*, если

$$\text{(18)} \qquad \Phi - \delta \leqq \mathbf{c}'\mathbf{x}^{\delta *} \leqq \Phi\,.$$

ТЕОРЕМА 3. *Если полиэдральная игра, происходившая из разрешимой ПЦИ задачи, регулярная, то задача ПЦИ в конечных шагах разрешима с любой точностью регулярным фиктивным проигрыванием в том смысле, что при любом положительном δ δ-остановка приводит к δ-оптимальному плану задачи ПЦИ в конечных шагах. Если кроме этого регулярная полиэдральная игра единозначно разрешима для коллектива секторов, то в последовательностях стратегий секторов $\{\mathbf{v}^*\langle N\rangle\}$ секторные компоненты «нивелируются»: при $N \to \infty$ каждый компонент задачи ПЦИ сходится к оптимальной системе оценок.*

TWO-LEVEL PLANNING: A GAME-THEORETICAL MODEL AND ITERATIVE COMPUTING PROCEDURE FOR SOLVING LONG-TERM PLANNING PROBLEMS OF THE NATIONAL ECONOMY*

by

J. KORNAI and TH. LIPTÁK

Abstract

The familiar simplex algorithm and the decomposition procedures so far worked out (DANTZIG and WOLFE [3], [4]), did not make it possible — at least under Hungarian circumstances — to compute linear programming problems suited to solving long-term planning problems of the national economy. Setting out from this fact, a new algorithm has been proposed which provides a solution to within any prescribed degree of accuracy of such problems, in a finite number of steps.

In the concrete planning problem the national economy is imagined as being divided into an appropriate number of sectors, each of which is responsible for producing one product. The activities of the sectors, beyond reproductive and investment activities, also comprise the possible exports and imports of the product concerned. The activities of the sectors may, in the form of the consumption of materials, require products made by the other sectors, moreover labour power. Beyond this, within each sector there may be special sector conditions in connection with the production and foreign trade balance of the product.

The activities of the sectors are intended to be coordinated by a centre. The latter allocates to each sector a supply target with regard to its own product, material quotas for each of the products of other sectors, moreover a manpower quota. These together make up the central program. Suitable central conditions guarantee that with the feasible central programs the product balance of the national economy should be in equilibrium, furthermore, the manpower quotas allocated to the sectors should not exceed the overall manpower fund of the national economy.

The components of the central program relating to a sector appear as constraints bounds in the conditions of a linear programming shceme comprising only the activities of that sector, while the sectoral objective function to be maximized, is the sum of the foreign exchange returns of these activities. Hence the aim of long-term planning for the national economy, may be formulated as follows: To construct a feasible central program, such that the sum of the maximal value of the sectoral objective functions should be a maximum. This problems is distinguished from the original *overall central information*

---

* The authors published the first version of the method discussed in this paper in May, 1962, in duplicated form [13]. In October, 1962, TH. LIPTÁK published a new version of the mathematical part [17]. A paper by J. KORNAI [14] discusses and analyses the method from the economic point of view. An earlier version of the „general model" which discusses the general part of the computing procedure, may also be found in a duplicated paper by TH. LIPTÁK and A. NAGY [19]. The generalization of the above planning procedure for the decomposition of large-scale general linear programming problems and their solution by fictitious playing, moreover the generalization for the non-linear case are treated in a paper of TH. LIPTÁK [18] (in print) which was delivered in the Colloquium on the Application of Mathematics in Economics, held in Budapest, 18—22 june, 1963.

problem (OCI problem for short), which may be formulated as a large-scale linear programming problem, by being called the *two-level problem*.

In the dual version of the sector problems the set of feasible shadow price systems does not depend on central program — the latter only appear in the dual objective function (which is to be minimized) as coefficients of the shadow prices of the appropriate constraints. It is possible to define a zero-sum two-person game in the normal form in which one of the players is the centre, the other is the team of sectors. The strategies of the centre are the feasible central programs, those of the team of sectors are the teams of feasible sectoral shadow price systems. The value of this polyhedral game (Wolfe [25]) is the maximum of the foreign exchange return of the national economy (the OCI optimum), while the optimal strategies of the centre are those central programs where the sum of the sectoral optima is a maximum.

The game which has thus been defined is solved by the method of fictitious play according to Brown [1], [2] and Robinson [21]. During the course of this, setting out from an arbitrary feasible central program, the sectors solve their dual programming problems and report back to the centre the sectoral shadow prices of the supply assignment, the materials and the manpower quotas. From these the centre constructs an objective function for itself which is to be maximized on the set of feasible central programs. This central programming problem is decomposed into simple ,,micro-programming problems'' that may be solved by arranging the shadow prices in the order of magnitude. The new central program is mixed with old in the proportion of 1 : 1 and again sent down to the sectors, which once more solve their dual programming problems, and mixing the new shadow prices with the old in the proportion of 1 : 1, send them back to the centre and so on. The iteration is continued in a similar way, and the mixing proportion in the N-th phase of iteration will be $1 : (N - 1)$. In the meanwhile the centre notes the maximal values of the objective function achieved in the central programming and the sum of the minimal values of the dual objective functions achieved in the sector programming processes. The first, the upper optimum, provides an upper estimate for the OCI optimum, the second, the lower optimum, a lower estimate for it. When the two values have approached to each other within the prescribed accuracy, the iteration may be terminated and the team of the optimal sector programs which may be obtained by simple conversions from the optimal shadow prices of the last sector programming processes, provide the optimal solution of the long-term planning problem of the economy within the required accuracy. At the same time during the course of iteration the ,,supply'' and ,,demand'' shadow prices of the products (the shadow price of the supply target of the sector concerned and the shadow prices of its materials quotas of products from other sectors), moreover the shadow prices of the manpower quotas of the various sectors, are all ,,equalized''.

The above concrete model and computing procedure are discussed in Part 2 of the paper. It appeared advisable to carry out the transformation of the OCI problem into a two-level problem and subsequently into a polyhedral game, moreover to enunciate the regularity conditions necessary for the convergence of the computing procedure and to carry out the proofs, with respect to a somewhat more general model, for here the notation, terminology and proofs become more perspicuous. Part 1 of the paper is concerned with this general model.

If

$$\text{(1)} \quad \mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \mathbf{c}'\mathbf{x} \to \max! \quad \text{resp.} \quad \mathbf{y}'\mathbf{A} \geqq \mathbf{c}', \mathbf{y} \geqq \mathbf{0}, \mathbf{y}'\mathbf{b} \to \min!$$

are the canonical forms of the OCI problem (in primal-dual form), and (1) may, after decomposition into n sectors according to

$$\text{(2)} \quad \mathbf{A} = [\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n], \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}' = [\mathbf{c}_1', \ldots, \mathbf{c}_n']$$

be written as

$$\text{(3)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \leqq \mathbf{b} \\ \mathbf{x}_i \geqq 0, \ i = 1, \ldots, n \\ \sum_{i=1}^{n} \mathbf{c}_i' \mathbf{x}_i \to \max! \end{array} \right\} \text{ resp. } \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}'\mathbf{A}_i \geqq \mathbf{c}_i', \ i = 1, \ldots, n \\ \mathbf{y}' \geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{y}'\mathbf{b} \to \min! \end{array} \right\}.$$

then the *central program* is defined as the vector

$$\text{(4)} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix}$$

consisting of the component vectors $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ which are of the same size as $\mathbf{b}$ and satisfy the *partitioning condition*

$$\text{(5)} \quad \mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_n = \mathbf{b}.$$

The *i-th sector problem* under (4) is the linear programming problem

$$\text{(6)} \quad \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \leqq \mathbf{u}_i, \ \mathbf{x}_i \geqq \mathbf{0}, \ \mathbf{c}_i' \mathbf{x}_i \to \max! \ \text{resp.} \ \mathbf{y}_i' \mathbf{A}_i \geqq \mathbf{c}_i', \ \mathbf{y}_i \geqq \mathbf{0}, \ \mathbf{y}_i' \mathbf{u}_i \to \min!.$$

If all the sector problems are solvable under a central program $\mathbf{u}$, then $\mathbf{u}$ is called an *evaluable central program*. It is shown that the set $\dot{\mathrm{U}}$ consisting of evaluable central programs is a convex polyhedral set, which is in the case of a solvable OCI problem non-void and *generates* the set of feasible OCI programs in the form

$$\text{(7)} \quad \bigcup_{\mathbf{u} \in \dot{\mathrm{U}}} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} : \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \leqq \mathbf{u}_i, \ \mathbf{x}_i \geqq \mathbf{0}, \ i = 1, \ldots, n \right\} = \{\mathbf{x} : \mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b}, \ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\}.$$

Let U be a fixed, non-void, convex polyhdral subset of $\dot{\mathrm{U}}$, which also possesses the generating property of the form of (7). The *two-level problem* belonging to the sector decomposition (2)—(3) and the fixed U, is understood to mean (i) the solution of the concave programming problem

$$\text{(8)} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} \in \mathrm{U}, \ \sum_{i=1}^{n} \max_{\substack{\mathbf{x}_i \\ \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \leqq \mathbf{u}_i \\ \mathbf{x}_i \geqq \mathbf{0}}} \mathbf{c}_i' \mathbf{x}_i \to \max!$$

(ii) the solution of the sector programming problems

(9) $$\mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \leqq \mathbf{u}_i^*, \quad \mathbf{x}_i \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{c}_i' \mathbf{x}_i \to \max!$$

for the elements of the set U^* consisting of those central programs $\mathbf{u}^*$ which were found optimal in (8); finally, (iii) the determination of the union

(10) $$\bigcup_{\mathbf{u}^* \in \mathsf{U}^*} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} : \mathbf{x}_i \in \mathsf{X}_i^*(\mathbf{u}_i^*), \quad i = 1, \ldots, n \right\}$$

of the sets constructed from the sets $\mathsf{X}_i^*(\mathbf{u}_i^*)$ consisting of the sector programs $\mathbf{x}_i^*(\mathbf{u}_i^*)$ which were found optimal in (9).

THEOREM 1. *In the case of a solvable OCI problem the above two-level problem is also solvable and the set* (10) *coincides with the set of optimal OCI programs. The maximum value of the objective function in* (8) *is equal to the optimum value* Φ *of the OCI problem.*

The polyhedral game (U, V) *derived from the OCI problem or from the two-level problem* is defined as being a zero-sum two-person game in the normal form, in which the maximizing player is the centre, with the convex polyhedral set U consisting of the feasible central programs as its set of strategies, while the minimizing player is the team of sectors, having the convex polyhedral set

(11) $$\mathsf{V} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n \end{bmatrix} : \mathbf{y}_i' \mathbf{A}_i \geqq \mathbf{c}_i', \quad \mathbf{y}_i \geqq \mathbf{0}, \quad i = 1, \ldots, n \right\}$$

consisting of the team of feasible sector shadow price systems as its set of strategies, moreover where the payoff function is the bilinear function $\mathbf{v}'\mathbf{u}$ ($\mathbf{u} \in \mathsf{U}$, $\mathbf{v} \in \mathsf{V}$). The i-th component of the *central strategy* $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1', \ldots, \mathbf{u}_n']'$ and of the *sector strategy* $\mathbf{v} = [\mathbf{y}_1', \ldots, \mathbf{y}_n']'$ is understood to be the vector $\mathbf{u}_i$ and $\mathbf{y}_i$, respectively.

THEOREM 2. *A polyhedral game derived from a solvable OCI problem is itself solvable, and its value equals the OCI optimum* Φ. *The optimal strategies of the centre player are the optimal central programs appearing in the two-level problem. The optimal strategies of the sector team player always include a strategy whose sector components are equal. This type of sector strategy is optimal if and only if it is the optimal counter-strategy to some central strategy. In this case the common component is an optimal OCI shadow price system and vice versa.*

Upon the analogy of the evaluable central program, let a sector strategy $\mathbf{v} = [\mathbf{y}_1', \ldots, \mathbf{y}_n']'$ be called an *evaluable sector strategy* if there is an optimal central counter-strategy opposite it, i.e. if the linear programming problem

(12) $$\mathbf{u} \in \mathsf{U}, \quad \mathbf{v}'\mathbf{u} \to \max!$$

is solvable. Let the polyhedral game (U, V) be called *regular* if all its sector strategies are evaluable. It is shown that a regular polyhedral game may be strategically reduced to the polyhedral game $(\mathbf{U}^\triangle, \mathbf{V}^\triangle)$, where $\mathbf{U}^\triangle$ and $\mathbf{V}^\triangle$ are (bounded) convex polyhedra, formed as the convex hull of the extreme points of the convex polyhedral sets U and V, respectively [7]. This in turn is isomorphic with the finite game having the payoff matrix $\mathbf{V}'\mathbf{U}$.

The *regular fictitious play* of a regular polyhedral game is understood to mean the successive determination of the elements of the strategy series $\{\mathbf{u}^*\langle N\rangle\}$ in $\mathbf{U}^\triangle$ and $\{\mathbf{v}^*\langle N\rangle\}$ in $\mathbf{V}^\triangle$ according to the following recursion. $\mathbf{u}^*\langle 1\rangle \in \mathbf{U}^\triangle$ may be arbitrarily chosen. Let $\mathbf{u}^{(N)} \in \mathbf{U}^\triangle$ be a solution of the solvable linear programming problem

$$\text{(13)} \qquad \mathbf{u} \in \mathsf{U}, \quad \mathbf{v}^* \langle N-1\rangle' \mathbf{u} \to \max!$$

and let

$$\mathbf{u}^*\langle N\rangle = \frac{N-1}{N}\mathbf{u}^*\langle N-1\rangle + \frac{1}{N}\mathbf{u}^{(N)} \text{ if } N = 2, 3, \ldots$$

Let $\mathbf{v}^{(N)} \in \mathbf{V}^\triangle$ be a solution of the solvable linear programming problem

$$\text{(14)} \qquad \mathbf{v} \in \mathsf{V}, \quad \mathbf{v}' \mathbf{u}^* \langle N\rangle \to \min!$$

and let

$$\mathbf{v}^*\langle N\rangle = \frac{N-1}{N}\mathbf{v}^*\langle N-1\rangle + \frac{1}{N}\mathbf{v}^{(N)}, \text{ if } N=2,3,\ldots$$

while $\mathbf{v}^*\langle 1\rangle = \mathbf{v}^{(1)}$. The maximal value $\Phi^*\langle N\rangle$ of the objective function in (13) is the *upper optimum of the N-th phase* ($N = 2, 3, \ldots$), while the minimal value $\varphi^*\langle N\rangle$ of the objective function in (14) is the *lower optimum of the N-th phase* ($N = 1, 2, \ldots$). It is shown that

$$\text{(15)} \qquad \Phi^* \langle N\rangle \geqq \Phi, \quad N = 2,3,\ldots \text{ and } \varphi^* \langle N\rangle \leqq \Phi, \quad N = 1,2,\ldots$$

and in the case of a regular polyhedral game

$$\text{(16)} \qquad \lim_{N\to\infty} \Phi^* \langle N\rangle = \lim_{N\to\infty} \varphi^* \langle N\rangle = \Phi,$$

where Φ is the OCI optimum. Moreover the limit points of the series $\{\mathbf{u}^*\langle N\rangle\}$ and $\{\mathbf{v}^*\langle N\rangle\}$ are optimal strategies.

Let

$$\text{(17)} \qquad \Phi^{**} \langle N\rangle = \min\{\Phi^* \langle 2\rangle, \ldots, \Phi^* \langle N\rangle\}, \quad N = 2, 3, \ldots$$

and N_δ be the smallest integer for which the difference $\Phi^{**}\langle N_\delta\rangle - \varphi^*\langle N_\delta\rangle$ (or $\Phi^{**}\langle N_\delta + 1\rangle - \varphi^*\langle N_\delta\rangle$) is no longer greater than the positive number δ. The *δ-termination* of the regular fictitious play is understood to mean the termination of the iteration after the N_δ-th (or $(N_\delta + 1)$-st) phase and the determination of the optimal sector programs under the central program $\mathbf{u}^*\langle N_\delta\rangle$. Let a feasible OCI program $\mathbf{x}^{\delta *}$ be called *δ-optimal*, if

$$\text{(18)} \qquad \Phi - \delta \leqq \mathbf{c}'\mathbf{x}^{\delta *} \leqq \Phi.$$

THEOREM 3. *If a polyhedral game derived from a solvable OCI problem is regular, then the regular fictitious play of the game will permit the OCI problem to be solved to an arbitrary degree of accuracy in a finite number of steps, in the sense that for an arbitrarily small positive δ the δ-termination will lead to a δ-optimal OCI program in a finite number of steps. If, moreover, the solution of the regular polyhedral game is unique for the sector team player the sector components are "equalized" in the sector strategy series $\{\mathbf{v}^*\langle N\rangle\}$: i.e. for $N \to \infty$ all the components will converge to the optimal shadow price system of the OCI problem.*

	$x^{repr}_{i,1,1}$	$\cdots$	$x^{repr}_{i,n_i^{repr},1}$	$x^{repr}_{i,1,1}$	$\cdots$	$x^{exp}_{i,n_i^{exp},1}$	$x^{imp}_{i,0,1,}$	$x^{imp}_{i,1,1}$	$\cdots$	$x^{imp}_{i,n_i^{imp},1}$	$\cdots$	$x^{repr}_{i,1,t}$	$\cdots$	$x^{repr}_{i,n_i^{repr},t}$	$x^{exp}_{i,1,t}$	$\cdots$	$x^{exp}_{i,n_i^{exp},t}$	$x^{imp}_{i,0,t}$	$x^{imp}_{i,1,t}$	$\cdots$	$x^{imp}_{i,n_i^{imp},t}$	$\cdots$	$x^{repr}_{i,1,T}$	$\cdots$	$x^{repr}_{i,n_i^{repr},T}$	$x^{exp}_{i,1,T}$	$\cdots$	$x^{exp}_{i,n_i^{exp},T}$	$x^{imp}_{i,0,T}$	$x^{imp}_{i,1,T}$	$\cdots$	$x^{imp}_{i,n_i^{imp},T}$	$x^{inv}_{i,1}$	$\cdots$	$x^{inv}_{i,n_i^{inv}}$	$\leqq$
$\pi_{i,1,1}$	$g^{repr}_{i,1,1,1}$	$\cdots$	$g^{repr}_{i,1,n_i^{repr}}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0																							$g^{inv}_{i,1,1,1}$	$\cdots$	$g^{inv}_{i,1,n_i^{inv},1}$	$p_{i,1,1}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$																							$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\pi_{i,i-1,1}$	$g^{repr}_{i,i-1,1,1}$	$\cdots$	$g^{repr}_{i,i-1,n_i^{repr},1}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0																							$g^{inv}_{i,i-1,1,1}$	$\cdots$	$g^{inv}_{i,i-1,n_i^{inv},1}$	$p_{i,i.1}$
$\pi_{i,1,1}$	-1	$\cdots$	-1	$+1$	$\cdots$	$+1$	-1	-1	$\cdots$	-1																							$-f^{inv}_{i,1,1}$	$\cdots$	$-f^{inv}_{i,n_i^{inv},1}$	$-p_{i,i,1}$
$\pi_{i,i+1,1}$	$g^{repr}_{i,i+1,1,1}$	$\cdots$	$g^{repr}_{i,i+1,n_i^{repr},1}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0																							$g^{inv}_{i,i+1,1,1}$	$\cdots$	$g^{inv}_{i,i+1,n_i^{inv},1}$	$p_{i,i+1,1}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$																							$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\pi_{i,n,1}$	$g^{repr}_{i,n,1,1}$	$\cdots$	$g^{repr}_{i,n,n_i^{repr},1}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0																							$g^{inv}_{i,n,1,1}$	$\cdots$	$g^{inv}_{i,n,n_i^{inv},1}$	$p_{i,n,1}$
$\omega_{i,1}$	$h^{repr}_{i,1,1}$	$\cdots$	$h^{repr}_{i,n_i^{repr},1}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0																							$h^{inv}_{i,1,1}$	$\cdots$	$h^{inv}_{i,n_i^{inv},1}$	$\omega_{i,1}$
$\vdots$																																				$\vdots$
$\pi_{i,1,t}$												$g^{repr}_{i,1,1,t,}$	$\cdots$	$g^{repr}_{i,1,n_i^{repr},t}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0												$g^{inv}_{i,1,1,t}$	$\cdots$	$g^{inv}_{i,1,n_i^{inv},t}$	$p_{i,1,t}$
$\vdots$												$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$												$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\pi_{i,i-1,t}$												$g^{repr}_{i,i-1,1,t,}$	$\cdots$	$g^{repr}_{i,i-1,n_i^{repr},t}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0												$g^{inv}_{i,i-1,1,t}$	$\cdots$	$g^{inv}_{i,i-1,n_i^{inv},t}$	$p_{i,i-1,t}$
$\pi_{i,i,t}$												-1	$\cdots$	-1	$+1$	$\cdots$	$+1$	-1	-1	$\cdots$	-1												$-f^{inv}_{i,1,t}$	$\cdots$	$-f^{inv}_{i,n_i^{inv},t}$	$-p_{i,i,t}$
$\pi_{i,i+1,t}$												$g^{rep}_{i,i+1,1,t,}$	$\cdots$	$g^{repr}_{i,i+1,n_i^{repr},t}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0												$g^{inv}_{i,i+1,1,t}$	$\cdots$	$g^{inv}_{i,i+1,n_i^{inv},t}$	$p_{i,i+1,t}$
$\vdots$												$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$												$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\pi_{i,n,t}$												$g^{repr}_{i,n,1,t,}$	$\cdots$	$g^{repr}_{i,n,n_i^{repr},t}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0												$g^{inv}_{i,n,1,t}$	$\cdots$	$g^{inv}_{i,n,n_i^{inv},t}$	$p_{i,n,t}$
$\omega_{i,t}$												$h^{repr}_{i,1,t,}$	$\cdots$	$h^{repr}_{i,n_i^{repr},t}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0												$h^{inv}_{i,1,t}$	$\cdots$	$h^{inv}_{i,n_i^{inv},t}$	$\omega_{i,t}$
$\vdots$																																				$\vdots$
$\pi_{i,1,T}$																							$g^{repr}_{i,1,1,T}$	$\cdots$	$g^{repr}_{i,1,n_i^{repr},1}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	$g^{inv}_{i,1,1,T}$	$\cdots$	$g^{inv}_{i,1,n_i^{inv},T}$	$p_{i,1,T}$
$\vdots$																							$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\pi_{i,i-1,T}$																							$g^{repr}_{i,i-1,1,T}$	$\cdots$	$g^{repr}_{i,i-1,n_i^{repr},1}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	$g^{inv}_{i,i-1,1,T}$	$\cdots$	$g^{inv}_{i,i-1,n_i^{inv},T}$	$p_{i,i-1,T}$
$\pi_{i,i,T}$																							-1	$\cdots$	-1	$+1$	$\cdots$	$+1$	-1	-1	$\cdots$	-1	$-f^{inv}_{i,1,T}$	$\cdots$	$-f^{inv}_{i,n_i^{inv},T}$	$-p_{i,i,T}$
$\pi_{i,i+1,T}$																							$g^{repr}_{i,i+1,1,T}$	$\cdots$	$g^{repr}_{i,i+1,n_i^{repr},1}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	$g^{inv}_{i,i+1,1,T}$	$\cdots$	$g^{inv}_{i,i+1,n_i^{inv},T}$	$p_{i,i+1,T}$
$\vdots$																							$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\pi_{i,n,T}$																							$g^{repr}_{i,n,1,T}$	$\cdots$	$g^{repr}_{i,n,n_i^{repr},1}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	$g^{inv}_{i,n,1,T}$	$\cdots$	$g^{inv}_{i,n,n_i^{inv},T}$	$p_{i,n,T}$
$\omega_{i,T}$																							$h^{repr}_{i,1,T}$	$\cdots$	$h^{repr}_{i,n_i^{repr},1}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	$h^{inv}_{i,1,T}$	$\cdots$	$h^{inv}_{i,n_i^{inv},T}$	$\omega_{i,T}$
$\varrho_{i,1}$	$+1$	$\cdots$	$+1$	-1	$\cdots$	-1	$+1$	$+1$	$\cdots$	$+1$		0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0		0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	$f^{inv}_{i,1,1}$	$\cdots$	$f^{inv}_{i,n_i^{inv},1}$	$R_{i,1}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\varrho_{i,t}$	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0		$+1$	$\cdots$	$+1$	-1	$\cdots$	-1	$+1$	$+1$	$\cdots$	$+1$		0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	$f^{inv}_{i,1,t}$	$\cdots$	$f^{inv}_{i,n_i^{inv},t}$	$R_{i,t}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\varrho_{i,T}$	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0		0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0		$+1$	$\cdots$	$+1$	-1	$\cdots$	-1	$+1$	$+1$	$\cdots$	$+1$	$f^{inv}_{i,1,T}$	$\cdots$	$f^{inv}_{i,n_i^{inv},T}$	$R_{i,T}$
$\sigma_{i,1}$	$a^{repr}_{i,1,1,1}$	$\cdots$	$a^{repr}_{i,1,n_i^{repr},1}$	$a^{exp}_{i,1,1,1}$	$\cdots$	$a^{exp}_{i,1,n_i^{exp},1}$	0	$a^{imp}_{i,1,1,1}$	$\cdots$	$a^{imp}_{i,1,n_i^{imp},1}$		$a^{repr}_{i,1,1,t,}$	$\cdots$	$a^{repr}_{i,1,n_i^{repr},t}$	$a^{exp}_{i,1,1,t}$	$\cdots$	$a^{exp}_{i,1,n_i^{exp},t}$	0	$a^{imp}_{i,1,1,t}$	$\cdots$	$a^{imp}_{i,1,n_i^{imp},t}$		$a^{repr}_{i,1,1,T}$	$\cdots$	$a^{repr}_{i,1,n_i^{repr},T}$	$a^{exp}_{i,1,1,T}$	$\cdots$	$a^{exp}_{i,1,n_i^{exp},T}$	0	$a^{imp}_{i,1,1,T}$	$\cdots$	$a^{imp}_{i,1,n_i^{imp},T}$	$a^{inv}_{i,1,1}$	$\cdots$	$a^{inv}_{i,1,n_i^{inv}}$	$b_{i,1}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\sigma_{i,s}$	$a^{repr}_{i,s,1,1}$	$\cdots$	$a^{repr}_{i,s,n_i^{repr},1}$	$a^{exp}_{i,s,1,1}$	$\cdots$	$a^{exp}_{i,s,n^{exp},1}$	0	$a^{imp}_{i,s,1,1}$	$\cdots$	$a^{imp}_{i,s,n_i^{imp},1}$		$a^{repr}_{i,s,1,t,}$	$\cdots$	$a^{repr}_{i,s,n_i^{repr},t}$	$a^{exp}_{i,s,1,t}$	$\cdots$	$a^{exp}_{i,s,n_i^{exp},t}$	0	$a^{imp}_{i,s,1,t}$	$\cdots$	$a^{imp}_{i,s,n_i^{imp},t}$		$a^{repr}_{i,s,1,T}$	$\cdots$	$a^{repr}_{i,s,n_i^{repr},T}$	$a^{exp}_{i,s,1,T}$	$\cdots$	$a^{exp}_{i,s,n_i^{exp},T}$	0	$a^{imp}_{i,s,1,T}$	$\cdots$	$a^{imp}_{i,s,n_i^{imp},T}$	$a^{inv}_{i,s,1}$	$\cdots$	$a^{inv}_{i,s,n_i^{inv}}$	$b_{i,s}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
σ_{i,m_i}	$a^{repr}_{i,m_i,1,1.}$	$\cdots$	$a^{repr}_{i,m_i,n_i^{repr},1}$	$a^{exp}_{i,m_i,1,1}$	$\cdots$	$a^{exp}_{i,m_i,n_i^{exp},1}$	0	$a^{imp}_{i,m_i,1,1}$	$\cdots$	$a^{imp}_{i,m_i,n_i^{imp},1}$		$a^{repr}_{i,m_i,1,t,}$	$\cdots$	$a^{repr}_{i,m_i,n_i^{repr},t}$	$a^{exp}_{i,m_i,1,t}$	$\cdots$	$a^{exp}_{i,m_i,n_i^{exp},t}$	0	$a^{imp}_{i,m_i,1,t}$	$\cdots$	$a^{imp}_{i,m_i,n_i^{imp},t}$		$a^{repr}_{i,m_i,1,T}$	$\cdots$	$a^{repr}_{i,m_i,n_i^{repr},T}$	$a^{exp}_{i,m_i,1,T}$	$\cdots$	$a^{exp}_{i,m_i,n_i^{exp},T}$	0	$a^{imp}_{i,m_i,1,T}$	$\cdots$	$a^{imp}_{i,m_i,n_i^{imp},T}$	$a^{inv}_{i,m_i,1}$	$\cdots$	$a^{inv}_{i,m_i,n_i^{inv}}$	b_{i,m_i}
$\geqq$	0	$\cdots$	0	$c^{exp}_{i,1,1}$	$\cdots$	$c^{exp}_{i,n_i^{exp},1}$	$c^{imp}_{i,0,1}$	$c^{imp}_{i,1,1}$	$\cdots$	$c^{imp}_{i,n_i^{imp},}$	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$c^{exp}_{i,1,t}$	$\cdots$	$c^{exp}_{i,n_i^{exp},t}$	$c^{imp}_{i,0,1}$	$c^{imp}_{i,1,t}$	$\cdots$	$c^{imp}_{i,n^{imp},t}$		0	$\cdots$	0	$c^{exp}_{i,1,t}$	$\cdots$	$c^{exp}_{i,n_i^{exp},T}$	$c^{imp}_{i,0,T}$	$c^{imp}_{i,1,T}$	$\cdots$	$c^{imp}_{i,n_i^{imp},t}$	$c^{inv}_{i,1}$	$\cdots$	$c^{inv}_{i,n^{inv}}$	

EGY GRÁFELMÉLETI PROBLÉMÁRÓL

ERDŐS PÁL és RÉNYI ALFRÉD

Bevezetés

E dolgozatban egy gráfelméleti problémával foglalkozunk, amelyre a következő kérdés vezet: megadott számú repülőtér között rendszeres (oda-vissza) légijáratokat kívánunk létesíteni oly módon, hogy bármely repülőtérről bármely másik repülőtérre vagy közvetlen járattal (leszállás nélkül), vagy egyetlen átszállással el lehessen jutni, azonban a repülőterek kapacitásai korlátozottak, vagyis elő van írva, hogy egy repülőtér legfeljebb hány más repülőtérrel állhat közvetlen légi kapcsolatban; kérdés, hogyan lehet a szóbanforgó légi hálózatot úgy megtervezni, hogy a fenti feltételek teljesüljenek és egyben minél kevesebb légi járatot kelljen létesíteni? E feladat gráfelméleti megfogalmazásához a következőképpen jutunk el: minden repülőtérnek feleltessünk meg egy pontot: ezek lesznek a gráf szögpontjai (vagy röviden: pontjai). Jelöljük a repülőterek számát n-nel, akkor tehát a gráfnak n pontja lesz. Két pontot kössünk össze egy (nem irányított) éllel, ha a megfelelő repülőterek között közvetlen légi kapcsolat áll fenn. Az így létrejövő (párhuzamos élek és hurkok nélküli, nem irányított) gráfra a feltételeink azt kívánják meg, hogy a pontjai fokának (valenciájának) maximuma egy megadott számmal (amelyet k-val jelölünk) legyen egyenlő és ugyanakkor a gráf „átmérője" legfeljebb 2 legyen. Egy (összefüggő) gráf átmérőjén azt a legkisebb d számot értjük, amelyre igaz az, hogy a gráf bármely két pontja összeköthető egy legfeljebb d élből álló úttal. (Útnak nevezzük a $P_i P_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ élek sorozatát, ahol $P_1, \ldots, P_{s+1}$ a gráf különböző pontjai.) Mármost adott n és k mellett az összes, a feltételeknek eleget tevő gráfok közül (ha ilyenek egyáltalán vannak) keressük azokat, amelyek éleinek száma minimális. Ezt a minimális élszámot, amely nyilván kizárólag az n és k számoktól függ, $F_2(n, k)$-val fogjuk jelölni. Ha G_n jelöl egy tetszőleges n szögpontú gráfot, $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ennek pontjait, $v(P_j)$ jelöli a P_j pont fokát G_n-ben (vagyis G_n azon pontjainak számát, amelyekkel P_j össze van kötve egy éllel), $d(G_n)$ jelöli a G_n gráf átmérőjét, és $N(G_n)$ az éleinek számát, akkor tehát $H_2(n, k)$-val jelölve azon n adott $P_1, \ldots, P_n$ szögpontból képezhető gráfok halmazát, amelyekre $d(G_n) \leq 2$ és $\max\limits_{1 \leq j \leq n} v(P_j) = k$,

$$F_2(n, k) = \min_{G_n \in H_2(n,k)} N(G_n)\,, \tag{1}$$

feltéve, hogy a $H_2(n, k)$ halmaz nem üres; ellenkező esetben legyen $F_2(n, k) = +\infty$. A kettes index $F_2(n, k)$-ban ill. $H_2(n, k)$-ban arra utal, hogy legfeljebb

2 átmérőjű gráfokról van szó. A feladat ugyanis nyilván általánosítható oly módon, hogy ahelyett, hogy bármely repülőtérről el lehessen jutni bármely másikra legfeljebb egy átszállással, csak annyit kötünk ki, hogy legfeljebb $r-1$ átszállással el lehessen jutni, ahol $r \geq 2$. Más szóval keressük az n szögpontú gráfok közül, amelyekben a pontok fokának maximuma k és amelyek átmérője legfeljebb r, azokat, amelyek minimális számú élből állnak. Ezt a minimális élszámot $F_r(n, k)$-val jelöljük, tehát

$$F_r(n,k) = \min_{G_n \in H_r(n,k)} N(G_n), \tag{2}$$

ahol $H_r(n, k)$ azoknak a $P_1, \ldots, P_n$ szögpontokból képezett G_n gráfoknak a halmaza, amelyekre $d(G_n) \leq r$ és $\max\limits_{1 \leq j \leq n} v(P_r) = k$. (Ha $H_r(n, k)$ üres, úgy $F_r(n, k) = +\infty$.)

E dolgozat 1. és 2. §-ában az $r = 2$ esettel foglalkozunk. Az $r > 2$ esetre vonatkozólag csak a 3. §-ban teszünk néhány megjegyzést; ezen kérdés részletes diszkussziójára egy további dolgozatban szándékozunk visszatérni.

Az 1. §-ban megvizsgáljuk az $F_2(n, k)$ függvény viselkedését abban az esetben, ha n és k nagy számok, és $F_2(n, k)$-ra aszimptotikusan pontos képletet adunk meg. A 2. §-ban egy konstrukciós eljárást ismertetünk, amely bizonyos aszimptotikusan legjobb megoldásokhoz vezet.

Megjegyezzük, hogy ha találtunk egy minimális élszámú legfeljebb 2 átmérőjű n szögpontú gráfot, amelyben a pontok fokának maximuma k, és adva van n kijelölt pont, akkor ezen pontokhoz az említett gráf szögpontjait még $n!$ különböző módon rendelhetjük hozzá. Ezen hozzárendelések közül kiválaszthatunk egy olyat, amely még valamely más szempontból is optimális. Igy például ha adva vannak a repülőterek közötti távolságok, azon légi összeköttetés hálózatok közül, amelyek az adott feltételek mellett minimális számú járatból állnak, kiválaszthatjuk azt, amelynél a járatok *összhossza* minimális.

A feladat felfogható nem-lineáris programozási feladatként is. Legyen $E = (\varepsilon_{ij})$ egy $n \times n$-es 1 és 0 elemekből álló szimmetrikus mátrix, amelynek diagonális elemei 1-gyel egyenlők és sorösszegeinek maximuma $k+1$, továbbá az E^2 mátrix minden eleme ≥ 1; ezen feltételek mellett a $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{1=j}^{n} \varepsilon_{ij}$ összeget kell minimalizálni.

Mi a kérdést gráfelméleti fogalmazásban vizsgáljuk.

A felhasznált módszerek mind elemiek, a probléma természetének megfelelően, a konstrukciónál azonban a véges testek, ill. véges geometriák elméletét is felhasználjuk. Ez nem az első eset, hogy gráfelméleti problémák megoldásánál a véges testek elmélete alkalmas segédeszköznek bizonyult; a gráfok aszimmetriájára vonatkozó vizsgálatainkban [1] is hasonló tapasztalatokat szereztünk. (Lásd továbbá a [2] dolgozatot.)

A 3. §-ban néhány 2 átmérőjű gráfokra vonatkozó további eredményt és néhány megoldatlan problémát is megemlítünk.

Ezúton is köszönetet mondunk GALLAI TIBORnak értékes megjegyzéseiért, amelyeket a végleges fogalmazásnál felhasználtunk.

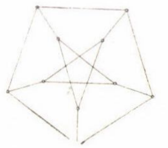
1. §. Néhány egyenlőtlenség

Először azt a kérdést vizsgáljuk, hogy mely n, k számpárokra létezhet egyáltalán n szögpontú, 2 átmérőjű gráf, amelyben a pontok fokának maximimuma k. Legyen G_n egy ilyen gráf és legyenek $P_1, \ldots, P_n$ a G_n gráf szögpontjai. Egy tetszőleges pontból, pl. a P_1 pontból feltevés szerint legfeljebb k él indul ki, vagyis P_1-ből 1 hosszúságú (egy élből álló) úttal legfeljebb k pont érhető el. A P_1 pontból 2 hosszúságú (két élből álló) úttal elérhető pontok száma nyilván legfeljebb akkora, mint a P_1-ből egy éllel elérhető pontokból egy éllel elérhető és P_1-től különböző pontok száma, és így P_1-ből egy vagy két élből álló úttal elérhető pontok száma legfeljebb $k + k(k - 1) = k^2$. Feltevés szerint azonban minden P_1-től különböző pont elérhető P_1-ből 1 vagy 2 hosszúságú úttal, tehát fenn kell állnia az

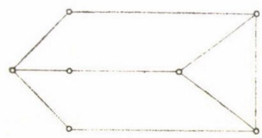
$$(1.1) \qquad n \leqq k^2 + 1$$

egyenlőtlenségnek. A fenti bizonyításból az is nyilvánvaló, hogy (1.1)-ben egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha minden pont fokszáma k, vagyis k-adfokú reguláris gráf esetében.

Az egyenlőség (1.1)-ben $k = 2$ és $k = 3$ esetben elérhető; $k = 2$ esetében az ötszögpontú körre, $k = 3$ esetében az ún. PETERSEN-féle gráfra (lásd 1.



1. ábra



2. ábra

ábra) A. J. HOFFMAN és R. R. SINGLETON [4] megmutatták, hogy $k = 7$-re is elérhető az egyenlőség (1.1)-ben, és bebizonyították, hogy a $k = 2$, 3 és 7 értékeken kívül legfeljebb még $k = 57$-re létezhet $k^2 + 1$ szögpontú, k-adfokú, reguláris, 2 átmérőjű gráf; hogy valóban létezik-e ilyen gráf $k = 57$-re, az nyitott kérdés.

Mivel ismeretes, hogy egy gráfban a páratlan fokszámú pontok száma páros kell, hogy legyen, tehát ha n és k páratlanok, akkor (1.1)-ben nem állhat egyenlőség; ez esetben kell a gráfban lenni legalább egy legfeljebb $k - 1$ fokú pontnak és így ha n és k páratlanok, akkor az

$$(1.1') \qquad n \leqq k(k - 1) + 1$$

egyenlőtlenségnek kell fennállni. Az (1.1') egyenlőtlenség teljes általánosságban szintén nem javítható, mert például (1.1')-ben egyenlőség áll fenn, ha $k = 3$, $n = 7$ (lásd 2. ábra). Mindhárom példaképpen említett gráf egyben minimális élszámú is és így $F_2(5,2) = 5$, $F_2(10,3) = 15$, $F_2(7,3) = 9$. Az első két esetben ez az alábbi 1. tételből következik; azt, hogy $F_2(7,3) = 9$, később fogjuk bizonyítani.

A mondottakból az is látszik, hogy ha $k(n)$ jelöli azt a legkisebb k számot, amelyre létezik n szögpontú 2, átmérőjű gráf, amelyben a szögpontok fokának maximuma k-val egyenlő, akkor $k(n)$ nem monoton függvénye n-nek, ugyanis $k(9) = 4$ de $k(10) = 3$. Mindenesetre látható (1.1)-ből, hogy teljesülnie kell a $k(n) \geqq \sqrt{n - 1}$ egyenlőtlenségnek.

Most be fogjuk bizonyítani a következő tételt.

1. Tétel. *Fennáll az*

$$F_2(n, k) \geq \frac{\binom{n}{2}}{k} = \frac{n(n-1)}{2k} \tag{1.2}$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. Legyen G_n egy n szögpontú 2 átmérőjű gráf, amelyben a pontok fokának maximuma k. Legyen G_n éleinek száma N.

Számoljuk meg a legfeljebb 2 hosszúságú utak számát G_n-ben. 1 hosszúságú út nyilván N számú van; olyan 2 hosszúságú út, amely egy kijelölt élt tartalmaz, nyilván legfeljebb $2(k-1)$ van; ilyen módon, figyelembe véve, hogy minden 2 hosszúságú út két élt tartalmaz és így az előbb kétszer lett számolva, a 2 hosszúságú utak száma legfeljebb $(k-1)N$, vagyis a legfeljebb 2 hosszúságú utak száma legfeljebb kN. Mármost bármely két pontot összeköt legfeljebb 2 hosszúságú út és így kell, hogy teljesüljön a $kN \geq \binom{n}{2}$ egyenlőtlenség; ezzel az 1. tételt bebizonyítottuk.

Az (1.2) egyenlőtlenség teljes általánosságban nem javítható, hiszen az $n = 5$, $k = 2$ esetben $\frac{n(n-1)}{2k} = 5$ és az ötszögpontú körnek valóban 5 éle van, vagy pl. $n = 10$, $k = 3$ esetben $\frac{n(n-1)}{2k} = 15$ és az 1. ábrán látható Petersen-gráfnak valóban 15 éle van.

Az (1.2) egyenlőtlenség $F_2(7,3)$-ra a 7 alsó korlátot adja. Ez azonban nem érhető el. Ugyanis mivel a páratlan fokú pontok száma minden gráfban páros kell, hogy legyen, egy 7 szögpontú gráfban nem lehet minden pont foka 3. Egy 7 szögpontú, 2 átmérőjű gráfban, amelynek pontjai fokának maximuma 3, kell tehát, hogy legyen legalább egy másodfokú pont. Az ugyanis nyilvánvaló, hogy első fokú pont nem lehetséges, hiszen egy gráfban, amelyben a pontok foka legfeljebb 3, egy első fokú pontból legfeljebb 5 pont érhető el legfeljebb 2 hosszúságú úttal. Ha csak egy másodfokú pont volna, akkor a gráf éleinek száma $\frac{6 \cdot 3 + 2}{2} = 10$ volna. Ha viszont egynél több másodfokú pont van, akkor a másodfokú pontok száma 3 vagy 5 volna. Az első esetben a gráfnak $\frac{4 \cdot 3 + 3 \cdot 2}{2} = 9$ éle van. Ez valóban lehetséges; egy ilyen (2 átmérőjű) gráfot ábrázol a 2. ábra. Ha 5 másodfokú pont volna, akkor az élek száma $\frac{2 \cdot 3 + 5 \cdot 2}{2} = 8$ volna. Az ilyen gráf azonban nem lehet 2 átmérőjű; ugyanis mivel egy másodfokú pontból, amely egy k_1 és egy k_2 fokú ponttal van összekötve, legfeljebb 2 hosszúságú úttal legfeljebb $k_1 + k_2$ pontba lehet eljutni, tehát bármely másodfokú pontnak össze kellene kötve lennie a két harmadfokú ponttal, de ez lehetetlen, mert akkor e pontok nem harmad-, hanem ötödfokúak lennének.

Így tehát $F_2(7, 3) \geq 9$ és mivel a 2. ábrán látható gráfnak 9 éle van, tehát $F_2(7, 3) = 9$.

Megjegyzendő, hogy az (1.1) egyenlőtlenség az 1. tételből is levezethető. Ugyanis egy n szögpontú gráfnak, amelyben a pontok foka legfeljebb k, legfeljebb $\frac{nk}{2}$ éle van; így tehát 2 átmérőjű n szögpontú gráf, amelyben a pontok fokának maximuma k, csak akkor létezhet az 1. tétel szerint, ha $\frac{nk}{2} \geqq \frac{n(n-1)}{2k}$ tehát ha $k^2 \geqq n - 1$, vagyis ha (1.1) fennáll. Az (1.2) bizonyításából egyébként az is leolvasható, hogy (1.2)-ben egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha létezik n szögpontú k-adfokú reguláris 2 átmérőjű gráf, tehát ha $\frac{nk}{2} = \frac{n(n-1)}{2k}$, vagyis ha $k^2 = n - 1$, vagyis ha (1.1)-ben egyenlőség áll fenn. Emellett az is látható a bizonyításból, hogy ha e feltétel teljesül és létezik $\frac{n(n-1)}{2k}$ élű 2 átmérőjű n szögpontú reguláris k-adfokú gráf, úgy abban bármely két pont egy és csak egy legfeljebb 2 hosszúságú úttal van összekötve; az ilyen gráf tehát sem háromszöget, sem négyszöget nem tartalmaz.

Az 1. tétel szerint

$$\frac{F_2(n,k)\,k}{n(n-1)} \geqq \frac{1}{2}. \tag{1.3}$$

A 2. §-ban be fogjuk bizonyítani, hogy az 1. tétel abban az értelemben aszimptotikusan pontos, hogy megadható k_j, n_j számpároknak ($j = 1, 2, \ldots$) olyan végtelen sorozata, hogy $n_j \to +\infty$ (és így természetesen $k_j \to +\infty$) és ugyanakkor

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{F_2(n_j, k_j)\cdot k_j}{n_j(n_j-1)} = \frac{1}{2}. \tag{1.4}$$

Mint fentebb rámutattunk, (1.2)-ben egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $k = \sqrt{n-1}$. Ha tehát $k > \sqrt{n-1}$, akkor szükségképpen $F_2(n, k) > \frac{n(n-1)}{2k}$. Most be fogjuk bizonyítani, hogy ha k lényegesen nagyobb, mint $\sqrt{n-1}$, akkor $F_2(n, k)$ nemcsak nagyobb kell, hogy legyen, mint $\frac{n(n-1)}{2k}$, hanem e számnak közel a kétszeresénél is nagyobbnak kell lennie. Ezt fejezi ki a

2. Tétel. *Legyen $k^2 > 8n$, akkor*

$$F_2(n,k) > \frac{n(n-1)}{k + \frac{8n}{k}}. \tag{1.5}$$

Megjegyzés. A 2. §-ban meg fogjuk mutatni, hogy a 2. tétel aszimptotikusan pontos.

A 2. tétel bizonyítása. Legyen G_n egy n szögpontú 2 átmérőjű gráf, amelyben a pontok fokának maximuma k. Jelölje r a G_n gráf azon pontjainak számát, melyek foka $> k/2$; magukat e pontokat jelöljék $P_1, P_2, \ldots, P_r$. Legyenek $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-r}$ a G_n gráf többi pontjai. Jelölje N a G_n gráf éleinek számát. Jelölje x_j' G_n azon éleinek számát, amelyek egyik végpontja P_j, másik végpontja pedig a $Q_1, \ldots, Q_{n-r}$ pontok egyike; jelölje továbbá y_h a G_n gráf azon éleinek a számát, amelyek egyik végpontja Q_h másik végpontja pedig a $Q_1, \ldots, Q_{h-1}, Q_{h+1}, \ldots, Q_{n-r}$ pontok egyike. Akkor

$$(1.6) \qquad \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n-r} y_h + \sum_{j=1}^{r}\binom{x'_j}{2} + \sum_{h=1}^{n-r}\binom{y_h}{2} \geqq \binom{n-r}{2};$$

ugyanis bármely Q_i és Q_j $(i \neq j)$ pont vagy egy éllel van összekötve, vagy egy $Q_i P_h Q_j$ 2 hosszúság, úttal, vagy egy $Q_i Q_h Q_j$ $(h \neq i,\ h \neq j)$ 2 hosszúságú úttal. Tehát tekintve, hogy $x'_j \leqq k$ $(j = 1, \ldots, r)$ és $y_h \leqq \frac{k}{2}$ $(h=1, \ldots, n-r)$,

$$(1.7) \qquad \frac{k}{2}\sum_{h=1}^{n-r} y_h + k\sum_{j=1}^{r} x'_j > (n-r)(n-r-1).$$

Mivel

$$\sum_{j=1}^{r} x'_j + \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n-r} y_h \leqq N,$$

tehát azt kaptuk, hogy

$$(1.8) \qquad kN \geqq (n-r)(n-r-1) > n(n-1) - 2rn.$$

Mármost nyilván

$$(1.9) \qquad \frac{rk}{2} \leqq 2N$$

és így

$$N > \frac{n(n-1)}{k + \frac{8n}{k}}.$$

Ezzel a 2. tételt bebizonyítottuk.

Megjegyzendő, hogy az (1.5) egyenlőtlenség az $n - 1 \leqq k^2 \leqq 8n$ esetben is érvényes, ez esetben azonban nem mond újat az 1. tétellel szemben, mert ebben az esetben kisebb alsó korlátot ad meg $F_2(n, k)$-ra, mint az 1. tétel; ezért mondtuk ki a 2. tételt csak $k^2 > 8n$-re.

A 2. tételt kifejezhetjük a következő alakban is: *Ha* $k^2 \geqq 8n\lambda$, *ahol* $\lambda > 1$, *akkor*

$$(1.10) \qquad F_2(n, k) \geqq \frac{n(n-1)}{k\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)}.$$

Ilyen módon a 2. tételből következik, hogy ha k_j és n_j úgy tartanak végtelenhez, hogy

$$(1.11) \qquad \lim_{j \to +\infty} \frac{k_j^2}{n_j} = +\infty,$$

akkor

$$\liminf_{j \to +\infty} \frac{F_2(n_j, k_j)\, k_j}{n_j(n_j - 1)} \geqq 1.$$

A 2. §-ban meg fogjuk mutatni, hogy a k_j és n_j számsorozatok megválaszthatók oly módon, hogy teljesüljön az (1.11) feltétel és amellett fennálljon, hogy

$$(1.12) \qquad \lim_{j \to +\infty} \frac{F_2(n_j, k_j)\, k_j}{n_j(n_j - 1)} = 1.$$

Az (1.5) egyenlőtlenség tehát aszimptotikusan pontos, ha $\frac{k^2}{n} \to +\infty$.

2. §. Közel extremális 2 átmérőjű gráfok konstrukciója

Annak bizonyításához, hogy az 1. tétel aszimptotikusan pontos, a következő lemmára lesz szükségünk .

1. lemma. *Ha P tetszőleges prímszámhatvány, létezik olyan $n = P^2 + P + 1$ szögpontú 2 átmérőjű gráf, amelyben a pontok fokának maximuma $P + 1$.*

Megjegyzés. Az 1. lemma szerint létező gráf éleinek száma nyilván $\leq \frac{(P+1)(P^2+P+1)}{2}$, tehát az 1. lemma szerint, ha P prímszámhatvány, akkor

$$\frac{F_2(P^2+P+1, P+1)(P+1)}{(P^2+P+1)(P^2+P)} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2P}$$

és így, ha k_j a $P_j + 1$ alakú számokon fut végig, ahol P_j prímszámhatvány, és $n_j = P_j^2 + P_j + 1$, akkor (1.4) fennáll.

Az 1. lemma bizonyítása. Legyen $GF(P)$ egy P elemű véges test (Galois test). Legyen PG $(P, 2)$ az ezen test segítségével konstruált véges projektív (Desargues-féle) síkgeometria. A $PG(P, 2)$ geometria ,,pont''-jait homogén koordináták segítségével adjuk meg, vagyis e geometria pontjait az (a, b, c) elemhármasok reprezentálják, ahol a, b, c $GF(P)$ elemei, amelyek nem mindhárman egyenlők O-val (a $GF(P)$ test zérus-elemével). Az (a, b, c) és $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ elemhármasok, ahol λ a $GF(P)$ test egy O-tól különböző tetszőleges eleme, feltevés szerint ugyanazon pontot határozzák meg. Ilyen módon $PG(P, 2)$ különböző pontjainak száma $\frac{P^3-1}{P-1} = P^2 + P + 1$. A PG $(P, 2)$ geometria egy ,,egyenesén'' azon (x, y, z) koordinátákkal bíró pontok halmazát értjük, amelyek eleget tesznek az $ax + by + cz = O$ egyenletnek, ahol a, b, c $GF(P)$ tetszőleges adott elemei, amelyek nem mindhárman egyenlők O-val; az a, b, c elemhármast az előbb definiált egyenes (vonal-) koordinátáinak nevezzük és az egyenest röviden $[a, b, c]$-vel jelöljük. Az $[a, b, c]$ és $[\lambda a, \lambda b, \lambda c]$ egyenesek, ahol λ $GF(P)$ egy O-tól különböző tetszőleges eleme, nyilván azonosak. Ilyen módon $PG(P, 2)$-ben $P^2 + P + 1$ különböző egyenes van. Ha $ax + by + cz = O$, akkor azt mondjuk, hogy az (x, y, z) pont rajta fekszik az $[a, b, c]$ egyenesen (ill., hogy az $[a, b, c]$ egyenes átmegy az (x, y, z) ponton). Nyilvánvaló, hogy ez esetben az is igaz, hogy az (a, b, c) pont rajta fekszik az $[x, y, z]$ egyenesen (ill. az $[x, y, z]$ egyenes átmegy az (a, b, c) ponton). Könnyen beláthatók a következő állítások:

1. Bármely egyenesen $P + 1$ pont fekszik.
2. Bármely két különböző egyenesnek egy és csak egy közös pontja van.
3. Bármely két különböző ponton egy és csak egy egyenes megy át.

Most definiáljuk $PG(P, 2)$ pontjainak és egyeneseinek egy kölcsönösen egyértelmű egymáshoz rendelését a következőképpen: az (a, b, c) ponthoz hozzárendeljük az $[a, b, c]$ egyenest és megfordítva. Jelöljük a pontokat nagy betűkkel, az egyeneseket görög betűkkel, a leképezést, amely egy ponthoz egy egyenest ill. egy egyeneshez egy pontot rendel, T-vel, vagyis ha az A ponthoz az α egyenes van hozzárendelve, akkor azt írjuk, hogy $\alpha = TA$, ill. $A = T\alpha$. Könnyen belátható, hogy e leképezés a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1'. Ha a B pont hozzátartozik az $\alpha = TA$ egyeneshez, akkor az A pont is hozzátartozik a $\beta = TB$ egyeneshez.

2'. Ha C a TA és TB egyenesek közös pontja, akkor TC azonos az A és B pontokon átmenő egyenessel. Ha az α és β egyenesek közös pontját $\alpha \cdot \beta$-val, az A és B pontokon átmenő egyenest $A \cdot B$-vel jelöljük, akkor tehát

$$TA \cdot TB = T(A \cdot B)\,.$$

3'. Egy tetszőleges α egyenes pontjaihoz rendelt egyenesek együttvéve lefedik (tartalmazzák) a geometria összes pontjait, mégpedig az $A = T\,\alpha$ pont kivételével minden pont egyszeresen van lefedve, az $A = T\,\alpha$ pont viszont $P + 1$-szeresen.

4'. Az $A = (a, b, c)$ pont akkor és csak akkor fekszik rajta a TA egyenesen, ha $a^2 + b^2 + c^2 = O$.

Mármost legyenek a $G[P]$ gráf szögpontjai $PG(P, 2)$ pontjai. Az $A = (a, b, c)$ és $A' = (a', b', c')$ (különböző) pontokat $G[P]$-ben akkor és csak akkor kötjük össze egy éllel, ha A' rajta fekszik a TA egyenesen (ill. A a TA' egyenesen), vagyis, ha $aa' + bb' + cc' = O$. A fent mondottak szerint e gráfnak a következő tulajdonságai vannak:

I. $G[P]$ pontjainak száma $P^2 + P + 1$.

II. $G[P]$-ben minden pont foka $P + 1$ vagy P. (Az $A = (a, b, c)$ pont foka $P + 1$, ill. P aszerint, hogy A nem fekszik rajta, ill. rajta fekszik a TA egyenesen, tehát aszerint, hogy $a^2 + b^2 + c^2 \neq O$ vagy $= O$.) Ilyen módon $G[P]$ éleinek száma nem lehet nagyobb, mint $1/2(P + 1)\,(P^2 + P + 1)$.

III. $G[P]$ átmérője 2-vel egyenlő.

IV. $G[P]$ nem tartalmaz négyszöget.

I. és II. nyilvánvalóak. III. a következőképpen látható be: ha A és B tetszőleges különböző pontok, A és B összeköthetők az ACB úttal, ahol $C = TA \cdot TB$. Ilyenmódon $G[P]$ rendelkezik az 1. lemmában felsorolt tulajdonságokkal és így az 1. lemmát bebizonyítottuk.

A IV. tulajdonság a következőképpen látható be. Ha az $ABCD$ négyszög $G[P]$-hez tartoznék, akkor a TA és TC egyenesneknek B és D egyaránt közös pontjuk volna, ami nem lehetséges, ha az A, B, C, D pontok mind különbözőek.

Most bebizonyítjuk, hogy a 2. tétel is aszimptotikusan pontos a $\frac{k^2}{n} \to +\infty$ esetben. Legyen P megint egy primszámhatvány. Legyen n egy tetszőleges pozitív egész szám, amelynek $P^2 + P + 1$ valódi osztója; pl. legyen $n = s(P^2 + P + 1)$ ahol $s \geq 2$ egész.

Mármost a G_n^* gráfot a következőképpen konstruáljuk meg. Legyenek G_n^* pontjai egyrészt a $PG(P, 2)$ véges geometria pontjai (ezeket G_n^* első fajú pontjainak nevezzük), másrészt az (σ, j) elempárok, ahol σ a $PG(P, 2)$ geometria egy tetszőleges egyenese és j az $1, 2, \ldots, s - 1$ számok egyike (ezeket G_n^* másodfajú pontjainak nevezzük). Ilyen módon G_n^* pontjainak száma $(P^2 + P + 1) + (s - 1)\,(P^2 + P + 1) = n$. Mármost két első fajú pontot kössünk egy éllel össze akkor, ha a megfelelő pontok az 1. lemmában konstruált $G[P]$ gráfban össze vannak kötve; vagyis ha a két szóban forgó elsőfajú pont (a, b, c) és (a', b', c') az 1. lemma bizonyításában használt jelölés mellett, akkor e pontokat akkor és csak akkor kötjük össze, ha $aa' + bb' + cc' = O$. Másrészt ha (a, b, c) G_n^* egy elsőfajú pontja és (α, j) egy másodfajú pontja, ahol $\alpha = [x, y, z]$ akkor e pontokat (j értékére való tekintet nélkül) akkor és csak akkor kötjük össze egy éllel, ha az (a, b, c) pont $PG[P, 2]$-ben rajta fekszik az α egyenesen, vagyis ha $ax + by + cz = O$.

Másodfajú pontok G_n^*-ban ne legyenek egymással összekötve. Az így definiált G_n^* gráfról először bebizonyítjuk, hogy átmérője 2. Ugyanis két elsőfajú pont összeköthető egy legfeljebb 2 hosszúságú úttal, mivel G_n^*-nak az elsőfajú pontokból álló részgráfja izomorf az 1. lemma bizonyítása során konstruált $G[P]$ gráffal, amelyről láttuk, hogy 2 átmérőjű. Másrészt két másodfajú pont mindig összeköthető egy 2 hosszúságú úttal; ha ugyanis a két másodfajú pont (α, j) és (β, h) akkor vagy $\beta = \alpha$ és $j \neq h$, mely esetben mindkét pont össze van kötve G_n^* összes olyan (elsőfajú) (a, b, c) pontjával, amelyre az (a, b, c) pont $PG[P, 2]$-ben rajta fekszik az α egyenesen. Ha viszont $\alpha \neq \beta$, akkor (α, j) és (β, h) össze vannak kötve G_n^* azon (a, b, c) elsőfajú pontjával, ahol (a, b, c) az α és β egyenesek metszéspontja $PG[P, 2]$-ben.

Most már csak azt kell bebizonyítanunk, hogy bármely elsőfajú pont bármely másodfajú ponttal össze van kötve G_n^*-ban egy legfeljebb 2 hosszúságú úttal. Legyen (a, b, c) G_n^* egy tetszőleges elsőfajú pontja és (α, j) egy tetszőleges másodfajú pontja. Két esetet különböztetünk meg. Ha az (a, b, c) pont $PG(P, 2)$-ben rajta fekszik az $\alpha = [a', b', c']$ egyenesen, akkor a szóban forgó két pont G_n^*-ban éllel van összekötve. Ha viszont (a, b, c) nem fekszik rajta az $\alpha = [a', b' c']$ egyenesen, akkor legyen β az $[a, b, c]$ egyenes és legyen (x, y, z) az α és β egyenesek közös pontja. Akkor (x, y, z) rajta fekszik a $\beta = [a, b, c]$ egyenesen, tehát $ax + by + cz = O$ és így az (x, y, z) pont össze van kötve (a, b, c)-vel G_n^*-ban; másrészt (x, y, z) rajta fekszik az $\alpha = [a', b', c']$ egyenesen is, tehát $a'x + b'y + c'z = O$ és így az (x, y, z) elsőfajú pont össze van kötve az (α, j) másodfajú ponttal is, vagyis (α, j)-ből (a, b, c)-be (x, y, z)-n keresztül vezet egy 2 hosszúságú út. Ezzel bebizonyítottuk, hogy G_n^* 2 átmérőjű. Most számítsuk ki G_n^* pontjai fokának maximumát, amit k-val jelölünk és becsüljük meg G_n^* éleinek számát, amit N-nel jelölünk. Egy elsőfajú pont nyilván legfeljebb $P + 1$ elsőfajú ponttal és $(s - 1)(P + 1)$ másodfajú ponttal van összekötve, tehát foka legfeljebb $s(P + 1)$. Egy másodfajú pont viszont pontosan $P + 1$ elsőfajú ponttal van összekötve; ilyen módon $k = s(P + 1)$. Másrészt az elsőfajú pontokat összekötő élek száma egyenlő $G[P]$ éleinek számával, tehát legfeljebb $\frac{1}{2}(P + 1)(P^2 + P + 1)$, míg az elsőfajú pontokat másodfajú pontokkal összekötő élek száma $(P^2 + P + 1)(P + 1)(s - 1)$ tehát

$$N \leqq (P^2 + P + 1)(P + 1)\left(s - \frac{1}{2}\right).$$

Így tehát, mivel $P^2 + P + 1 \geqq 7$

$$\frac{Nk}{n(n-1)} \leqq \frac{(P^2 + P + 1)(P + 1)^2 s\left(s - \frac{1}{2}\right)}{s(P^2 + P + 1)\cdot[s(P^2 + P + 1) - 1]} \leqq 1 + \frac{1}{P + 1}.$$

Ennélfogva, ha $k_j = s_j(P_j + 1)$ és $n_j = s_j(P_j^2 + P_j + 1)$ ahol P_j prímszám-hatvány, akkor

$$\frac{F_2(n_j, k_j)\, k_j}{n_j(n_j - 1)} \leqq 1 + \frac{1}{P_j + 1}, \tag{2.1}$$

vagyis ha $P_j \rightarrow +\infty$, akkor

$$\limsup_{j\to+\infty} \frac{F_2(n_j, k_j)\, k_j}{n_j(n_j - 1)} \leqq 1. \tag{2.2}$$

Mármost, figyelembe véve, hogy

$$\frac{k_j^2}{n_j} > s_j,$$

tehát, ha $s_j \rightarrow +\infty$, akkor a 2. tétel szerint

$$\liminf_{j\to+\infty} \frac{F_2(n_j, k_j)\, k_j}{n_j(n_j - 1)} \geqq 1 \tag{2.3}$$

és így (2.2)-ből és (2.3)-ból következik, hogy

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{F_2(n_j, k_j)\, k_j}{n_j(n_j - 1)} = 1 \quad \text{ha } P_j \rightarrow +\infty \text{ és } s_j \rightarrow +\infty. \tag{2.4}$$

A 2. tétel tehát aszimptotikusan pontos, ha $\frac{k^2}{n} \rightarrow +\infty$; a fent konstruált példa azonban nem zárja ki, hogy a 2. tétel némileg javítható legyen, ha $\frac{k^2}{n}$ nem nagy szám. A

$$\liminf_{\frac{k^2}{n} \leqq c} \frac{F_2(n, k)\, k}{n(n - 1)} = g(c)$$

függvény pontos értékét ($c > 1$) nem ismerjük; az 1. és 2. tételből és a fenti gráf-konstrukcióból csak annyi következik, hogy

$$g(c) \geqq \max\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{1 + \frac{8}{c}}\right), \quad \text{ha } c > 1.$$

Meg kívánjuk még jegyezni, hogy ha $s = 2$ és a G_n^* gráfból elhagyjuk az elsőfajú pontokat összekötő éleket, azt a páros körüljárású gráfot kapjuk, amelyet KÁRTESZI FERENC nemrégiben [2] példaként adott meg arra, hogy létezik $2(P^2 + P + 1)$ pontból álló $P + 1$-fokú reguláris gráf, amely nem tartalmaz 6-nál kevesebb élből álló körutat (P prímszámhatvány).

3. §. Néhány további probléma

Eddig $F_2(n, k)$-t azon feltevés mellett vizsgáltuk hogy k viszonylag kicsi n-hez képest (de persze $\sqrt{n - 1}$-nél nagyobb (1.1)-re való tekintettel). Most vizsgáljuk meg $F_2(n, k)$-t azon feltevés mellett, hogy k kevéssel kisebb

n-nél; pontosabban vizsgálni fogjuk $F_2(n, n - d)$ értékét, ahol $d \geqq 1$ rögzített egész szám és $n = d + 2, d + 3, \ldots$. Nyilvánvaló, hogy k minden értékére $F_2(n, k) \geqq n - 1$, hiszen egy 2 átmérőjű gráf mindenképpen összefüggő és egy n szögpontú összefüggő gráf legalább $n - 1$ élt tartalmaz, és akkor és csak akkor tartalmaz pontosan $n - 1$ élt, ha ún. ,,fa". Mármost könnyen belátható, hogy $F_2(n, n - 1) = n - 1$, hiszen ha a G_n n-szögpontú gráfban van egy $n - 1$-fokú pont, akkor a gráf 2 átmérőjű (ún. ,,csillag"), ehhez további élekre nincs is szükség. Az is könnyen belátható, hogy $F_2(n, n - 2) = 2n - 4$; a legegyszerűbb n szögpontú 2 átmérőjű gráfot, amelyben a pontok fokának maximuma $n - 2$, úgy kapjuk, hogy pl. a P_1 és P_2 pontokat összekötjük a $P_3, P_4, \ldots, P_n$ pontok mindegyikével.

Az első nem triviális eset a $d = 3$ eset.

3. Tétel. *Ha $d \geqq 3$ és $n \geqq d + 2$, akkor*

$$F_2(n, n - d) \geqq F_2(n, n - 4) = F_2(n, n - 3) = 2n - 5\,. \tag{3.1}$$

Megjegyzés. A 3. tétel azért meglepő, mert (3.1) szerint

$$F_2(n, n - 3) < F_2(n, n - 2)\,, \tag{3.2}$$

ami azt mutatja, hogy $F_2(n, k)$ rögzített n mellett k-nak nem monoton csökkenő függvénye, ami pedig szemléletes meggondolás alapján plauzibilisnek tűnhetne.

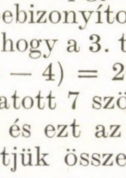
A 3. tétel bizonyítása. A tételt indukcióval bizonyítjuk. n legkisebb számba jövő értéke $n = 5$; $n = 5$-re a tétel állítása nyilvánvalóan igaz, hiszen egy 5 szögpontú 2 átmérőjű gráf, amelyekben a pontok foka legfeljebb 2, nem lehet más, mint egy 5 szögpontú kör, és ennek éleinek száma $5 = 2.5 - 5$. Tegyük fel, hogy a tétel $n - 1$-re igaz ($n \geqq 6$), és legyen G_n egy n szögpontú és 2 átmérőjű gráf, amelyben a pontok fokának maximuma $\leqq n - 3$. Bebizonyítjuk, hogy akkor G_n-nek legalább $2n - 5$ éle van. Ha egy ilyen gráfban minden pont foka legalább 4, akkor az élek száma legalább $2n$. Ha van 3-adfokú pont, de nincs alacsonyabb fokú pont, akkor legyen ez P_1 és a vele összekötött pontok P_2, P_3 és P_4. Ez esetben a $P_5, \ldots, P_n$ pontok mind elérhetők kell, hogy legyenek P_1-ből 2 hosszúságú úttal, tehát mindegyikük össze van kötve a P_2, P_3 ill. P_4 pontok egyikével és így e pontok fokának összege legalább $n - 1$, tehát az összes fokok összege $\geqq n - 1 + 3(n - 3) = 4n - 10$ és így az élek száma $\geqq 2n - 5$. Ha viszont van első fokú pont, akkor a gráf nem lehet 2 átmérőjű, ha pontjainak fokszáma $\leqq n - 3$. Ugyanis, ha pl. P_1 egy első fokú pont, amely csak a P_2 ponttal van összekötve, akkor, mivel P_2 legfeljebb $n - 3$ fokú, P_1-ből legfeljebb $n - 3$ pont érhető el legfeljebb 2 hosszúságú úttal. Tehát feltehetjük, hogy G_n-nek van másodfokú pontja. (Az indukciós feltevést csak ezen eset tárgyalásánál használjuk fel.)

Legyen e pont P_1 és a vele összekötött két pont P_2 és P_3. Akkor a G_n gráf további $n - 3$ pontja mind vagy P_2-vel vagy P_3-mal össze kell, hogy kötve legyen. Tegyük fel, hogy van olyan P_1-től különböző pont, amely P_2-vel és P_3-mal is össze van kötve. Ez esetben a G_n gráfból P_1-et elhagyva egy $n - 1$ szögpontú G_{n-1} gráfot kapunk amelynek átmérője 2. Ugyanis a P_2, P_3 pontpáron kívül nem lehet más pontpár, amely P_1-en át van összekötve legfeljebb 2 hosszúságú úttal és a P_2, P_3 pontpár feltevés szerint össze van kötve még egy másik 2 hosszúságú úttal is. Feltehetjük, hogy a P_1 elhagyásával nyert gráfban a pontok fokának maximuma $\leqq n - 4 = (n - 1) - 3$. Ugyanis, ha nincs G_n-ben $n - 3$ fokú pont, akkor ez nyilvánvaló. Ha van G_n-ben $n - 3$ fokú pont, akkor két eset lehetséges vagy van a P_2 és P_3 pontoktól különböző $n - 3$ fokú pont, vagy nincs. Utóbbi esetben nyilvánvaló, hogy a P_1 elhagyásával származó gráfban a pontok fokának maximuma $\leq n - 4$, hiszen P_2 és P_3 foka P_1 elhagyásával eggyel csökken. Ha viszont van a P_2 és P_3 (és persze a P_1) pontoktól különböző $n - 3$ fokú pont, legyen ez P_4. Akkor az eredeti G_n gráfban az élek száma legalább $2 + 2(n - 3) - 1 = 2n - 5$, ugyanis a $P_4, \ldots, P_n$ pontok mindegyike vagy P_2-vel, vagy P_3-mal össze van kötve. Ez esetben tehát nincs mit bizonyítani. Tehát feltehetjük, hogy G_{n-1}-ben a pontok fokának maximuma legfeljebb $(n - 1) - 3$. Így, ha a 3. tétel $n - 1$-re érvényes, következik, hogy a P_1 elhagyásával nyert G_{n-1} gráfban legalább $2n - 7$ él és így magában G_n-ben legalább $2n - 5$ él van. Így tehát csak az az eset van hátra, amikor a $P_4, \ldots, P_n$ pontok mindegyike vagy csak P_2-vel vagy csak P_3-mal van összekötve.

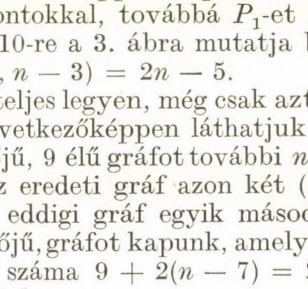
Mármost az nem lehetséges, hogy a $P_4, \ldots, P_n$ pontok mindegyike a P_2 és P_3 pontok közül ugyanazzal legyen összekötve, mert ez esetben e pont $n - 2$ fokú volna. Tehát kell lenni a $P_4, \ldots, P_n$ pontok közül olyannak, amely P_2-vel és olyannak is, amely P_3-mal van összekötve. De akkor a G_n gráfból a P_1, P_2, P_3 pontokat elhagyva egy összefüggő gráfot nyerünk, ugyanis két olyan pont, amelyek közül az egyik P_2-vel, a másik P_3-mal van összekötve, össze kell, hogy legyen kötve G_n-ben egy a P_1, P_2, P_3 pontokon át nem menő, legfeljebb 2 hosszúságú úttal. Ha meg két olyan pontot választunk, amelyek pl. P_2-vel vannak összekötve, akkor ezek bármelyike összeköthető egy a P_1, P_2, P_3 pontokat elkerülő, legfeljebb 2 hosszúságú úttal egy tetszőleges P_3-mal összekötött ponttal, és így e két pont egymással is összeköthető egy a P_1, P_2, P_3 pontokat elkerülő úttal. Mivel egy $n - 3$ szögpontú összefüggő gráf legalább $n - 4$ élt tartalmaz, maga G_n szükségképpen legalább $2 + n - 3 + n - 4 = 2n - 5$ élt tartalmaz. Ezzel bebizonyítottuk, hogy $F_2(n, n - d) \geq 2n - 5$, ha $d \geq 3$, $n \geq d + 2$. Azonban lehet olyan n szögpontú 2 átmérőjű gráfot megadni, amelyben a pontok fokának maximuma $n - 3$ és az élek száma $2n - 5$. Egy ilyen gráfot a következőképpen kaphatunk. A P_1 és P_2 pontokat kössük össze a $P_5, \ldots, P_n$ pontokkal, továbbá P_1-et P_3-mal, P_2-t P_4-gyel és P_3-at P_4-gyel. E gráfot $n = 10$-re a 3. ábra mutatja be.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy $F_2(n, n - 3) = 2n - 5$.

Ahhoz, hogy a 3. tétel bizonyítása teljes legyen, még csak azt kell belátni, hogy $F_2(n, n - 4) = 2n - 5$. Ezt a következőképpen láthatjuk be. Ha a 2. ábrán bemutatott 7 szögpontú, 2 átmérőjű, 9 élű gráfot további $n - 7$ ponttal egészítjük ki és ezt az $n - 7$ pontot az eredeti gráf azon két (harmadfokú) pontjával kötjük össze, amelyekkel az eddigi gráf egyik másodfokú pontja össze van kötve, egy n szögpontú 2 átmérőjű, gráfot kapunk, amelyben a pontok fokának maximuma $n - 4$ és az élek száma $9 + 2(n - 7) = 2n - 5$. Egy ilyen gráfot $n = 12$-re a 4. ábra mutat be.



3. ábra



4. ábra

Megjegyzendő, hogy a 3. ábrán bemutatott gráf ugyanazon elv szerint származtatható egy 5 szögpontú körből, mint a 4. ábrán bemutatott gráf a 2. ábrán látható gráfból. $F_2(n, n-d)$ általános kifejezését $d \geqq 5$-re nem ismerjük. $F_2(n, n-d)$ mellett kívánatos volna $F_2(n, [nc])$ $(0<c<1)$ aszimptotikus viselkedését is megvizsgálni. Valószínűnek látszik, hogy létezik a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{F_2(n, [nc])}{n} = h(c)$$

határérték $(0<c<1)$ és $h(c)$ monoton csökkenő és folytonos függvény, amelyre $h(1) = 2$ és $h(0) = +\infty$. A 2. tételből csak annyi következik, hogy

$$\liminf_{n \to +\infty} \frac{F_2(n, [nc])}{n} \geqq \frac{1}{c}, \quad \text{ha} \quad 0 < c < 1 .$$

Az $F_r(n, k)$ függvényt illetőleg, ha $r \geqq 3$, csak annyit jegyzünk meg, hogy (1.1) bizonyításához hasonló módon belátható, hogy ahhoz, hogy $F_r(n, k)$ egyáltalán értelmezve legyen (vagyis, hogy létezzék n szögpontú, r átmérőjű gráf, melyben a pontok fokának maximuma k), szükséges, hogy teljesüljön az

$$n \leqq 1 + k \frac{(k-1)^r - 1}{k-2}$$

egyenlőtlenség; továbbá az 1. tétel bizonyításához hasonlóan belátható, hogy

$$F_r(n, k) \geqq \frac{\binom{n}{2}(k-2)}{(k-1)^r - 1}.$$

Az eddigiekben azzal a kérdéssel foglalkoztunk, hogy mi az a legkisebb $N = F_2(n, k)$ szám, amelyre azon n szögpontú gráfok között, amelyekben a pontok fokának maximuma k és amelyek N élt tartalmaznak, *van legalább egy*, amely 2 átmérőjű. Kézenfekvő felvetni azt a kérdést is, hogy mi az a legkisebb $N = G_2(n, k)$ szám, amelyre *minden* olyan n szögpontú gráf legfeljebb 2 átmérőjű, amelyben a pontok fokának maximuma k és amely N élt tartalmaz. Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor n páros. Ez esetben a kérdésnek csak akkor van értelme, ha $k \geqq \frac{n}{2}$. Ha ugyanis $k \leqq \frac{n}{2} - 1$, akkor megadható könnyen egy olyan n szögpontú gráf, amelyben minden pont foka k (tehát amely az adott fokszám-korlátozás mellett maximális számú élt tartalmaz) és amelynek átmérője $\geqq 3$; ez esetben tehát $G_2(n, k)$ nincs értelmezve.

Egy ilyen gráfot a következőképpen szerkeszthetünk. Legyen $n = 2m$. Legyenek $P_1, \ldots, P_m$ és $Q_1, \ldots, Q_m$ a gráf pontjai. Feltevés szerint $k \leqq m - 1$. A P_j pontot $(j=1, \ldots, m)$ kössük össze a $Q_{j+1}, \ldots, Q_{j+k}$ pontokkal, ahol az előforduló m-nél nagyobb indexek mod m redukálandók, tehát $Q_{m+h} = Q_h$. Ez esetben nyilván mindegyik P_j $(j = 1, \ldots, m)$ pont foka k, de hasonlóképpen mindegyik Q_h $(h = 1, \ldots, m)$ pont foka is k, ugyanis Q_h a P_{h-1}, $P_{h+2}, \ldots, P_{h+k}$ pontokkal van összekötve, ahol az indexek megint mod m redukálandók, tehát $P_{-j} = P_{m-j}$. Ez a gráf azonban nyilvánvalóan nem 2 átmérőjű, mivel egy P_i és egy Q_j pontot összekötő út mindig csak páratlan számú élből állhat és így, mivel P_1 és Q_1 nincsenek éllel összekötve, a gráf átmérője $\geqq 3$.

Most vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor n páratlan, $n = 2m + 1$. Meg fogjuk mutatni, hogy $G_2(n, k)$ csak akkor lehet értelmezve, ha $k \geqq m + 1$, feltéve, hogy m páratlan, illetve, ha $k \geqq m$, feltéve, hogy m páros. Ugyanis, ha $k \leqq m - 1$, vizsgáljuk azt a gráfot, amelynek pontjai $P_1, \ldots, P_m$ és $Q_1, \ldots, Q_{m+1}$ és amelyben a P_j pont ($j = 1, \ldots, m$) a $Q_{j+1}, \ldots, Q_{j+k}$ pontokkal van összekötve (az $m + 1$-nél nagyobb indexek mod$(m + 1)$ redukálandók), és amelyben össze vannak kötve a Q_{2l-1}, Q_{2l} pontpárok, hacsak $2l \leqq k$. Ha most k páros, akkor e gráf minden pontjának foka k, ha k páratlan, akkor minden pont foka k, kivéve a Q_k pontot. Mindkét esetben a gráf azon korlátozás mellett, hogy pontjai foka legfeljebb k, maximális számú élt tartalmaz. (Ugyanis, ha k és n páratlanok, akkor nem létezik n szögpontú k-adfokú reguláris gráf, hiszen a páratlan fokú pontok száma minden gráfban páros.) Azonban e gráfban a P_{k+1} és Q_{k+1} pontokat összekötő bármely út hossza legalább 3.

Ha $n = 2m + 1$ és $k = m$, akkor két esetet kell megkülönböztetnünk. Ha m páratlan, akkor az előbbi konstrukcióval egy olyan gráfot nyerünk, amelyben a P_k pont kivételével minden pont foka k és P_k foka $k - 1$, és amelynek átmérője > 2, mivel a P_k és Q_k pontokat összekötő bármely út hossza legalább 3. Ha azonban m páros és $k = m$ akkor a fenti konstrukció egy 2 átmérőjű (reguláris) gráfra vezet.

A páros és páratlan n esetét összefoglalva tehát azt láttuk be, hogy $G_2(n, k)$ csak akkor lehet értelmezve, ha n páros és $k \geqq \frac{n}{2}$, illetve ha $n = 2m + 1$, ahol m páratlan és $k \geqq m + 1$, és végül, ha $n = 2m + 1$, ahol m páros és $k \geqq m$.

Most bebizonyítjuk, hogy ez esetekben $G_2(n, k)$ valóban értelmezve van és meghatározzuk az értékét is.

4. tétel. *Ha $n - 2 \geqq k \geqq \frac{n}{2}$, továbbá ha $n = 2m + 1$, ahol m páros és $k = m$, akkor*

$$G_2(n,k) = \left\{\frac{(n-2)k + (n-1)}{2}\right\}, \tag{3.3}$$

ahol $\{x\}$ a legkisebb egész számot jelöli, amely $\geqq x$.

Bizonyítás. Legyen G_n egy n szögpontú gráf, amelyben a pontok foka $\leqq k$ és az élek száma $N \geqq \left\{\frac{(n-2)k + (n-1)}{2}\right\}$. Legyenek $P_1, \ldots, P_n$ a G_n gráf szögpontjai és x_j a P_j pont foka. Akkor

$$x_1 + \ldots + x_n = 2N$$

és mivel $x_n \leqq k$, tehát tetszőleges i-re és j-re ($i \neq j$)

$$x_i + x_j \geqq 2N - (n-2)k \geqq 2\left\{\frac{(n-2)k + (n-1)}{2}\right\} - (n-2)k .$$

Mármost bármely a pozitív egész számra $2\left\{\frac{a}{2}\right\} \geqq a$, tehát

$$2\left\{\frac{(n-2)k+(n-1)}{2}\right\} - (n-2)k \geqq n-1$$

és így

$$x_i + x_j \geqq n - 1 . \tag{3.4}$$

Ha P_i és P_j két olyan pontja a G_n gráfnak, amelyek nincsenek egy éllel összekötve, akkor (3.4) és a skatulya-elv szerint a többi $n-2$ pont között kell olyan P_h pontnak lenni, amely mindkettővel össze van kötve, vagyis a G_n gráf valóban 2 átmérőjű. Még csak azt kell kimutatnunk, hogy ha az élek száma $N < \left\{\frac{(n-2)k+(n-1)}{2}\right\}$, akkor nem bizonyos, hogy G_n 2 átmérőjű lesz. Legyen először $k < n-2$.

Vegyünk egy tetszőleges $n-2$ szögpontú G_{n-2} gráfot, amelyben a pontok fokának maximuma $k-1$. Ha $n-2$ vagy $k-1$ páros, akkor elérhető, hogy G_{n-2} csupa $k-1$ fokú pontból álljon; ha $n-2$ és $k-1$ páratlanok, akkor elérhető, hogy G_{n-2} $n-3$ darab $k-1$ fokú és egy $k-2$ fokú pontból álljon. Az első esetben G_{n-2} éleinek száma $\frac{(n-2)(k-1)}{2}$, az utóbbi esetben G_{n-2} éleinek száma $\frac{(n-3)(k-1)+(k-2)}{2}$ lesz. Azt, hogy egy ilyen gráfot mindig konstruálhatunk, a következő egyszerű lemmából láthatjuk be:

2. Lemma. *Legyenek m és l tetszőleges pozitív egész számok, $1 \leqq l \leqq m-1$. Akkor, ha m és l közül legalább az egyik páros, megadható olyan m szögpontú gráf, amelyben minden pont foka l, míg ha m és l mindketten páratlanok, megadható olyan m szögpontú gráf, amelyben $m-1$ pont foka l és egy pont foka $l-1$.*

Megjegyzés. A 2. lemma speciális esete a [3] dolgozatban szereplő általános tételnek, amely általában megadja annak szükséges és elégséges feltételét, hogy tetszőleges megadott fokszámokra létezzék egy gráf, melynek pontjai az előírt fokszámokkal bírnak. Mivel a nekünk szükséges speciális esetben a bizonyítás igen egyszerű, a teljesség kedvéért a 4. tétel bizonyításának befejezése után a 2. lemma egy közvetlen bizonyítását közöljük.

Mármost a keresett G_n gráfot a következőképpen konstruáljuk meg: G_n tartalmazza a G_{n-2} gráfot mint részgráfot és ezen kívül még két pontot, amelyek közül az egyik G_{n-2} tetszőlegesen kijelölt k pontjával, a másik pedig a többi $n-2-k$ pontjával és csak azokkal legyen összekötve. Akkor G_n átmérője nyilván legalább 3, pontjai fokának maximuma k, míg éleinek száma az első esetben

$$\frac{(n-2)(k-1)}{2} + n - 2 = \frac{(n-2)k+(n-2)}{2} ,$$

a második esetben

$$\frac{(n-3)(k-1)+(k-2)}{2}+n-2=\frac{(n-2)k+(n-3)}{2},$$

tehát mindkét esetben az élek száma $\left\{\frac{(n-2)k+(n-1)}{2}\right\}-1$. A $k=n-2$ eset egyszerűen elintézhető, mert $\left\{\frac{(n-2)(n-2)+(n-1)}{2}\right\}=\binom{n-1}{2}$ és ha G_n egy $n-1$ szögpontú teljes gráfból és egy izolált pontból áll, akkor nyilván nem is összefüggő, tehát nincs is átmérője.

Az $n=2m+1$, $k=m$ eset, ahol m páros, könnyen elintézhető. Ez esetben ugyanis

$$\left\{\frac{(n-2)k+(n-1)}{2}\right\}=\left\{\frac{nk}{2}\right\}=\frac{nk}{2},$$

vagyis csak azt kell kimutatni, hogy ha m páros szám, egy $2m+1$ szögpontú m rendű reguláris gráf mindig 2 átmérőjű. Ez azonban nyilvánvaló, hiszen ha P és P' egy ilyen gráf két pontja, amelyek nincsenek éllel összekötve, akkor, mivel mindkét pont foka m és a két ponton kívül a gráfnak $2m-1$ pontja van, kell lenni a gráfban legalább egy olyan Q pontnak, amely mind P-vel, mind pedig P'-vel össze van kötve egy éllel.

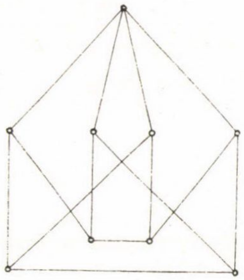
Ezzel a 4. tételt bebizonyítottuk.

A 2. lemma bizonyítása. Ha l páros, legyenek $P_1, \ldots, P_m$ a keresett gráf szögpontjai és kössük össze a P_i és P_j pontokat ($i \neq j$) egy éllel, akkor és csak akkor, ha van olyan h szám, hogy $j-i \equiv h \bmod m$ és $|h| \leq \frac{l}{2}$. Ennek a gráfnak nyilván minden pontjának foka l. Ha m páros és l páratlan, kössük össze egymással a P_i és P_j pontokat, ha van olyan h szám, hogy $j-i \equiv h \bmod m$ és $|h| \leq \frac{l-1}{2}$, továbbá kössük össze a P_i és $P_{i+\frac{m}{2}}$ pontokat $\left(i=1, \ldots, \frac{m}{2}\right)$. Ennek a gráfnak megint csak minden pontjának foka l. Ha m és l páratlanok, kössük össze egymással megint a P_i és P_j pontokat, ha $j-i \equiv h \bmod m$ és $|h| \leq \frac{l-1}{2}$, továbbá kössük össze a P_i és $P_{i+\frac{m-1}{2}}$ pontpárokat, ha $i=1, \ldots, \frac{m-1}{2}$. Ebben a gráfban a $P_1, \ldots, P_{m-1}$ pontok foka l, a P_m pont foka $l-1$ lesz. Így mindhárom esetben konstruáltunk egy a kívánt tulajdonságokkal bíró gráfot.

Ezzel a 2. lemmát bebizonyítottuk.

Az 1. Táblázat tartalmazza $F_2(n, k)$ értékeit az összes olyan (n, k) számpárokra, melyekre értelmezve van és melyekre $k<10$, $n \leq 10$.

Azt, hogy $F_2(9, 4) = 14$, az 5. ábrán látható gráf mutatja; $F_2(n, k)$ többi, a táblázatban szereplő értékei a dolgozatban bebizonyított tételek alapján könnyen igazolhatók.



5. ábra

1. táblázat

n \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1								
3		2							
4		4	3						
5		5	6	4					
6			7	8	5				
7			9	9	10	6			
8			12	11	11	12	7		
9				14	13	13	14	8	
10			15	16	15	15	15	16	9

IRODALOM

[1] Erdős, P.—Rényi, A.: „Asymmetric graphs" (sajtó alatt az *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*-ban).

[2] Kárteszi F.: „Egy kombinatorikus minimum problémáról". *Mat. Lapok* **11** (1960) 323—329.

[3] Erdős P.—Gallai T.: „Gráfok előírt fokú pontokkal." *Mat. Lapok* **11** (1960) 264—274

[4] Hoffman, A. J.—Singleton, R. R.: „On Moore graphs with diameters 2 and 3." *IBM Journal of Research and Development* **4** (1960) 497—504.

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ТЕОРИИ ГРАФОВ

P. ERDŐS и A. RÉNYI

Пусть $H_2(n,k)$ множество всех (неориентированных) графов G_n имеющих n заданных вершин, в которых максимум степени всех вершин ровно k и диаметр которых $\leqq 2$. Пусть $F_2(n,k) = \min N(G_n)$ для $G_n \in H_2(n,k)$, где $N(G)$ означает число ребер графа G. (В случае, если множество $H_2(n,k)$ пустой, положим $F_2(n,k) = +\infty$.) В работе доказаны следующие неравенства:

Теорема 1. $$F_2(n,k) \geqq \frac{n(n-1)}{2k}.$$

Теорема 2. $$F_2(n,k) \geqq \frac{n(n-1)}{k + \dfrac{8n}{k}}, \quad \textit{если} \quad k^2 > 8n.$$

Доказывается далее с помощью конструкции, что Теорема 1 в пределе для $n \to \infty$ не может быть улучшена, и Теорема 2 в пределе не может быть улучшена, если $\frac{k^2}{n} \to \infty$. Конструкция почти-экстремальных графов дана использованием конечных геометрий.

Возможная интерпретация задачи определения $F_2(n,k)$ следующая: Если хотим устанавливать сеть воздушных сообщений между аэропортами так, чтобы ни одного из аэропортов не было в непосредственной связи с более чем k с другими аэропортами, и чтобы было возможным ехать из каждого аэропорта в каждый другой непосредственно или с одной единственной пересадкой, тогда требуется найти минимальное число непосредственных связей с которыми такая сеть может быть осуществлена.

ON A PROBLEM IN THE THEORY OF GRAPHS

P. ERDŐS and A. RÉNYI

Abstract

Let $H_2(n,k)$ denote the set of all (non-directed) graphs G_n having n prescribed vertices, in which the maximum of the valencies of the vertices is equal to k, and the diameter of which is $\leqq 2$. We put $F_2(n,k) = \min N(G_n)$ $G_n \in H_2(n,k)$ where $N(G)$ denotes the number of edges of the graph G. (If $H_2(n,k)$ is empty we put $F_2(n,k) = +\infty$). The following inequalities are proved:

Theorem 1.

$$F_2(n,k) \geqq \frac{n(n-1)}{2k}.$$

Theorem 2.

$$F_2(n,k) \geqq \frac{n(n-1)}{k+\frac{8n}{k}} \quad \text{if} \quad k^2 > 8n\,.$$

It is shown further by effective construction that Theorem 1 is asymptotically best possible, and that Theorem 2 is also asymptotically best possible in the case $\frac{k^2}{n} \to +\infty$. The constructions are based on the use of finite geometries.

A possible interpretation of determining $F_2(n, k)$ is as follows: we want to establish a network of air connections between n airports, so that the maximal number of airports with which any given airport is connected by a (direct) connection is equal to k, further that it should be possible to travel from any given airport to any other either directly or by changing the plane exactly once; (it is supposed that each plane travels from an airport A to another airport B and back, without landing at intermediate places); the problem is to determine the minimal number of air connections with which such a communication network can be realized.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET OSZTÁLYSZEMINÁRIUMAIBAN 1962-BEN ELHANGZOTT ELŐADÁSOK

A valószínűségszámítási osztály szemináriuma

1. Szüsz Péter: *Nem független valószínűségi változók összegeire vonatkozó határeloszlástételek.* (Január 18.)

2. Rényi Alfréd: *A sztochasztikus gejzir.* (Február 8.)

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ független és egyforma eloszlású pozitív, korlátos valószínűségi változók, legyen $\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ és $\zeta_n^* = [\zeta_n]$, ahol $[x]$ az x pozitív szám egész részét jelöli. A szóbanforgó probléma az, hogy a ζ_n^* $(n = 1, 2, \ldots)$ számsorozat statisztikus tulajdonságai alapján meg lehet-e határozni (1 valószínűséggel) a ξ_n változók közös $F(x)$ eloszlásfüggvényét, illetve annak bizonyos jellemző adatait? A nagy számok erős törvényéből azonnal következik, hogy ha M jelöli a ξ_n változók közös várható értékét akkor 1 valószínűséggel fennáll a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\zeta_n^*}{n} = M$ reláció, tehát M meghatározható a ζ_n^* $(n = 1, 2, \ldots)$ számsorozat segítségével. Előadó rámutatott, hogy ha a ξ_n változók szórását D-vel jelöljük, D is meghatározható a ζ_n^* $(n = 1, 2, \ldots)$ számsorozatból, ugyanis pl. az iterált logaritmus tétel szerint 1 valószínűséggel

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\zeta_n^* - nM}{\sqrt{2n \log\log n}} = D.$$

Nyitott problémaként vetette fel a magasabb momentumok meghatározását.

3. Mogyoródi József: *Egy keverési tétel feltételes várható értékre és alkalmazása a Kolmogorov-egyenlőtlenségre.* (Február 15.)

Lásd az előadó „A central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables" című cikkét, e Közlemények **7** (1962) A, 409—423.

4. Rényi Alfréd: *Egy információelméleti problémáról.* (Március 1.)

Lásd az előadó „Egy információelméleti problémáról" című dolgozatát, e Közlemények **6** (1961) B, 505—516.

5. Arató Mátyás: *Beszámoló a Moszkvában folyó valószínűségszámítási kutatásokról.* (Március 15.)

6. Rényi Alfréd: *Irwing Weiss egy tételének három új bizonyítása és általánosítása.* (Április 12.)

Lásd az előadó: „Three new proofs and a generalization of a theorem of Irwing Weiss" c. dolgozatát, e Közlemények **7** (1962) A, 203—214.

Csiszár Imre: *Bridzslicit és információelmélet.*

7. Lukács, E.:[1] *Az eloszlásfüggvények terének egy leképezéséről.* (Április 19.)

8. Rényi Alfréd: *Kiemelkedő elemekről.* (Április 26.)

Lásd az előadó „Egy megfigyeléssorozat kiemelkedő elemeiről" c. cikkét az MTA III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei, **12** (1962) 105—121. o., valamint a Clermont—Ferrand-i Pascal-ünnepségeken tartott előadását.

9—15. Bognár Jánosné: *Referáló előadássorozat.* (Április 16., május 7., 14., 21., 28., október 11., 18.)

Az előadó Wolfowitz: „Coding theorems of information theory" (Springer, 1961) c. könyvét ismertette.

16. Bártfai Pál: *Referáló előadás.* (Május 3.)

Az előadó M. C. Пинскер: „Информация и информационная устойчивость случайных величин и процессов" (Проблемы передачи информации, Выпуск 7. Издательство Академии Наук СССР, Москва, 1960) c. könyvének első fejezetét ismertette.

17—18. Bognár Jánosné: *Véletlen halmazokról.* (Május 10. és 17.)

Lásd az előadó „On random sets" című dolgozatát, e Közlemények **7** (1962) A, 425—440.

19. Rényi Alfréd: *Véletlen pontrendszerek konvex burkáról.* (Október 4.)

Lásd az előadó „Über die Konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten" cimű (R. Sulankével közös) cikkét, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, sajtó alatt.

20. Csiszár Imre: *Egy információelméleti egyenlőtlenség és alkalmazásai* (Október 18.)

Lásd az előadó „Eine informationstheoretische Ungleichung und ihre Anwendung auf den Beweis der Ergodizität von Markoffschen Ketten" című cikkét e Közlemények **8** (1963) A. 1—2. füzetében, sajtó alatt.

21. Bártfai Pál: *Bolyongási problémák egy tükröző fallal.* (November 1.)

Lásd az előadó „Irrfahrtsprobleme mit einer spiegelnden Wand" című cikkét e Közlemények **8** (1963) A. 1—2. füzetében, sajtó alatt.

22. Arató Mátyás: *Néhány megjegyzés Jánossy—Lee—Rózsa : „A Coulomb-szóródás paraméterének becslése fotoemulzióban végzett mérések alapján" c. dolgozatához.** (November 8.)

A címben említett dolgozatban a szerzők tekintik az

$$y(t) = a_0 + a_1 t + \zeta^1(t) + \zeta^2(t)$$

folyamatot, ahol a_0, a_1 konstansok, $\zeta^1(t)$ és $\zeta^2(t)$ egymástól független Gauss-folyamatok. A megfigyeléseket diszkrét időpontokban végezve felteszik, hogy $\zeta^2(i)$ mérési hiba ún. normális fehér zaj $(0, \alpha^{(2)})$ paraméterekkel, míg $\zeta^{(1)}(i)$ spektrálsűrűsége

$$f(\lambda) = \frac{\alpha^{(1)}}{2\pi(2+\sqrt{3})} \frac{|e^{i\lambda} + 2 + \sqrt{3}|^2}{|e^{2i\lambda} - 2e^{i\lambda} + 1|^2}.$$

A feladat az $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}$ ismeretlen paraméterek becslése egy $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ megfigyelési sorozat alapján. A

[1] Washington.

* A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei **6.** (1961) B, 467—498.

$$d_i = Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}$$

mennyiségek bevezetésével az a_0, a_1 paramétereket nem kell becsülni.

a) Az első megjegyzés arra vonatkozik, hogy ebben az esetben az $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}$ paramétereknek nincsenek elégséges statisztikái, így egyszerű becslések, melyek csak véges sok statisztikától függnének ($N \to \infty$ esetén) nem lehetnek effektívek.

b) A következő egyszerű becslések használhatók fel első közelítésben:

$$4\hat{\alpha}^{(1)} + 6\hat{\alpha}^{(2)} \sim \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} d_i^2$$

$$\hat{\alpha}^{(1)} - 4\hat{\alpha}^{(2)} \sim \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N-1} d_i d_{i+1}$$

$$\hat{\alpha}^{(2)} \sim \frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{N-2} d_i d_{i+2}.$$

Ezen összefüggések közül bármely kettő felhasználható $\alpha^{(1)}$ és $\alpha^{(2)}$ becslésére. Az

$$\frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k} d_i d_{i+k} \sim 0 \qquad (k = 0, 1, 2)$$

összefüggések az $f(\lambda)$-ra tett feltevés ellenőrzésére használhatók fel. E becslések aszimptotikus normalitása következik általános tételekből.

c) A szerzők a bevezetésben és a 470—472. oldalakon az $\alpha^{(1)}$ és $\alpha^{(2)}$ paraméterek maximum likelihood becsléséről beszélnek: ,,A dolgozat első részében a Colulomb-szóródás $\alpha^{(1)}$ paraméterét és a háttér hatásának $\alpha^{(2)}$ paraméterét becsüljük először a maximum likelihood módszer alapján . . .'' A szerzők ezen állításukat azonban nem bizonyítják, miután a maximum likelihood egyenleteket mindössze rendezik, de azt nem mutatják meg, hogy azoknak létezik-e megoldása.

d) A 473—475. oldalakon a torzítatlan becslések szórására levezetett összefüggés a matematikai statisztikában jólismert Cramér—Rao egyenlőtlenség egy speciális esete.

23. Békéssy András: *Betöltési problémákra vonatkozó határeloszlástételek.* (November 22.)

Lásd az előadó ,,On classical occupancy problems I.'' című dolgozatát e Közlemények **8** (1963) A. 1—2. füzetében, sajtó alatt.

A matematikai statisztikai osztály szemináriuma

1. Sarkadi Károly: *Beszámoló a lengyelországi tanulmányútról.* (Január 11.)

2. Bártfai Pál—Sarkadi Károly: *Bányaidomkövek adatainak feldolgozása a méréses mintavételi terv kidolgozása szempontjából.* (Január 18.)

Az előadók az É. M. Komárommegyei Vasbeton Gyár megbízásával kapcsolatosan felmerülő matematikai problémákat ismertették.

3—5. VINCZE ISTVÁN: *Referáló előadássorozat.* (Január 25., február 1.,15.) Az előadó a következő könyv egyes részeit ismertette: Doob, J.L. „Stochastic Processes" (Wiley, Canada, 1953).

6. PEREDY JÓZSEF:[2] *A béta-eloszlás, mint a mintavételes szilárdsági vizsgálatok kiértékelésének alapja.* (Április 27.)

7. CSÁKI ENDRE: *Az arcsin törvény kiterjesztéséről.* (November 29.) Lásd az előadó Vincze Istvánnal közös „On some extensions of the arcsine law" c. cikkét e Közleményekben (sajtó alatt).

8. VINCZE ISTVÁN: *Megjegyzések a kétváltozós Kolmogorov eloszláshoz.* (December 6.)

9. JIŘI NEDOMA:[3] *Einige Probleme der diskreten Informationstheorie.* (December 23.)

A valószínűségszámítási és matematikai statisztikai osztályok „fejezetek a sztochasztikus folyamatok elméletéből" című szemináriuma

1. PRÉKOPA ANDRÁS: *A Hilbert-tér operátorainak spektrál elmélete.* (Március 1.)

2. ARATÓ MÁTYÁS: *Stacionárius sztochasztikus folyamatok korrelációs és spektrál elmélete.* (Március 8. és 15.)

3. PRÉKOPA ANDRÁS: *Példák stacionárius folyamatokra.* (Március 22. és 29.)

4. RÉVÉSZ PÁL: *Ergodikus tételek.* (Április 5. és 12.)

5. PRÉKOPA ANDRÁS: *Extrapoláció, interpoláció.* (Április 19.)

6. ARATÓ MÁTYÁS: *Gauss folyamatok.* (Október 16.)

7. ARATÓ MÁTYÁS: *Véletlen elem, véletlen függvény, szeparábilitás.* (Október 30. és november 13.)

8. ARATÓ MÁTYÁS: *Gauss—Markov folyamatok.* (November 20.)

9. CSIBI SÁNDOR: *Sztochasztikus folyamatok lineáris transzformációja.* (December 11.)

10. ARATÓ MÁTYÁS: *Megjegyzések az ergodikus tételekkel kapcsolatban.* (December 18.)

A valós függvénytani osztály topológiai szemináriuma

1—5. CSÁSZÁR ÁKOS:[4] *A szintopogén terek elméletéről.* (Március 2., 30., április 27., május 25., június 22.)

6. V. G. BOLTJANSZKIJ (Moszkva): *Konvex testek feldarabolásáról.* (Szept. 19.)

7. GH. GALBURA (Románia): *Transzformáció-csoportokról.* (Szept. 26.)

8—11. CSÁSZÁR ÁKOS:[4] *A szintopogén terek elméletéről.* (Október 5., nov. 2., 30., december 21.)

---

[2] Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem, Szilárdságtan és tartószerkezetek tanszék.

[3] Československá alkademie věd, Ústav teorie informace a automatizace, Praha (Csehszlovák Tudományos Akadémia, információelméleti és Automatizálási intézete.

[4] Irodalom az 1—5. és 8—11. előadásokhoz: CSÁSZÁR ÁKOS: Fondements de la topologie générale, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1960.

A differenciálegyenletek osztályának szemináriuma

1—6. MAKAI ENDRE: *Membránok sajátértékeinek becslése a membránok geometriai adataival.* (Okt. 16., 23., 30., nov. 6., 13., 20.)

Ismertető előadás a következő művek alapján: RAYLEIGH, The Theory of Sound I—II, 1894—96; E. KRAHN, Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises, Math. Ann. 94 (1924) 97—100; G. SZEGŐ, Über eine Verallgemeinung des Dirichletschen Integrals, Math. Zeitschrift 52 (1950) 676—685; B. SZŐKEFALVI-NAGY, Über Parallelmengen nichtkonvexer ebener Bereiche, Acta Sci. Math. 20 (1959) 36—47; G. PÓLYA, Two more inequalities between physical and geometrical quantities, Journal of the Indian Math. Soc. 24 (1960) 413—419; L. E. PAYNE, H. F. WEINBERGER, Some isoperimetric inequalities for membrane frequencies and torsional rigidity, J. Math. Anal. and its Appl. 2 (1961) 210—216; J. HERSCH, Sur la fréquence fondamentale d'une membrane vibrante etc., Zeitschr. f. angew. Math. u. Physik, 11 (1960) 387—413; E. MAKAI: On the principal frequency of a membrane..., Stanford Studies in Mathematics and Statistics 4 (1962) 227—231.

6—8. ADLER GYÖRGY: *A hővezetés egyenletére vonatkozó Neumann-probléma megoldásának stabilitása.* (Nov. 20., 27., dec. 4.)

9—10. BIHARI IMRE: *Bizonyos másodrendű, nem lineáris differenciálegyenletek megoldásainak aszimptotikus stabilitása.* (Dec. 11., 18.)

Lásd a szerző ,,Extension of a theorem of Armellini—Tonelli—Sansone to the nonlinear equation $u'' + a(t) f(u) = 0$'' c. cikkét, e Közlemények 7(1962) A 63—68.

A numerikus és grafikus módszerek osztálya és a mátrixelméleti csoport közös szemináriuma

1—4. RÓZSA PÁL: *A Poisson-egyenlet közelítő megoldásáról.* (1961. december 13., 1962. január 3., 17. és 31.)

Ismeretes, hogy ha a Poisson-egyenletet rács-módszerrel közelítjük a következő differenciaegyenlet írható fel:

$$20\,w_{ij} - 4\,(w_{i+1,j} + w_{i,j+1} + w_{i-1,j} + w_{i,j-1}) - \\ - (w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1} + w_{i+1,j-1}) = -h^2 g_{ij}\,.$$

Az egyenlet hibája h^6 nagyságrendű, ahol h a rácstávolság. (Lásd pl. L. V. KANTOROVICS—V. J. KRILOV: A felsőbb analízis közelítő módszerei, 229 o.) Téglalap alakú tartományra (homogén peremfeltételek esetén) G. N. LANCE a differenciálegyenletet algebrai egyenletrendszerként írja fel, amelynek együttható-mátrixát a következőképpen particionálja (lásd G. N. LANCE: Numerical methods for high speed computers. London, Iliffe, 1960)

$$\mathbf{M} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B} & \dots & 0 \\ -\mathbf{B} & \mathbf{A} & \dots & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & \dots & -\mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} (1 \\ (2 \\ \\ \\ \\ (n-1 \end{array} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (1 \\ (2 \\ \\ \\ \\ (m-1 \end{array}$$

jelöléssel $\mathbf{A} = 20\mathbf{E} - 4\mathbf{C}$ és $\mathbf{B} = 4\mathbf{E} + \mathbf{C}$ ($\mathbf{E}$ az egységmátrix). Az $\mathbf{M}$ hipermátrix invertálására két módszert javasolunk.

1. Jelölje az $\mathbf{M}$ hipermátrix m-edrendű blokkjaiból, mint elemekből alkotott n-edrendű hiperdeterminánst $\mathbf{U}_n(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Érvényes az alábbi rekurziós formula:

$$\mathbf{U}_{k+1}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{A}\mathbf{U}_k(\mathbf{A}, \mathbf{B}) - \mathbf{B}^2 \mathbf{U}_{k-1}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \qquad (\mathbf{U}_0 = \mathbf{E}).$$

Egerváry tétele értelmében (Acta Sci. Math. 15 (1954) 211—222. o.):

$$\mathbf{M}^{-1} = \operatorname{adj} \mathbf{M}\{\mathbf{U}_n^{-1}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \cdot \times \mathbf{E}\},$$

ahol $\operatorname{adj} \mathbf{M}$ egyes blokkjai:

$$(\operatorname{adj} \mathbf{M})_{ij} = \begin{cases} \mathbf{B}^{j-i}\mathbf{U}_{i-1}(\mathbf{A}, \mathbf{B})\,\mathbf{U}_{n-j-1}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) & i \leqq j \\ \mathbf{B}^{i-j}\mathbf{U}_{j-1}(\mathbf{A}, \mathbf{B})\,\mathbf{U}_{n-i-1}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) & i \geqq j. \end{cases}$$

E módszer lényege az, hogy az $(m - 1)(n - 1)$-edrendű $\mathbf{M}$ mátrix inverzének előállításához csupán $s = \min(m - 1,\ n - 1)$-edrendű mátrixokkal való műveletek válnak szükségessé (vö. EGERVÁRY, Acta Math. Ac. Sci. Hung. 11 (1960) 341—361).

2. Arra való tekintettel, hogy az invertálandó mátrix egyszerű kontinuáns blokkokból álló kontinuáns hipermátrix, az inverz egyes blokkjai (hiperbolikus függvények segítségével) zárt alakban előállíthatók. Mivel az így adódó blokkok kanonikus előállítása ismert, a blokkok egyes elemei $s = \min(m - 1,\ n - 1)$ tagú összeg alakjában explicite felírhatók. Legyen $r_{pq}^{(ij)}$ az $\mathbf{M}^{-1}$ inverz hipermátrix ij indexű blokkjának pq indexű eleme, ekkor ($i \leqq j$ esetén)

$$r_{pq}^{(ij)} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\sin\frac{pk\pi}{m} \sin\frac{qk\pi}{m}}{2 + \cos\frac{k\pi}{m}} \frac{\operatorname{sh} i\vartheta_k \operatorname{sh}(n - j)\vartheta_k}{\operatorname{sh}\vartheta_k \operatorname{sh} n\vartheta_k},$$

ahol

$$\operatorname{ch}\vartheta_k = \frac{5 - 2\cos\frac{k\pi}{m}}{2 + \cos\frac{k\pi}{m}}, \qquad \begin{array}{l} i,\ j = 1, 2, \ldots, n - 1 \\ p, q = 1, 2, \ldots, m - 1. \end{array}$$

(Vö. RÓZSA P., e Közlemények **1** (1956) 593—621.)

5—8. LEE ANNA: *Centroszimmetrikus mátrixokról és azok egy általánosításáról.* (Február 14., 28., március 7. és 21.)

Lásd a szerző „Über permutationsinvariante Matrizen" (Publicationes Math. sajtó alatt) c. dolgozatát.

9. TURÁN PÁL: *A komplex számok hatványösszegeire vonatkozó szélsőérték-feladatok és azok alkalmazása polinomok gyökeinek és mátrixok sajátértékeinek meghatározására.* (Április 11.)

Az előadó ismertette a komplex számok hatványösszegeire vonatkozó szélsőérték-feladatokkal kapcsolatos eredményeket, amelyeket a szerző és követői értek el. Megmutatta, hogy ezek az eredmények hogyan használhatók fel polinomok gyökeinek és mátrixok sajátértékeinek közelítő meghatározására, és hogy mi az így nyert módszerek előnye az ismert közelítő modszerekkel szemben.

10. Kis Ottó: *Referáló előadás.* (Április 25.)

Az előadó áttekintést nyújtott az utóbbi időben a szovjet folyóiratokban megjelent, a numerikus módszerekkel foglalkozó cikkekről.

11. Lee Anna: *Speciális nem-kommutábilis blokkokból álló hipermátrixok spektrálfelbontása.* (Május 9.)

Az előadó megmutatta, hogy Egerváry eredményei olyan mátrixoknál is alkalmazhatók, amelyek a sorok és oszlopok alkalmas cseréjével kommutábilis blokkokból álló hipermátrixokká rendezhetők át.

Lásd Egerváry J.: ,,Páronként felcserélhető blokkokból álló hipermátrixokról és azok alkalmazásáról a rácsdinamikában'' c. dolgozatát, MTA Alk. Mat. Int. Közleményei **3** (1954) 31—47.

12. Rózsa Pál: *Periodikus kontinuánsok faktorizációjáról.* (Május 23.)

Lásd az előadó Lovass Nagy Viktorral közös ,,A Matrix Analysis of the Voltage Distribution of Alternating Ladder Networks'' c. dolgozatát. Proc. JEE., sajtó alatt.

13. Kis Ottó: *Referáló előadás.* (Június 6.)

Az előadó néhány újabb, a szovjet folyóiratokban megjelent, numerikus módszerekkel foglalkozó dolgozatot ismertetett.

14—17. Veidinger László:[5] *A hiperbolikus típusú parciális differenciálegyenletrendszerek megoldására vonatkozó karakterisztikus módszer konvergenciájáról.* (Október 3., 17., 31. és november 21.)

Lásd az előadó ,,On the method of characteristics'' c. cikkét, e Közlemények **7** (1962) A, 301—308.

18—19. Makkai Mihály: *Referáló előadás.*

Az előadó ismertette A. A. Марков: ,,Теория алгоритмов'' c. dolgozatát (Труды математического института имени В. А. Стеклова **42** (1954)).

A komplex függvénytani osztály szemináriuma

1. Alpár László: *Referáló előadás.* (Január 12.)

Az előadó a következő dolgozatot ismertette: Bohr, H., ,,Über einen Satz von J. Pál'' [Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged) **7** (1934—35) 129—135.]

2—10., 15—20. Szilárd Károly: *Referáló előadássorozat.* (Január 26., február 2., 16., 23., március 2., 9., 16., 23., 30., június 8., szeptember 22., 28., október 5., 12., 19.)

Az előadó főleg az alábbi műveket ismertette: Carathéodory, C., ,,Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete'' [Mathematische Annalen **73** (1913) 323—370], Pfluger, A., ,,Extremallängen und Kapazität'' [Commentarii Matematici Helvetii **29** (1955) 120—131].

Alpár László: *Krokodil tartományok felhasználása annak bizonyítására, hogy vannak olyan, az egységkör kerületén egyenletesen, de nem abszolút konvergens hatványsorok, amelyeknek összes törtlineáris transzformáltjai is egyenletesen, de nem abszolút konvergensek az egységkör kerületén.* (Március 16.)

[5] MTA Számítástechnikai Központja.

Lásd az előadó „Sur certaines transformées des séries de puissance absolument convergentes sur la frontière de leur cercle de convergence" című dolgozatát, e Közlemények **7** (1962) A, 313—315.

11—14. Elbert Árpád[6]—Sárközy András:[6] *Racionális polinomokról.* (Április 13., 27., május 11., 18.)

21. Turán Pál: *Egy kvázianalitikus függvényosztály jellemzése („koefficiens feltétel").* (November 2.)

22—25. Balázs János: *Extremális tulajdonságokkal rendelkező polinomok vizsgálata a funkcionálanalízis módszereivel.* (November 9., 23., december 7., 21.)

A differenciálgeometriai csoport szemináriuma

1—2. Szente János: *A topologikus tér fogalmáról* (Október 15., 29.)

3. Szente János: *A topologikus csoportok elméletének főbb alapfogalmai és alapösszefüggései.* (November 12.)

4. Soós Gyula: *A differenciálható sokaság fogalma.* (November 26.)

5. Soós Gyula: *Lokális érintőterek.* (December 10.)

Az előadások ismertető jellegűek. Felhasznált irodalom: C. Cohn: *Lie Groups* c. könyve.

A konstruktív függvénytani csoport szemináriuma

1—2. Freud Géza: *Áttekintés az approximációelmélet újabb eredményeiről.* (Február 5. és 19.) (Ismertető előadás.)

3—4. Turán Pál: *Zygmund egy problémájáról.* (Március 7. és 27.)

5—6. Králik Dezső:[7] *Szummációról általában.* (Április 17., május 8.) (Ismertető előadás.)

7. Voronovszkaja, E. V.:[8] *A Csebisev-féle iskola néhány feladata a funkcionálanalízis legújabb módszereinek tükrében.* (Április 25.)

Lásd: Вороновская, Е. В.: Некоторые задачи чебышевской школы в свете современных функционально-аналитических методов. Тр. 3—20. Всес. Матем. Съезда. 1956, 3. М. АН СССР. 1958, 177—182.

A biometriai osztály szemináriuma

1. Dr. Juvancz Iréneusz: *Beszámoló kínai útjáról.* (Január 2.)

2. Fischer János: *Beszámoló prágai útjáról.* (Január 8.)

3—11. Csiszár Imre: *Referáló előadássorozat.* (Január 15., 22. és 29., február 5., 12., 19. és 26., március 5. és 12.)

Az előadó folytatta Feinstein, A.: „Foundations of information theory" (McGraw-Hill, New York, 1958) című könyvének ismertetését.

12—20. Csiszár Imre: *„Referáló előadássorozat.* (Április 2., 9., 16., 19. és 26., május 7., 14., 21. és 24.)

Az előadó ismertette Dobrusin, R. L.: „A Shannon-féle alaptétel általános megfogalmazása az információelméletben" (MTA III. Oszt. Közl. **11** (1961) 4, **12** (1962) 1—2, magyar fordítás) című cikkét.

---

[6] Eötvös Loránd Tudományegyetem, matematika szakos hallgató.
[7] Budapesti Műszaki Egyetem.
[8] Leningrád.

A funkcionálanalízis osztály szemináriuma

1. Березанский, Ю. М.: *Pozitiv definit magok integrálelőállításairól.* (Január 11.)

2—3. Durst Endre:[9] *Az eltolási operátorról.* (Február 8. és 22.)

Lásd Lax, P.: ,,Translation invariant spaces" (Acta Mathematica **101** (1959) 163—178.)

4—5. Gehér László: *Félcsoportok módszere a differenciálegyenletek elméletében.* (Március 8. és 22.)

Lásd: Modern mathematics for engineer Beckenbach Editor 1961.)

6. Szőkefalvi-Nagy Béla: *Kontrakciók minimális unitér dilatációjának szerkezetéről.* (Március 29.)

Lásd: Sz.-Nagy, B. et Foiaş, C.: ,,Sur les contractions de l'espace de Hilbert. V. Translations bilaterales." (Acta Sci. Math. **23** (1962) 106—129.)

7—8. Szőkefalvi-Nagy Béla: *Funkcionálkalkulus nem korlátos függvényekre.* (Április 14. és 21.)

Lásd: Sz.-Nagy, B. et Foiaş, C.: ,,Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VI. Calcul fonctionnel." (Acta Sci. Math. **23** (1962) 130—167.)

9—11. Moór Arthur:[9] *A delta-függvény és a disztribuciók.* (Április 26. és május 10., 18.)

Lásd: Modern mathematics for the engineer. (Beckenbach Editor 1961.)

12. Stone, M., H.: *Hilbert-terek módszere a konform leképezések elméletében* (Szeptember 12.)

Lásd: Stone, M. H.: ,,Hilbert space methods in conformal mapping." (Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces, Jerusalem, 1960, 409—425.)

13—15. Horváth János:[10] *Termodinamikai perturbáció-számítás.* (Október 11., 17. és november 18.)

A quantum mechanikai többtest probléma tárgyalása során Matsubara megállapította, hogy kölcsönhatásban álló részecskék fizikai rendszereinek termodinamikai függvényei meghatározhatók a fizikai-terek kvantumelméleteinek módszerei segítségével. A kvantum elektrodinamikából ismeretes perturbációs sorfejtés segítségével előállítható a nagy kanonikus-sokaságok fázisintegrálja, amiből a termodinamikai függvények közvetlenül levezethetők. A sorfejtés egyes tagjainak meghatározása könnyen történhetik a Feynman-féle gráfok, illetve a hozzájuk tartozó propagátorok segítségével.

16. Gehér László: *Megoldatlan problémák a funkcionálanalízis köréből.* (November 23.)

Lásd: Halmos, P.: ,,A glimpse into Hilbert space" (sokszorosított előadás.)

17. Bognár János: *Referáló előadás.* (November 29.)

Lásd: Hilgevord, J.: ,,Dispersion relation and causal description." (North-Holland Pc., Amsterdam, 1960.)

18. Durst Endre:[9] *Az invariáns alterek problémája.* (December 6.)

Lásd: Halmos, P.: ,,A glimpse into Hilbert space" (sokszorosított előadás.)

19. Destouches, J.: *Funkcionálanalízis a mikrofizikában.* (December 12.)

---

[9] Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézet.

[10] Szegedi Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézete.

Az előadás azokat az általános feltételeket vizsgálta, amelyeket a mérhető fizikai mennyiségeket reprezentáló funkcionáloknak ki kell elégíteni adott téregyenletek esetén, valamint azt, hogy ezekben a funkcionálokban a mérés aktusa, tehát a mérőberendezés és a vizsgált fizikai rendszer kölcsönhatása hogyan vehető figyelembe.

20—21. KOVÁCS ISTVÁN: *A Plancherel tétel egy új bizonyításáról.* (December 13. és 20.)

Lásd HEWITT, E.: ,,A new proof of the Plancherel theorem on locally compact Abelian groups." (Acta Sci. Math. Sajtó alatt.)

A geometriai osztály szemináriuma

1—9. BÖRÖCZKY KÁROLY: *Robinson egy tételének térbeli általánosítása.* (Febr. 14., 21., 28., márc. 7., 21., 28., ápr. 18., 25., máj. 9.)

Ismeretes, hogy minden olyan térbeli halmaz lefedhető egy R sugarú gömbbel, amelynek bármely pontnégyese lefedhető. Szerző főeredménye, hogy más test nem rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

10. HEPPES ALADÁR: *Véletlen gömbelhelyezések.* (Máj. 16.)

11. BOLTJANSZKIJ, V. G.: *Konvex testek feldarabolásáról.* (Szept. 19.)[11]

12. GALBURA, GH.: *Transzformáció csoportokról.* (Szept. 26.)

13—18. GALLAI TIBOR: *Gráfszínezési problémák* (Okt. 17., 24., 31., nov. 21., 28., dec. 5.)

19—20. HAJÓS GYÖRGY: *Az affin szabályos sokszögek egy jellemzése.* (Dec. 12., 19.)

A matematika logika és alkalmazásai osztály szemináriuma

1. MAKKAI MIHÁLY: *Turing-gépekről.* (Január 13.)

2. SURÁNYI JÁNOS: *Az eldöntésprobléma redukcióelméletéről.* (Január 20.)

3. ÁDÁM ANDRÁS: *Logikai műveletek irredundáns diszjunktív normálformáiról.* (Február 3.)

Az előadó a következő dolgozatok fontosabb eredményeit ismertette: QUINE, W. V.: ,,The problem of simplifying truth functions" (American Math. Monthly 59 (1952) 521—531.), QUINE, W. V.: ,,A way to simplify truth functions" (American Math. Monthly 62 (1955) 627—631.), MOTT, T. H.: ,,Determination of the irredundant normal forms of a truth function by iterated consensus of the prime implicants" (IRE Transactions EC-9 (1960) 245—252.)

4—5. HAJNAL ANDRÁS:[12] *Modell-elméleti vizsgálatokról.* (Február 17. és március 3.)

6. KALMÁR LÁSZLÓ: *Az absztrakt automaták Gluskov-féle elméletéről.* (Április 7.)

Az előadó a következő dolgozatot ismertette: Глушков, В. М.: ,,Абстрактная теория автоматов" (Успехи Мат. Наук 16 (1961) 3—62.).

7. Gr. C. MOISIL:[13] *Az ítéletkalkulus néhány új normálformája és azok alkalmazása tranzisztoros áramkörök egyszerűsítésére.* (Április 10.)

---

[11] A topológiai szemináriummal közös ülések.

[12] Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematikai Intézete.

[13] A Román Tudományos Akadémia Matematikai Intézete, București.

8—10. Makkai Mihály: *Schütte „Beweistheorie" c. könyvének ismertetése.* (Április 21., május 5. és 19.)

11—12. Frey Tamás:[5] (Június 16. és 13.)

13. Asser, G.:[14] *Über eine Klasse von Algorithmen.*[15] (Szeptember 19.)

14. Lerner, A. Ja.:[16] *Emberből és gépből álló rendszerekkel kapcsolatos tudományos problémák.*[15] (November 16.)

15. Destouches, J. L.: [17] *Logique mathématique et la théorie de la physique quantique.*[15] (December 11.)

16. Destouches, J. L.:[17] *Problèmes d'analyse fonctionnelle posés par la microphysique.*[18] (December 12.)

A közgazdasági alkalmazások csoport szemináriuma

1—2. Krajcsovits Márton:[19] *Gyártmányok optimális sorbarendezésének problémája a gyártási sorozatok átlapozásos (vegyes) mozgási módja esetén.* (Január 16., 23.)

Gyártmányok optimális sorbarendezésének problémája az általános esetben nem megoldott feladat, valamennyi $n!$ eset leszámlálásától ugyanis el kell tekintenünk, más, gyakorlatilag is használható szabatos módszer pedig nem ismeretes.

A taglalt vizsgálatban egy speciális eset tárgyalásával foglalkoztunk. Az optimalizálás kritériumául a gyártmányok összességére vonatkoztatott totális átfutási idő szolgál, melyet az optimális sorrend minimalizál.

Az ismerettett eljárás a sorozatgyártásnak azon esetére vonatkozik, amelynél azonos t időpontban egy sorozat megmunkálása egyszerre több gépen is történhet, a gépek között azonban meghatározott készlettartaléknak megfelelő konstans várakozási időtartamot kell biztosítani (átlapolásos mozgási mód). A technológiai előírás minden sorozatnál azonos, tehát ha n a sorozatok, K a műveletek száma, $M_1, \ldots, M_n$ a sorozatnagyságokat jelöli, akkor M_i megmunkálása során ugyanolyan sorrendben kerül az egyes gépekre, mint M_1 $(i = 2, \ldots, n)$. Az ismertetett optimalizálási eljárás hozzáférhető számú lépésben gyakorlatilag hasznosítható eredményt szolgáltat.

A megoldás a 2 gép, n gyártmány esetének $[(2 \times n)$ probléma$]$ alkalmas általánosítása. A $(2 \times n)$ probléma megoldásához a gyártmányok egyszerű osztályozása (átfutási idő különbségek előjele) során jutunk el. Az $(m \times n)$ feladat $(m > 2)$ pedig $(m - 1)$ számú $(2 \times n)$ probléma egyidejű kezelését jelenti.

Az eljárás $\binom{n}{2}$ iteratív javító jellegű lépés elvégzését követeli és programvezérlésű számoló automatán gépesíthető.

Az eljárás hátránya, hogy csak speciális gyártási struktúra esetén alkalmazható és a gépek műveleti sebességét konstansnak tételezi fel.

3—4. Bod Péter: *Gráfelmélet és alkalmazásai.* (Március 2., 9.)

---

[14] Greifswaldi Tudományegyetem (NDK).

[15] A Bolyai Társulat szegedi tagozatával közös rendezésben.

[16] A Szovjet Tudományos Akadémia Automatikai és Távmechanikai Intézete, Moszkva.

[17] Sorbonne, Paris.

[18] A funkcionálanalízis osztállyal és a Bolyai Társulat szegedi tagozatával közös rendezésben.

[19] Ipargazdasági és Üzemszervezési Intézet (KGM).

Lásd: Cl. Berge: Théorie des graphes et ses applications, Dunod, Paris, 1958, pp. 274.

5—10. FERENCZY EÖRS:[20] Gráfelmélet és alkalmazásai (március 16., 23., 30., ápris 13., 20., 27). A fenti könyvismertetés folytatása.

11—14. BOD PÉTER: *Gráfelmélet és alkalmazásai.* (Május 4., 11., 18., 25.) A fenti könyvismertetés foytatása.

15—18. KOVÁCS LÁSZLÓ: *Programozás absztrakt lineáris terekben.* (November 20., 27. december 4., 11.)

Lásd: HURWITZ, L.: ,,Programming in linear spaces'' c. cikkét K. J. ARROW, HURWITZ, L., UZAWA, H.: Studies in linear and non-linear programming c. könyvben (Stanford University Press, Stanford, California, 1958, pp. 38—103).

[20] Ötödéves matematikus hallgató.

AZ INTÉZET MUNKATÁRSAINAK A KORÁBBI DOLGOZATJEGYZÉKEKBEN MÉG FEL NEM TÜNTETETT, MÁSUTT MEGJELENT VAGY SAJTÓ ALATT LEVŐ MAGYAR NYELVŰ DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE[1]

[1] Alpár L.: ,,J. Mikusiński ,,Operátorszámítás" c. könyvének ismertetése". *Magyar Tudomány* **2** (1962) 125—128.

[2] Békéssy A.—Dr. Balogh, L.-né—Fáy Gy.: ,,Megjegyzések és kiegészítések a dimenzióanalízis alkalmazásához." *Energia és Atomtechnika* **14** (1962) 320—327.

[3] Békéssy A.: ,,Interpretatív feldolgozású autokód az URAL elektronikus számológépen való lebegővesszős programozáshoz." *K. S. H. Ügyvitelgépesítési Főosztálya Elektronikus Számológép Részlegének Közleményei* **2** (1962) 15—48.

[4] Békéssy A.: ,,Bináris-decimális konvertáló program a bináris exponens nagyságára vonatkozó megszorítás nélkül URAL elektronikus számológépre." *K. S. H. Ügyvitelgépesítési Főosztálya Elektronikus Számológép Részlegének Közleményei* **3** (1962) 55—63.

[5] Békéssy A.: ,,Egy elosztási problémára vonatkozó határeloszlástétel új bizonyítása." *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **12** (1962) 329—334.

[6] Békéssy A.—Fáy Gy.—Zselev B.: ,,Felületi reakciók kinetikus tömeghatás törvényéről." *Magyar Kémiai Folyóirat**

[7] Békéssy A.—Fáy Gy.: ,,A tüzeléstechnikai reprezentációelmélet alapjairól." *Magyar Kémiai Folyóirat**

[8] Békéssy A.: *Programvezérlésű Elektronikus Számológépek programozása.* Egyetemi jegyzet. Tankönyvkiadó, 1962. 210 oldal.

[9] Bod P.—Pálvölgyi I.: ,,A kocsitartózkodások csökkentése a kohóműveknél." *A Vasúti Tudományos Intézet Közleményei* **12** (1962) 8. 355—364.

[10] Csáki P.: ,,Módszertani szempontok az egyetemi felvételek elbírálásához." *Felsőoktatási Szemle* **11** (1962) 683—684.

[11] Csiszár I.—Dobó A.: ,,Szisztematikus hibák kiküszöbölésének egy módszeréről." *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **12** (1962) 123—132.

[12] Csukás A.-né—Bárczy G.—Sebestyén G.: ,,Szarvasmarha hízékonyság vizsgáló állomány értékelése." *Állattenyésztés**.

[13] Csukás A-né—Orbán I.: ,,Utódellenőrzésből kihagyott egyedek értékelése különös tekintettel az elkallódásra és a gazdasági szelekcióra." *Állattenyésztés**.

[14] Fenyő I.: ,,A matematika helye a tudományok rendszerében." *Filozófiai Közlöny.**

[15] Fenyő I.—Frey T.: *Modern matematika villamosmérnököknek*, I. kötet. Műszaki Könyvkiadó*.

[16] Fischer J.—Szigeti J.: ,,Ivar szerinti különbségek hízékonyságra vizsgált sertéseken." *Állattenyésztés* **11** (1962) 153—164.

[17] Fischer J.—Kállay D.: ,,A kéztő másodlagos csontmagjainak vizsgálata 1—3 éves gyermekeken." *Kisérletes Orvostudomány**.

[18] Freud G.: ,,G. Alexits: ,,Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen" c. könyvének ismertetése." *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **11** (1961) 121—124.

[19] Heppes A.—Molnár J.: ,,Ujabb eredmények a diszkrét geometriában, II." *Matematikai Lapok* **13** (1962) 1—2. 36—72.

[20] Juvancz I.: ,,A biometria fogalma és alkalmazásának általános szempontjai." *Magyar Tudomány* **7** (1962) 683—694.

[1] A csillaggal jelölt dolgozatok sajtó alatt vannak.

[21] JUVANCZ I.: *Statisztikai eljárások. Bálint P. (szerk.) „Klinikai laboratóriumi diagnosztika" c. könyve XXXI. fejezete,* 1218—1280. o. Medicina, Budapest, 1962.
[22] JUVANCZ I.: „Gyógyszerek klinikai ellenőrzése". *Orvosi Hetilap**
[23] KALMÁR L.: „Matematikai és nyelvi struktúrák." *A MTA Nyelvtudományi Intézete rendezésében a matematikai nyelvészet és a gépi fordítás kérdéseiről tartott munkaértekezlet közleményei**
[24] KALMÁR L.: A kvalitatív információelmélet problémái." *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **12** (1962) 293—301.
[25] MEDGYESSY P.: „A Matematikai Lapok Feladatrovatában szereplő, 129. sz. (Turán Páltól származó) feladat általánosítása és megoldása." *Matematikai Lapok**.
[26] MEDGYESSY P.: „Két elv fotografikusan regisztrált változó mennyiség adott függvényének közvetlen regisztrálására." *Magyar Fizikai Folyóirat* **10** (1962) 15—20.
[27] RÉDEI L.: „Hajós György munkásságának ismertetése." *Matematikai Lapok**.
[28] RÉNYI A.: „Egy megfigyeléssorozat kiemelkedő elemeiről." *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **12** (1962) 105—121.
[29] RÉNYI A.: „Dialógus a matematikáról." *Valóság,* 1962.
[30] RÉNYI A.: „Blaise Pascal". *Magyar Tudomány* **8** (1963) 102—108.
[31] SURÁNYI J.— VARGA T.: „Merre tart világszerte a matematika tanítása? Beszámoló a Nemzetközi Matematikaoktatási Szimpoziumról." *Köznevelés* **18** (1962) 689—691.
[32] SURÁNYI J.: „Válasz egy segélykérő levélre (a hatványozás általánosításának kérdéséhez)." *A Matematika Tanítása* **10** (1963) 65—68.
[33] SURÁNYI J.: „Megjegyzések a másodfokú egyenlet tanításához." *A Matematika Tanítása* **10** (1963) 2—5.
[34] SURÁNYI J.—SCHARNITZKY V.: „A lineáris programozásról." *Középiskolai Matematikai Lapok* **25** (1962) 97—104.
[35] SURÁNYI J.: „Számoljunk ügyesen." *Középiskolai Matematikai Lapok* **25** (1962) 10—13.
[36] SZÁSZ F.: „Szele Tibor egy gyűrűelméleti problémájának a megoldása." *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **12**(1962) 47—50.
[37] SZÁSZ F.: „A topologikus gyűrűkről és algebrákról, I. Összefoglaló referátum." *Matematikai Lapok* **13**(1962) 256—278.
[38] SZÁSZ F.: „Szász Gábor »Bevezetés a hálóelméletbe« c. könyvének ismertetése." *Matematikai Lapok* **13**(1962) 212—214.
[39] SZŐKEFALVI-NAGY B.: „Hilbert Dávid." *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **12** (1962) 203—216; *Magyar Tudomány* **7**(1962) 629—639.
[40] SZÜSZ P.: „A lánctörtek metrikus elméletéről." *Doktori disszertáció,* 1962.
[41] TURÁN P.: „Egy komplex számok hatványösszegeire vonatkozó szélsőértékfeladatról és annak egy alkalmazásáról." *Matematikai Lapok* **13** (1962) 3—4.
[42] VAS É.: „Véletlen kapcsolatok vizsgálatának alapelvei." *Mérés és Automatika.**
[43] VAS É.: „Kollokvium a statisztikai minőségellenőrzés problémáiról." *Magyar Tudomány* **3** (1962) 189—190.
[44] VINCZE I.: „A statisztikai előrejelzés néhány demográfiai vonatkozásáról." (Előadáskivonat.) *Demográfia* **5** (1962) 231—232.
[45] VINCZE I.: „A játékelméletről I., II." *Természettudományi Közlöny* **6** (1962) 434—436 és 506—507.
[46] ZIERMANN M.—CSER A.—REMÉNYI G.: *Matematikai Zsebkönyv.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1962.

A KORÁBBI DOLGOZATJEGYZÉKEKBEN HIÁNYOS BIBLIOGRÁFIAI ADATOKKAL SZEREPLŐ MAGYAR NYELVŰ DOLGOZATOK PONTOS ADATAI[2]

VI.: [6] BOD P.: „Néhány gyakorlati megjegyzés az ágazati kapcsolatok formális elemzéséhez (az ágazati és igazgatási rendszerű sakktábla — input-output-mérlegek kapcsolatáról). Az ágazati kapcsolati mérlegek összeállításának és felhasználásának kérdései. *A Budapesten,* 1961. *június* 1—5 *között tartott,*

[2] A sorszám előtt a megfelelő dolgozatjegyzéket tartalmazó évfolyamra utalunk.

Statisztikai Tudományos Konferencia A. tagozatának anyaga). Akadémiai Kiadó, Budapest 1962, 89—97.

VI.: [7] Császár Á.: „A komplex függvénytan elemeinek topológiai segédeszközeiről." *Matematikai Lapok* **13** (1962) 73—94.

VI.: [16] Medgyessy P.: „Külföldi szakfolyóiratok az Akadémiai Kiadónál megjelent önálló matematikai munkákról." *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **12** (1962) 133—139.

VI.: [18] Muszka D.—Kovács K.: „Mérőhíd szerkesztése talajminták összsótartalmának közvetlen meghatározására." *Mérés és Automatika* **10** (1962) 367—368.

VI.: [20] Prékopa A.: *Valószínűségelmélet.* Műszaki Kiadó, Budapest, 1962. 430. o.

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Vidosa László
A kézirat nyomdába érkezett: 1963. IV. 18. — Példányszám: 800 — Terjedelem: 16,8 (A/5) ív + 4 old. melléklet

63.56988 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI

VII. ÉVFOLYAM

1962

★

ТРУДЫ

МАТЕМАТИЧЕСКОГО

ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ VII.,

1962

★

PUBLICATIONS

OF THE

MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE

HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME VII.

1962

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST

1963

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK

KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI: RÉNYI ALFRÉD

TECHNIKAI SZERKESZTŐK: BOGNÁR KATALIN, RÉVÉSZ PÁL

A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEI az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb matematikai, valamint a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden kötete két sorozatban jelenik meg (A. és B. sorozat). Az A. sorozat idegen nyelvű, a B. sorozat magyar nyelvű. Évente egy kötet jelenik meg kb. 30 nyomdaív terjedelemben, amely az A. sorozat 3 és a B. sorozat 1 füzetéből áll. A dolgozatokhoz azoktól különböző nyelvű kivonatok csatlakoznak. Közlésre szánt dolgozatokat kérjük két gépelt példányban kivonattal ellátva a szerkesztő címére küldeni (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15.).

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEInek előfizetési ára kötetenként belföldi címre 50,— Ft, külföldi címre 70,— Ft. (Kötetenként 7 $.) *Belföldön* előfizethető a Posta Központi Hírlapirodánál (Budapest V., József nádor tér 1.) vagy bármely Postahivatalnál. Egyéni előfizetők a 61257. számú, közületek a 61066. számú csekkbefizetési lap felhasználásával, vagy az MNB 8. számú egyszámlára való átutalással rendelhetik meg a folyóiratot. *Külföldi* megrendelések a Kultúra (Budapest, 62, POB 149) útján eszközölhetők. A folyóirat egyes füzetei 15,— Ft-os árban az Akadémiai Könyvesboltban kaphatók (Budapest V., Váci u. 22.). Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük az Intézet Könyvtárához fordulni (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15.).

ТРУДЫ

МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

РЕДАКТОР: ALFRÉD RÉNYI

ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕДАКТОРЫ: KATALIN BOGNÁR, PÁL RÉVÉSZ

АДРЕС: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15. ВЕНГРИЯ

В ТРУДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи, содержащие результаты научно-исследовательской работы Института, и другие математические работы, а также статьи, связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала состоит из двух серий: серия A и B. Серия A выходит на иностранных языках, Серия B — на венгерском языке. В каждом году выходит один том, который содержит приблизительно 30 печатных листов, и состоит из 3 выпусках серии A и одного выпуска серии B. Статьи снабжены с резюмами на языках отличающих от языка статьи.

Цена подписки на ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА в Венгрии 50 форинтов, на заграничный адрес 70 форинтов ($ 7 — за каждый том). Заграничные заказы принимает Культура, Budapest, 62, POB 149). По поводу отношения обмена просим обращаться к Библиотеке Института Budapest, V., Reáltanoda u. 13/15., Венгрия).

PUBLICATIONS

OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

EDITOR: ALFRÉD RÉNYI

TECHNICAL EDITORS: KATALIN BOGNÁR, PÁL RÉVÉSZ

ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15, HUNGARY

The PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of scientific work of the Institute and other mathematical papers on the practical applications of mathematics. Each volume of the journal is published in two series (series A and B). Series A is published in foreign languages series B in Hungarian. In every year one volume appears, consisting of about 30 printed lists and containing 3 fasciculi of series A and one fasciculus of series B. The papers are provided with abstracts in languages different from that of the corresponding paper. Papers intended for publication in the journal should be sent to the editor in 2 typewritten copies, with an abstract.

The price of a volume of the PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE is 50,— Ft to an address in Hungary and 70,— Ft ($ 7.— the volume) to abroad. Subscriptions can be made at the Kultúra from abroad (Budapest, 62, POB 149). For establishing exchange relations please write to the Library of the Mathematical Institute (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15. Hungary).

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX

СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ

Ára: 15,– Ft

INDEX : 25.577

INDEX